計測自動制御学会第 8 回コンピューテーショナル・インテリジェンス研究会講論文集, pp. 19–24, 広島, December (2015).

幾何学的代数の要旨

○金谷健一 （岡山大学名誉教授）

Essence of Geometric Algebra

∗Kenichi Kanatani (Professor Emeritus, Okayama University)

Abstract– With a view to understanding geometric algebra, which has recently been attracting attention for its potentially important role in physics (e.g., mechanics, electromagnetism, quantum mechanics, and theory of relativity), and engineering (e.g., robotics control, computer vision, and computer graphics), we describe in elementary terms its background topics, including Hamilton's quaternion algebra, Grassmann algebra, Clifford algebra, Grassmann–Cayley algebra, and Hestenes' conformal geometry . The equations are restricted within the limits of high-school and first-year college mathematics, without requiring any specific mathematical knowledge.

Key Words: Hamilton's quaternion, Grassmann algebra, Clifford algebra

1 幾何学的代数とは何か

本稿では最近，物理学（力学，電磁気学，量子力学，相対性理論など）や工学（ロボット制御，コンピュータビジョン，コンピュータグラフィクスなど）で重要な役割を果たすことが期待され，注目されている幾何学的代数を概説する．

「幾何学的代数」とは要するに,「ハミルトン代数」と「グラスマン代数」を統合した「クリフォード代数」に「グラスマン–ケイリー代数」(≈ 射影幾何学）と「共形幾何学」を組み合わせたものである．これを理解するには，直接に幾何学的代数を学ぶより，その背景要素を理解するほうが早道である．本稿は参考文献 [1, 2] に基づいている．

歴史的にはハミルトン代数とグラスマン代数が 19 世紀に構築され，それが二つの逆方向に進展した．すなわち，より一般的な抽象代数に発展させたのが英国の数学者クリフォードであり，逆に物理学の記述に必要最小限に簡素化したのが米国の物理学者ギブスである．後者が「ベクトル解析」と呼ばれ，今日世界中のすべての大学の理工系の初年次に教えられているのに対して，クリフォード代数は 20 世紀末に米国の物理学者ヘステネスがとりあげるまで，一部の数学者を除いてほとんど忘れられていた．

2 代数系

英語の algebra という語には二つの意味がある．一つは記号に演算を施す学問体系という意味であり，もう一つは加減，定数倍，積が定義される集合という意味である．混乱を防ぐために，以下では前者を「代数学」，後者を「代数系」(「多元環」と訳されることもある）と読んで区別する．

加減，定数倍が定義される集合は「ベクトル空間」(「線形空間」とも呼ばれる）であるから，代数系とは要するにベクトル空間に積を定義したものである．要素の和は形式的なものでよく，単なる和集合とみなしてよい．例えば 2 個のみかんと 3 個のりんごを足した和は，みかん 2 個りんご 3 個から成る集合であり，これに 3 個のみかんを足すと，みかん 5 個とりんご 3 個から成る集合となる．このような形式的な和を「形式和」(formal sum) と呼ぶ．

3 四元数

複素数の集合 $\mathbb{C}$ は実数と記号 i からなる代数系であり，記号間の積を $i^2 = -1$ と約束する．この代数系は平面上の点集合とみなせ，2 次元ベクトルの演算と同一視できる．そして，単位ベクトルとの積はその偏角だけの回転に対応する．ハミルトンはこれを 3 次元空間に拡張しようと考え，新たな記号 j を導入して $j^2 = -1$ と約束した．そして，複素数の 3 次元版 $p = x+iy+jz$ を考えた．すると，加減算に関する限り，3 次元ベクトルの演算と同一視できるが，これと $q = u+iv+jw$ との積は $pq = (xu-yv-zw)+i(xv+yu)+j(xw+zu)+ijyw+jizv$ となり，閉じた代数系が定義できない．

ハミルトンは長くこれに悩んでいたが，1843 年 10 月 16 日に妻と散歩中に突然解決法を思いついた．それは $k^2 = -1$ となる新たな記号 k を導入した 4 次元空間を考えて，$ij = -ji = k$ と約束すればよいということである．その経緯はアイルランドのダブリンのブルーム橋の記念銘板に刻まれている．

4 ハミルトン代数系

実数と記号 i, j, k からなる代数系を考え，積（四元数積）を次のように約束する．

$$
\begin{gathered}
i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\
ij = k, \qquad jk = i, \qquad ki = j, \\
ji = -ij, \qquad kj = -jk, \qquad ik = -ki
\end{gathered}
\tag{1}
$$

