

楕円当てはめの精度比較： 最小二乗法から超精度くりこみ法まで

横田健太^{†1} 村田和洋^{†2} 菅谷保之^{†2} 金谷健一^{†1}

画像から抽出した点列に楕円を当てはめる手法として、「最小二乗法」とそれを反復的に改善する「重み反復法」、「Taubin 法」とそれを反復的に改善する「くりこみ法」、「超精度最小二乗法」とそれを反復的に改善する「超精度くりこみ法」、再投影誤差を最小にする「最尤推定」とそれを事後的に補正する「超精度補正」をまとめる。そして、これらの精度を実験的に比較し、次のことを示す。1. 従来から最尤推定が最も高精度であるとみなされていたが、新たに提案された超精度くりこみ法はそれよりさらに精度が高い。2. 最も精度が高いのは超精度補正であるが、超精度くりこみ法との差は非常にわずかである。3. 最尤推定解の計算はノイズが大きいと収束しないことがあるのに対して、超精度くりこみ法はノイズに対してロバストである。これらの結果から、実用的には超精度くりこみ法が最も優れた方法であることを結論する。

Accuracy Comparison of Ellipse Fitting: From Least Squares to Hyper-Renormalization

KENTA YOKOTA,^{†1} KAZUHIRO MURATA,^{†2}
YASUYUKI SUGAYA^{†2} and KENICHI KANATANI^{†1}

We summarize the following techniques for fitting an ellipse to a point sequence extracted from an image: “least squares” and its update by “iterative reweight”, the “Taubin method” and its iterative update by “renormalization”, “HyperLS” and its iterative update by “hyper-renormalization”, “maximum likelihood (ML)” which minimize the reprojection error and its a posteriori “hyperaccurate correction”. We experimentally compare their accuracy and show the following: 1. Newly proposed hyper-renormalization is more accurate than ML, which has been widely regarded as the most accurate. 2. The most accurate is the hyperaccurate correction of ML, but the difference from hyper-renormalization is very small. 3. While iterations for computing ML may not always converge in the presence of large noise, Hyper-renormalization is more robust than ML. From these, we conclude that hyper-renormalization is the best method in practical situations.

^{†1} 岡山大学大学院自然科学研究科 Department of Computer Science, Okayama University

^{†2} 豊橋技術科学大学情報工学系 Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology

1. ま え が き

シーン中の円形の物体を撮影すると画像中では楕円となり、その投影像からその物体の3次元位置が解析できる⁷⁾。このため、画像から抽出した点列に円や楕円を当てはめることは視覚ロボットを含む広範な応用の基本的な処理の一つであり、抽出したエッジ点列が楕円をなすかどうかを判定して楕円弧を抽出する種々の研究がなされている^{1),23)}。一方、筆者らはノイズを含むデータに対する楕円当てはめのさまざまな方法を提案し、その精度や計算効率を評価してきた^{22),27),28)}。点列に楕円を当てはめる方法として、次のような方法が知られている。

1) 再投影誤差の最小化に基づく方法

当てはめる楕円と点列との距離の二乗和（「再投影誤差」と呼ばれる⁵⁾）を最小にするように楕円を定める。データ点は真の位置に一樣等方な正規分布に従うノイズが独立に加わったとみなすと尤度の最大化に相当するので、「最尤推定」とも呼ばれる。再投影誤差は「サンブソン誤差」と呼ばれる関数でよく近似され、サンブソン誤差を最小化する反復手法として Chojnacki ら³⁾ の「FNS 法」、Leedan ら²⁰⁾ や Matei ら²¹⁾ の「HEIV 法」、筆者らの「射影ガウスニュートン法」^{17),28)} がある。また、これらを反復的に適用することによって厳密な最尤推定解が計算される^{18),19),22)}。

2) 代数距離の最小化に基づく方法

0 になるべき楕円の式の二乗和（「代数的距離」と呼ばれる）を最小にするように式の係数を定める。計算が単純で再投影誤差最小化の反復の初期値として利用される²⁵⁾。しかし、代数的距離は係数をすべて 0 とすると最小値 0 となるので、係数間に制約条件を課す必要があり、解はその制約に依存する。最も単純なものは係数の二乗和を 1 とするもので、「最小二乗法」（あるいは「代数的距離最小化法」と呼ばれる。より精度の高い方法に「Taubin 法」²⁶⁾）がある。筆者ら^{6),15),16)} は高次の誤差項を除いて偏差が存在しない「超精度最小二乗法」を提案した。これらはすべて固有値問題に帰着するが、制約条件は必ずしも正値 2 次形式ではないので、厳密には特定の評価関数を最小にするものではない。

3) 最小化によらない方法

データから解を計算する手続きを指定する。解はデータの関数となるので、誤差解析により精度がなるべく高くなるように計算方式を定める。古くから知られているのは「重み反復法」であり、筆者らの「くりこみ法」^{8),9)} はこれを改良するものである。最近筆者らはさらに精度を向上させる「超精度くりこみ法」¹⁴⁾ を提案した。一方、再投影誤差またはサ