この代数系を「ハミルトン代数系」と呼ぶ．ベクトル空間とみると，4 個の元 1, i, j, k を基底とする 4 次元空間となる．

この代数系の元（「四元数」と呼ぶ）は $q = \alpha + xi + yi+qzk$ の形をしている．α を「スカラ部」，$xi+yi+zk$ を「ベクトル部」と呼ぶ．ベクトル部 $\boldsymbol{q} = xi + yi + zk$ を成分が x, y, z のベクトルと同一視すると，四元数 q はスカラ α とベクトル $\boldsymbol{q}$ の形式和 $q = \alpha + \boldsymbol{q}$ とみなせる．

ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を四元数とみなした積は，定義から計算すると次のように書ける．

$$
\boldsymbol{ab} = -\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \tag{2}
$$

ただし，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ はそれぞれ通常のベクトルの内積，ベクトル積である．すなわち，四元数積は内積とベクトル積を同時に計算しているとみなせる．

四元数 $q = \alpha + \boldsymbol{a}$ の「共役四元数」を $q^\dagger = \alpha - \boldsymbol{a}$ と定義し,「ノルム」を次のように定義する．

$$\|q\|^2 \equiv qq^\dagger = \alpha^2 + \|\boldsymbol{a}\|^2 (= q^\dagger q) \tag{3}$$

これから $q(q^\dagger/\|q\|^2) = (q^\dagger/\|q\|^2)q = 1$ であり，すべての四元数 $q\ (\neq 0)$ にその「逆元」$q^{-1} = q^\dagger/\|q\|^2$ が存在して，$qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ であることがわかる．逆元が存在する代数系は「体」と呼ばれる．四元数全体は体となる．四元数を用いる最大の利点は回転が表せることである．(四元数で表した）ベクトル $\boldsymbol{x}$ を軸 $\boldsymbol{l}$（単位ベクトル）の右ねじ周りに角度 Ω（ラジアン）だけ回したベクトル $\boldsymbol{x}'$ とすると，次のように表せる．

$$\boldsymbol{x}' = q\boldsymbol{x}q^\dagger, \qquad q \equiv \cos\frac{\Omega}{2} + \boldsymbol{l}\sin\frac{\Omega}{2} \tag{4}$$

このように作用する四元数 q を「回転子」と呼ぶ．

5　外積

原点を含み，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の方向の直線を $\boldsymbol{a}$ で表す．この直線の長さは無限であるが,「強度」$\|\boldsymbol{a}\|$ を持つとみなす．原点を含み，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平面を $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ で表す．このように二つのベクトルを $\wedge$（「外積」と呼ぶ）で結んだものを「二重ベクトル」(bivector) と呼ぶ． この平面の面積は無限であるが,「強度」$\|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\| \equiv$ (ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積) を持つとみなす．原点を含み，ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の張る空間を $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$ で表す．このように三つのベクトルの外積を「三重ベクトル」(trivector) と呼ぶ．この空間の体積は無限であるが,「強度」$\|\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\| \equiv$ (ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積) を持つとみなす．外積は次元の低い部分空間を組み合わせて，より高い次元の部分空間を定義するものであり，定義より次の性質をもつ．

- $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$: 順序を変えると平面の符号が変わる（裏返される）．
- $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a} = 0$: 一つのベクトルでは平面が定義できない（“0” は非存在を表す）
- $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$: 循環置換しても定義される空間は同じ．
- $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{b}$: 二つを入れ換えると空間の符号が変わる（裏返される）．
- $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = 0$: 二つのベクトルでは空間が定義できない．
- $\boldsymbol{a}\wedge(\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$: 直線 $\boldsymbol{a}$ と平面 $\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$ の定義する空間も，平面 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ と直線 $\boldsymbol{c}$ との定義する空間も，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の定義する空間と同じ．
- $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d} = 0$, $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}\wedge\boldsymbol{d} = 0$, ...: 3 次元空間には 3 次元以上の空間が定義できない．

6　グラスマン代数系

実数と記号 e_1, e_2, e_3 からなる代数系を考え，積 $\wedge$（外積）を次のように約束する．

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{5}$$

したがって．$e_i \wedge e_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ である．各元は次の形の形式和（「多重ベクトル」(multivector) と呼ぶ）となる．

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \underbrace{\alpha}_{\text{スカラ部}} &+ \underbrace{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}_{\text{ベクトル部}} \\ &+ \underbrace{b_1e_2\wedge e_3 + b_2e_3\wedge e_1 + b_3e_1\wedge e_2}_{\text{二重ベクトル部}} \\ &+ \underbrace{ce_1\wedge e_2\wedge e_3}_{\text{三重ベクトル部}}\end{aligned} \tag{6}$$