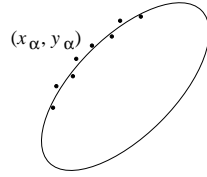


図1 点列に楕円を当てはめる。

ンプソン誤差を最小化する解を計算し，その誤差を評価し，精度を向上させる「超精度補正^{12),27)}」も知られている。

最小化による方法は評価関数を決めればという計算で最小化しても解は同じであるが，計算手続きを指定する方法は解の精度が高くなるように手順を工夫できる．この意味で最小化よりも一般的であり柔軟である．これは統計学における「推定関数⁴⁾」の方法に相当するとみなせる．本論文では上述のさまざまな方法の精度を実験的に比較し，まだ実験の評価がなされていない超精度くりこみ法が再投影誤差またはサンプソン誤差を最小化する方法よりも高精度であることを示す．

2. 楕円当てはめ

楕円の方程式は次のように書ける．

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2f_0(Dx + Ey) + f_0^2F = 0 \quad (1)$$

ただし f_0 はスケールを調節する固定した定数である（実験では $f_0 = 600$ とした）．係数全体を何倍しても同じ楕円を表すので，

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 = 1 \quad (2)$$

と正規化する．ノイズ（以下，データの誤差を「ノイズ」と呼ぶ）のあるデータ点 (x_1, y_1) ， \dots ， (x_N, y_N) に楕円を当てはめることは

$$Ax_\alpha^2 + 2Bx_\alpha y_\alpha + Cy_\alpha^2 + 2f_0(Dx_\alpha + Ey_\alpha) + f_0^2F \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (3)$$

となる A, B, C, D, E, F を計算することである（図1）．6次元ベクトル

$$\xi_\alpha = (x_\alpha^2, 2x_\alpha y_\alpha, y_\alpha^2, 2f_0 x_\alpha, 2f_0 y_\alpha, f_0^2)^\top, \quad \theta = (A, B, C, D, E, F)^\top \quad (4)$$

を定義し，ベクトル a, b の内積を (a, b) と書けば式(3)は次のように書ける．

$$(\xi_\alpha, \theta) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (5)$$

式(2)の正規化は $\|\theta\| = 1$ と等価である．点列 (x_α, y_α) は真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ に期待値0，標準偏差 σ の独立な正規分布に従うノイズ $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha$ が加わったものであるとみなすと ξ_α の誤差は第1近似において次のようになる．

$$\Delta \xi_\alpha = (2x_\alpha \Delta x_\alpha, 2\Delta x_\alpha y_\alpha + 2x_\alpha \Delta y_\alpha, 2y_\alpha \Delta y_\alpha, 2f_0 \Delta x_\alpha, 2f_0 \Delta y_\alpha, 0)^\top \quad (6)$$

仮定より $E[\Delta x] = E[\Delta y] = 0$ ， $E[\Delta x^2] = E[\Delta y^2] = \sigma^2$ ， $E[\Delta x \Delta y] = 0$ であるから， ξ_α の共分散行列は次のようになる．

$$V[\xi_\alpha] \equiv E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top] = \sigma^2 V_0[\xi_\alpha] \quad (7)$$

ただし， $V_0[\xi_\alpha]$ を次のように置き，「正規化共分散行列」と呼ぶ．

$$V_0[\xi_\alpha] = 4 \begin{pmatrix} x_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & 0 & f_0 x_\alpha & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & f_0 y_\alpha & f_0 x_\alpha & 0 \\ 0 & x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 & 0 & f_0 y_\alpha & 0 \\ f_0 x_\alpha & f_0 y_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 x_\alpha & f_0 y_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

理論的にはこれは真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ で評価すべきであるが，実験によると観測値 (x_α, y_α) で評価しても結果に差がない．またこれは $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha$ の第1次近似に基づいているが，2次以上の項を考慮しても最終結果に影響がない．

3. 重み反復法と最小二乗法

古くから知られていた方法は次の「重み反復法」である．

- (1) $W_\alpha = 1$ ， $\alpha = 1, \dots, N$ と置き， $\theta_0 = \mathbf{0}$ とする．
- (2) 次の行列 M を計算する．

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha^\top, \quad (9)$$

- (3) 固有値問題 $M\theta = \lambda\theta$ を解いて，最小固有値に対する単位固有ベクトル θ を計算する．

- (4) 符号を除いて $\theta \approx \theta_0$ なら θ を返して終了する．そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (10)$$

この方法の背景は文献 14) に述べられているが、何かの評価関数を最小にするものではない．初期状態 $W_\alpha = 1$ のもとで計算される θ (以下、便宜上「初期解」と呼ぶ) は代数距離 $\sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha, \theta)^2$ を最小にする単位ベクトル θ であり、「最小二乗法」と呼ばれる方法に一致する．しかし、最小二乗法も重み反復法も偏差が非常に大きく、ほぼ常に真の楕円よりも小さい楕円が当てはまることが知られている¹¹⁾．この偏差を除去して精度を向上させる工夫が筆者らの「くりこみ法^{8),9)}」である．