このような多重ベクトルから成る代数系を「グラスマン代数系」と呼ぶ．ベクトル空間とみると，8 個の元 $1, e_i, e_i\wedge e_j, e_i\wedge e_j\wedge e_k, i, j = 1, 2, 3$ を基底とする 8 次元空間となる．

二重ベクトルと三重ベクトルの「 双対」を基底によって次のように定義する．

$$(e_2\wedge e_3)^* = e_1,\ (e_3\wedge e_1)^* = e_2,\ (e_1\wedge e_2)^* = e_3,$$
$$(e_1\wedge e_2\wedge e_3)^* = 1 \tag{7}$$

ベクトル $\boldsymbol{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $\boldsymbol{b} = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$, $\boldsymbol{c} = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$ をグラスマン代数系の元とみなすと，次のように書ける．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} = &(a_2b_3 - a_3b_2)e_2\wedge e_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_3\wedge e_1 \\ &+(a_1b_2 - a_2b_1)e_1\wedge e_2,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = &(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\ &-a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2)e_1\wedge e_2\wedge e_3\end{aligned} \tag{9}$$

そして，次の関係が成り立つ

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b})^* = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ \ (\text{ベクトル積}), \tag{10}$$

$$(\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c})^* = |\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|\ \ (\text{スカラ三重積}) \tag{11}$$

7　クリフォード代数系

実数と記号 e_1, e_2, e_3 からなる代数系を考え，積（「幾何学積」または「クリフォード積」と呼ぶ）を次のように約束する．

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1,\ \ e_ie_j = -e_je_i,\ \ i, j = 1, 2, 3 \tag{12}$$

各元は次の形の形式和（「多重ベクトル」と呼ぶ）となる．

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \underbrace{\alpha}_{\text{スカラ部}} &+ \underbrace{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}_{\text{ベクトル部}} \\ &+ \underbrace{b_1e_2e_3 + b_2e_3e_1 + b_3e_1e_2}_{\text{二重ベクトル部}} + \underbrace{ce_1e_2e_3}_{\text{三重ベクトル部}}\end{aligned} \tag{13}$$

このような多重ベクトルから成る代数系を「クリフォード代数系」と呼ぶ．ベクトル空間とみると，8 個の元 $1, e_i, e_ie_j, e_ie_je_k, i, j = 1, 2, 3$ を基底とする 8 次元空間となる．

次のような奇数個の基底をもつ元を「奇多重ベクトル」と呼ぶ．

$$\mathcal{A} = \underbrace{a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3}_{\text{ベクトル部}} + \underbrace{ce_1e_2e_3}_{\text{三重ベクトル部}} \tag{14}$$

次のような偶数個の基底をもつ元を「偶多重ベクトル」と呼ぶ．

$$\mathcal{B} = \underbrace{\alpha}_{\text{スカラ部}} + \underbrace{b_1e_2e_3 + b_2e_3e_1 + b_3e_1e_2}_{\text{二重ベクトル部}}$$

そして，次のように「奇偶性」(pariy) が保たれる．

- (奇多重ベクトル)(奇多重ベクトル) = (偶多重ベクトル).
- (偶多重ベクトル)(偶多重ベクトル) = (偶重ベクトル).
- (奇多重ベクトル)(奇多重ベクトル) = (奇多重ベクトル).

したがって，偶多重ベクトルの集合はそれ自身で閉じた「部分代数系」を作るこの部分代数系はハミルトン代数系にほかならない．なぜなら

$$i \equiv -e_2e_3, \quad j \equiv -e_3e_1, \quad k \equiv -e_1e_2 \tag{15}$$

と置くと式 (1) が満たされるからである．すなわち，クリフォード代数系はハミルトン代数系を内包している．

8 幾何学積の性質

ベクトル $\boldsymbol{a} = a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$, $\boldsymbol{b} = b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3$ をクリフォード代数系の元とみなすと，これらの幾何学積は次のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + (a_2b_3 - a_3b_2)e_2e_3 \\ +(a_3b_1 - a_1b_3)e_3e_1 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_1e_2,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ba} = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 + (b_2a_3 - b_3a_2)e_2e_3 \\ +(b_3a_1 - b_1a_3)e_3e_1 + (b_1a_2 - b_2a_3)e_1e_2\end{aligned} \tag{17}$$

外積 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ を「反対称化」によって定義する．

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ba}), \tag{18}$$

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \frac{1}{6}(\boldsymbol{abc}+\boldsymbol{bca}+\boldsymbol{cab}-\boldsymbol{cba}-\boldsymbol{bac}-\boldsymbol{acb}). \tag{19}$$

4 個以上のベクトルの外積は 0 と約束する．すると，グラスマン代数系の公理がすべて満たされる．すなわち，クリフォード代数系はグラスマン代数系を内包している．

ベクトル $\boldsymbol{a} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $\boldsymbol{b} = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$, $\boldsymbol{c} = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$ に対して，外積は次のようになる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)e_2e_3 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_3e_1 \\ +(a_1b_2 - a_2b_1)e_1e_2,\end{aligned} \tag{20}$$

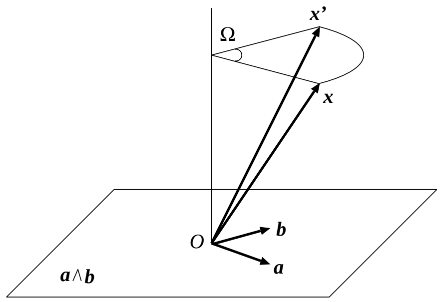

Fig. 1: 回転は回転面と回転角で指定される．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\ -a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2)e_1e_2e_3\end{aligned} \tag{21}$$

式 (16), (17) より，幾何学積の「対称化」は内積に等しい．

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \tag{22}$$

特に，$\boldsymbol{a}^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2$ である．ゆえに，ベクトルの幾何学積は次のようにも書ける．

$$\boldsymbol{ab} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \tag{23}$$

すなわち，幾何学積 $\boldsymbol{ab}$ は内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ と外積 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ を同時に計算しているとみなせる．

$\boldsymbol{a}^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2$ より，$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\|^2) = (\boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\|^2)\boldsymbol{a} = 1$ であるから，すべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ $(\neq 0)$ は逆元 $\boldsymbol{a}^{-1} = \boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\|^2$ をもち，$\boldsymbol{aa}^{-1} = \boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a} = 1$ が成り立つ．

9 回転

回転は回転面 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ と回転角 Ω で定義される（図 1）．回転面の「面積要素」を次のように定義する．

$$\mathcal{I} = \frac{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}\|} \tag{24}$$

これは（向きを含んで）同じ回転面を定義する限り，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の取り方によらない．定義より，$\mathcal{I}^2 = -1$ となることが示せる．そして，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を面積要素 $\mathcal{I}$ の面に対して角度 Ω だけ回転すると，次のベクトルとなる．

$$\boldsymbol{x}' = \mathcal{R}\boldsymbol{x}\mathcal{R}^{-1}, \quad \mathcal{R} \equiv \cos\frac{\Omega}{2} - \mathcal{I}\sin\frac{\Omega}{2} \tag{25}$$

このように作用する $\mathcal{R}$ を「回転子」と呼ぶ．逆回転 $\mathcal{R}^{-1}$ は Ω の符号を変える（=面積要素 $\mathcal{I}$ の符号を変える）ことによって得られる．

10 グラスマン–ケイリー代数

実数と記号 e_0, e_1, e_2, e_3 からなる代数系を考え，積（外積）を次のように約束する．

$$e_a \wedge e_b = -e_b \wedge e_a, \qquad a, b = 0, 1, 2, 3 \tag{26}$$

得られる代数系を「グラスマン–ケイリー代数」と呼ぶ．ベクトル空間とみると，16 個の元 1, e_a, $e_a \wedge e_b$, $e_a \wedge e_b \wedge e_c$, $e_a \wedge e_b \wedge e_c \wedge e_d$, $a, b, c, d = 0, 1, 2, 3$ を基底とする 16 次元空間となる．

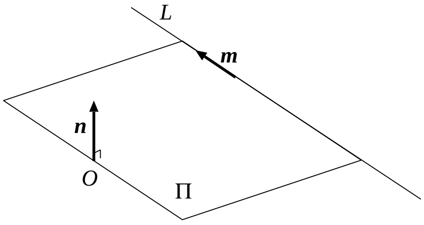

Fig. 2: 直線のプリュッカー座標の幾何学的解釈.

これによって，原点を通らない点や直線や平面がこの空間でのグラスマン代数によって表せる．まず，3 次元空間の点 (x, y, z) を次の元に対応させる．

$$p = e_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3 \tag{27}$$

ただし，これに任意の 0 でない実数を掛けたものも同じ点を表すとする．そのような元からなる 4 次元空間を「同次空間」と呼ぶ．定義より原点 $(0, 0, 0)$ は e_0 に対応するので，e_0 を 3 次元空間の原点 O と同一視する．そして，e_0 を含まない（e_0 の係数が 0）の元

$$\boldsymbol{u} = ue_1 + ue_2 + ue_3 \tag{28}$$

を (u, v, w) 方向を表す方向ベクトルと解釈する．これに任意の 0 でない実数を掛けても同じ方向を表す．これはまた式 (27) で x, y, z を無限大にした極限（その結果 e_0 が相対的に無視される）ともみなせるので，式 (28) は (u, v, w) 方向の「無限遠点」とも解釈される．

4 次元同次空間を考えることは，実質的に古典的な射影幾何学を考えていることと同じである（射影幾何学では 4 次元同次空間は「"3 次元" 射影空間」と呼ばれる）．グラスマン–ケイリー代数は，射影幾何学をグラスマン代数によって記述したものに相当している．

3 次元空間の 2 点を式 (27) のように同次空間の点 p_1, p_2 として表すと，二重ベクトル

$$L = p_1 \wedge p_2 \tag{29}$$

は 3 次元空間のその 2 点を通る直線とみなされる．これを基底によって

$$\begin{aligned} L = {} & m_1 e_0 \wedge e_1 + m_2 e_0 \wedge e_2 + m_3 e_0 \wedge e_3 \\ & + n_1 e_2 \wedge e_3 + n_2 e_3 \wedge e_1 + n_3 e_1 \wedge e_2. \end{aligned} \tag{30}$$

と書くとき，m_i, n_i, $i = 1, 2, 3$ をこの直線の「プリュッカー座標」と呼ぶ．これらに任意の 0 でない実数を掛けても同じ直線を表すという意味で，これらは「同次座標」である．$\boldsymbol{m} = m_1 e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3$, $\boldsymbol{n} = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$ を 3 次元空間のベクトルと同一視すると，$\boldsymbol{m}$ は直線の方向，$\boldsymbol{n}$ は支持平面（その直線と原点 O を通る平面）の法線ベクトルになっている（図 2）．そして，点 p が直線 L の上にある条件が

$$p \wedge L = 0 \tag{31}$$

であるという意味で，これが直線 L の「方程式」である．

3 次元空間の 3 点を同次空間の点 p_1, p_2, p_3 で表すと，三重ベクトル

$$\Pi = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \tag{32}$$

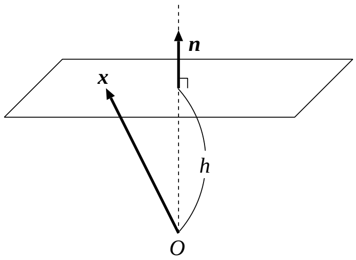

Fig. 3: 平面のプリュッカー座標の幾何学的解釈.

は 3 次元空間のその 3 点を通る平面とみなされる．これを基底によって

$$\begin{aligned} \Pi = {} & n_1 e_0 \wedge e_2 \wedge e_3 + n_2 e_0 \wedge e_3 \wedge e_1 + n_3 e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \\ & + h e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \end{aligned} \tag{33}$$

と書くとき，n_i, $i = 1, 2, 3$, および h をこの平面の「プリュッカー座標」と呼ぶ．これらも任意の 0 でない実数を掛けても同じ平面を表すという意味で「同次座標」である．$\boldsymbol{n} = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$ を 3 次元空間のベクトルと同一視すると，これはその平面の法線ベクトルになり，h がその平面の原点 O からの距離（$\boldsymbol{n}$ の長さを 1 とする単位で測り，$\boldsymbol{n}$ 方向を正とする）である（図 3）．そして，点 p が平面 L の上にある条件が

$$p \wedge \Pi = 0 \tag{34}$$

であるという意味で，これが平面 Π の「方程式」である．

11 結合，交差と双対定理

2 点 p_1, p_2 を通る直線 L をそれらの「結合」(join) と呼び，$L = p_1 \cup p_2$ と書く．3 点 p_1, p_2, p_3 を通る平面 Π をそれらの結合と呼び，$\Pi = p_1 \cup p_2 \cup p_3$ と書く．点 p と 直線 L を通る平面 Π をそれらの結合と呼び，$\Pi = p \cup L$ と書く（図 4）．

直線 L と平面 Π の交点 p をそれらの「交差」(meet) と呼び，$p = L \cap \Pi$ と書く．2 平面 Π_1, Π_2 の交線 L をそれらの交差と呼び，$L = \Pi_1 \cap \Pi_2$ と書く．3 平面 Π_1, Π_2, Π_3 の交点 p をそれらの交差と呼び，$p = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ と書く（図 4）．

平面 Π と点 p が互いに原点 O の反対側で向かい合って，「逆距離」（互いの原点 O までの距離の積が 1）にあるとき，それらは互いに「双対」であるといい，$\Pi = p^*$, $p = \Pi^*$ と書く．

直線 L の支持平面と直線 L に直交する平面を支持平面とし，それぞれの支持平面上で互いに逆距離にある直線 L^* を L の「双対直線」という．L^* の双対直線は L 自身である．

次のような双対定理が成り立つ．

$$(p \cup L)^* = p^* \cap L^*, \qquad (L \cap \Pi)^* = L^* \cup \Pi^*,$$

$$(p_1 \cup p_2)^* = p_1^* \cap p_2^*, \qquad (\Pi_1 \cap \Pi_2)^* = \Pi_1^* \cup \Pi_2^*,$$

$$(p_1 \cup p_2 \cup p_3)^* = p_1^* \cap p_2^* \cap p_3^*,$$

$$(\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3)^* = \Pi_1^* \cup \Pi_2^* \cup \Pi_3^* \tag{35}$$

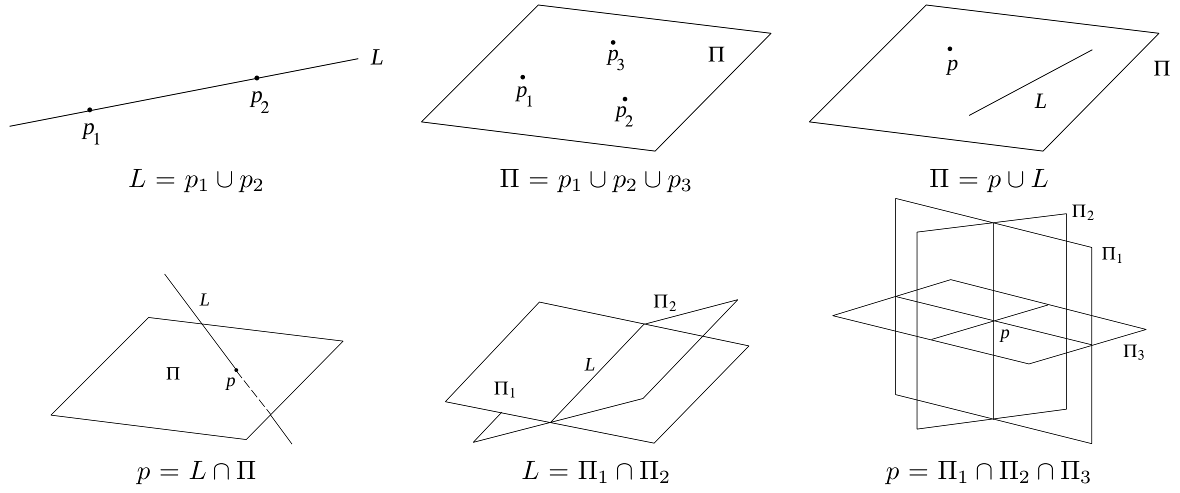

Fig. 4: 結合と交差

12　共形空間

実数と記号 e_0, e_1, e_2, e_3, e_∞ からなる代数系を考えて，積（幾何学積）を次のように約束する．

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, \quad e_0^2 = e_\infty^2 = 0,$$

$$e_0 e_\infty + e_\infty e_0 = -2, \quad e_i e_0 + e_0 e_i = e_i e_\infty + e_\infty e_i = 0,$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{36}$$

ベクトル空間とみると，36 個の元 1, e_κ, $e_\kappa \wedge e_\lambda$, $e_\kappa \wedge e_\lambda \wedge e_\mu$, $e_\kappa \wedge e_\lambda \wedge e_\mu \wedge e_\nu$, κ, λ, μ, $\nu = 0, 1, 2, 3, \infty$ を基底とする 36 次元空間となる．

1, e_0, e_i, $i = 1, 2, 3$, e_∞ の張る 5 次元空間を「共形空間」(conformal space) と呼ぶ．この空間の元の外積を反対称化によって定義する．

$$x \wedge y \equiv \frac{1}{2}(xy - yx),$$

$$x \wedge y \wedge z \equiv \frac{1}{6}(xyz + yzx + zxy - zyx - yxz - xzy),$$

$$x \wedge y \wedge z \wedge w \equiv \frac{1}{24}(xyzw - yxzw + \cdots),$$

$$x \wedge y \wedge z \wedge w \wedge u \equiv \frac{1}{120}(xyzwu - yxzwu + \cdots) \tag{37}$$

ただし，右辺の $\cdots$ はすべての順列にその符号（偶順列は $+$，奇順列は $-$）を付けた和である．そして，6 個以上の元の外積は 0 と約束する．これによってグラスマン代数の公理がすべて満たされる．

共形空間の元の内積を対称化によって定義する．

$$\langle x, y \rangle \equiv \frac{1}{2}(xy + yx) \tag{38}$$

そして，2 乗ノルムを $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ で定義する．しかし，式 (36) より，$\|x\|^2$ は必ずしも正とは限らない．すなわち，共形空間は非ユークリッド空間である．

3 次元空間の点 (x, y, z) を共形空間の次の点に対応させる．

$$p = e_0 + \boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|^2 e_\infty \tag{39}$$

ただし，$\boldsymbol{x} = xe_1 + ye_2 + ze_3$ であり，これを 3 次元空間のベクトルと同一視する．そして $\|\boldsymbol{x}\|^2$ はその（通常の意味の）2 乗ノルムである．式 (36) の約束により，p の共形空間の 2 乗ノルムは 0 となる ($\|p\|^2 = 0$)．式 (39) に任意の 0 でない実数を掛けたものも同じ点を表すと約束する．すなわち，共形空間は同次空間である．

式 (39) より，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とすると $p = e_0$ であるから，e_0 は 3 次元空間の原点 O と同一視される．一方，$\|\boldsymbol{x}\|^2 \to \infty$ の極限を考えると e_0 が相対的に無視され，p は e_∞ の定数倍となる．したがって，e_∞ は 3 次元空間の（唯一の）無限遠点と解釈される．

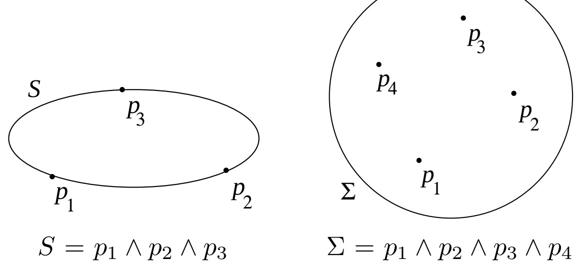

Fig. 5: 円周と球面.

13　円周，球面，直線，平面

3 点 p_1, p_2, p_3 の外積

$$S = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \tag{40}$$

はこれら 3 点を通る円周を表す（図 5）.「表す」という意味は，点 p がこの円周上にある条件が

$$p \wedge S = 0 \tag{41}$$

であるという意味であり，これが円周 S の「方程式」である．4 点 p_1, p_2, p_3, p_4 の外積

$$\Sigma = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \tag{42}$$

はこれら 4 点を通る球面を表す（図 5）.「表す」という意味は，点 p がこの球面上にある条件が

$$p \wedge \Sigma = 0 \tag{43}$$

であるという意味であり，これが球面 Σ の「方程式」である．

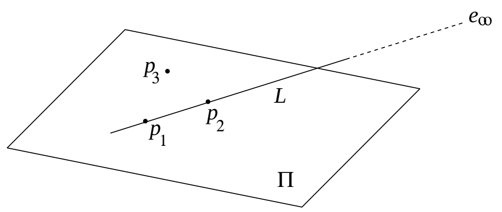

Fig. 6: 2 点 p_1, p_2 を通る直線 $L = p_1 \wedge p_2 \wedge e_\infty$ は p_1, p_2 と無限遠点 e_∞ を通る円周と解釈される．3 点 p_1, p_2, p_3 を通る平面 $\Pi = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge e_\infty$ は p_1, p_2, p_3 と無限遠点 e_∞ を通る球面と解釈される．

式 (40) で $p_3 = e_\infty$ とした

$$L = p_1 \wedge p_2 \wedge e_\infty \tag{44}$$

は点 p_1, p_2 と無限遠点を通る円周，すなわち，2 点 p_1, p_2 を通る直線を表す（図 6）．式 (42) で $p_4 = e_\infty$ とした

$$\Pi = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge e_\infty \tag{45}$$

は点 p_1, p_2, p_3 と無限遠点を通る球面，すなわち，3 点 p_1, p_2, p_3 を通る平面を表す（図 6）．このように，円周と球面が基本的な幾何学的対象であり，直線や平面は円周や球面の特別の場合とみなされる．

5 次元共形空間はグラスマン–ケイリー代数の 4 次元同次空間に e_∞ による新たな次元を加えたものであり，グラスマン–ケイリー代数のすべての結果を含んでいる．そして，直線，平面，円周，球面の上記の表現（「直接表現」と呼ぶ）に双対な「双対表現」を考えることができ，結合や交差に関する次のような双対定理が成り立つ（詳細省略）．

$$(\text{直接表現}) \wedge (\text{直接表現}) = (\text{結合の直接表現}),$$

$$(\text{双対表現}) \wedge (\text{双対表現}) = (\text{交差の双対表現})$$

14　共形幾何学

「共形幾何学」(conformal geometry) とは「共形変換」(conformal mapping)（角度を保つ空間の変換）の性質を調べる学問であり，共形変換は「鏡映」と「反転」(inversion) によって生成される．単位球に関する反転は，単位球内の点を球の中心から逆距離の点に射影することである．球の半径が変わればそれに応じて写像のスケールが変わる（図 7）．

回転は交わる 2 平面に関する鏡映を合成して得られ，2 平面の交線が回転軸になる（図 8）．並進は平行な 2 平面に関する鏡映を合成して得られ，回転軸が無限遠方にある回転とみなされる（図 9）．

拡大・縮小は同心球面に関する反転を合成して得られる．これらによって，よく知られた恒等変換，並進，

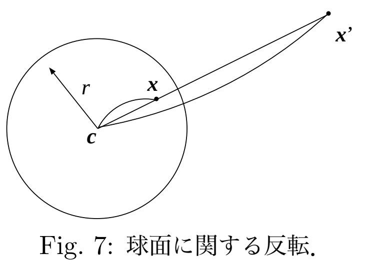

Fig. 7: 球面に関する反転．

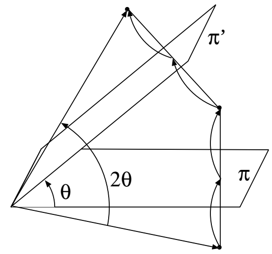

Fig. 8: 回転は交わる 2 平面に関する鏡映の合成として得られ，2 平面の交線が回転軸となる．

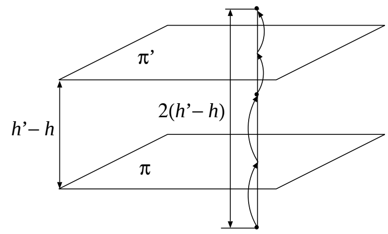

Fig. 9: 並進は平行な 2 平面に関する鏡映の合成として得られ，回転軸が無限遠方 にある回転とみなされる．

回転，拡大・縮小，相似変換，剛体運動だけでなく，反転を加えたすべての共形変換が生成される．

このような共形変換はすべて，次の形の「ベクトル作用子」(verser) によって表せる．

$$\mathcal{V} = v_k v_{k-1} \cdots v_1 \tag{46}$$

ただし，各 v_i は共形空間の元であり，k はこのベクトル作用子の「グレード」と呼ばれる．ベクトル作用子 $\mathcal{V}$ の共役を次のように定義する．

$$\mathcal{V}^\dagger = (-1)^k v_1^{-1} v_2^2 \cdots v_k^{-1} \tag{47}$$

そして，ベクトル作用子 $\mathcal{V}$ は幾何学的対象に次のように作用する．

$$\mathcal{V}(\cdots)\mathcal{V}^\dagger \tag{48}$$

例えば，回転を表す回転子 $\mathcal{R}$ は書き換えると，やはり式 (25) の形（グレード 2）で表される（それ以外の変換の作用子は文献 [1, 2] 参照）．

15　まとめ

幾何学的代数の利点は，結合や交差のような幾何学的な計算が記号間の演算として簡便に記述できることである．しかし，その実行はソフトウェアツールを用いることになる．その内部では高次元（例えば共形幾何学では 36 次元）空間の行列計算が行われる．このとき，要素のほとんどが 0 の疎行列が多く現れ，そのまま定義によって計算すると非常に非効率である．現在，幾何学的代数のソフトウェアの実行を効率化する研究が世界の各地で進行している．

参考文献

1) 金谷健一：「代数系と幾何学/Geometric Algebra: ハミルトン，グラスマン，クリフォード」，森北出版 (2014)

2) K. Kanatani: *Understanding Geometric Algebra: Hamilton, Grassmann, and Clifford for Computr Vision and Graphics*, CRC Press, Boca Raton, FL, U.S.A. (2015)