4. くりこみ法と Taubin 法

筆者らが提案した「くりこみ法^{8),9)}」は次の手順である．

- (1) $W_\alpha = 1, \alpha = 1, \dots, N, \theta_0 = \mathbf{0}$ と置く．
(2) 次の行列 M, N を計算する．

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha^\top, \quad N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha V_0[\xi_\alpha] \quad (11)$$

- (3) 一般固有値問題 $M\theta = \lambda N\theta$ を解いて、最小一般固有値 λ に対する単位一般固有ベクトル θ を計算する．
(4) 符号を除いて $\theta \approx \theta_0$ なら θ を返して終了する．そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (12)$$

文献 8), 9) ではステップ (3) を固有値問題に置き換えて解く方法が示されているが、解は同一である¹¹⁾．この方法の背景も文献 14) に述べられているが、何かの評価関数を最小にするものではない．初期状態 $W_\alpha = 1$ のもとで計算される初期解は拘束条件 $(\theta, \sum_{\alpha=1}^N V_0[\xi_\alpha]\theta) = 1$ のもとに代数距離 $\sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha, \theta)^2$ を最小にする「Taubin 法²⁶⁾」にほかならない．

式 (8) から分かるように、式 (11) の行列 N は第 6 行第 6 列が 0 の半正値対称行列であるが、一般固有値問題 $M\theta = \lambda N\theta$ を解く通常のライブラリツールでは N が正値対称行列と仮定されている．しかし、 $M\theta = \lambda N\theta$ は次のように書き直せる．

$$N\theta = \frac{1}{\lambda} M\theta \quad (13)$$

式 (11) の行列 M はノイズのあるデータに対しては正値対称行列であるから (ノイズがないときのみ最小固有値が 0 となる)、式 (13) を解くことによって一般固有ベクトル θ が求まる．文献 8), 9) の固有値問題に置き換えるくりこみ法の手順はこの手続きを避けるためであった．

5. 超精度くりこみ法と超精度最小二乗法

最近筆者らが提案した「超精度くりこみ法¹⁴⁾」の手順は次のようになる．

- (1) $W_\alpha = 1, \alpha = 1, \dots, N, \theta_0 = \mathbf{0}$ と置く．
(2) 次の行列 M, N を計算する．

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha^\top, \\ N = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \left(V_0[\xi_\alpha] + 2S[\xi_\alpha e^\top] \right) - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha^2 \left((\xi_\alpha, M_5^- \xi_\alpha) V_0[\xi_\alpha] + 2S[V_0[\xi_\alpha] M_5^- \xi_\alpha \xi_\alpha^\top] \right) \quad (14)$$

ただし e は次のベクトルである．

$$e = (1, 0, 1, 0, 0, 0)^\top \quad (15)$$

また $S[\cdot]$ は対象化作用素であり ($S[A] = (A + A^\top)/2$)、 M_5^- は行列 M のランク 5 の一般逆行列、すなわち M の最小固有値を 0 に置き換えた一般逆行列である．

- (3) 一般固有値問題 $M\theta = \lambda N\theta$ を解いて、絶対値が最小の一般固有値 λ に対する単位一般固有ベクトル θ を計算する．
(4) 符号を除いて $\theta \approx \theta_0$ なら θ を返して終了する．そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (16)$$

この方法の導出は文献 14) に述べられているが、何かの評価関数を最小にするものではない．一般固有値問題 $M\theta = \lambda N\theta$ の解 θ の誤差を詳細に解析し、精度を最大化するように行列 N を最適化したものである．そして、その解は高次の誤差項を除いて偏差が 0 である

表 1 最小化によらない方法のまとめ .

初期解	重み更新	最終解
最小二乗法	→	重み反復法
Taubin 法	→	くりこみ法
超精度最小二乗法	→	超精度くりこみ法

という特徴がある¹⁴⁾ . 初期状態 $W_\alpha = 1$ のもとで計算される初期解は筆者らの「超精度最小二乗法^{15),16),24)}」に一致し (N の式がやや異なるが解は同じ) , その解はやはり高次の誤差項を除いて偏差が $\mathbf{0}$ である . 式 (14) の行列 N は正值ではなく , 負の固有値も含んでいる . したがってステップ (3) は式 (13) に置き換えて解く . 以上より , 最小化によらない方法は表 1 のように整理できる .

6. 最尤推定と超精度補正

一方 , 最小化に基づく Chojnacki ら³⁾ の「FNS 法」は次のように記述できる .

- (1) $W_\alpha = 1, \alpha = 1, \dots, N, \theta_0 = \mathbf{0}$ と置く .
- (2) 次の行列 M, L を計算する .

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha^\top, \quad L = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha^2 (\theta_0, \xi_\alpha)^2 V_0[\xi_\alpha] \quad (17)$$

- (3) 固有値問題 $(M - L)\theta = \lambda\theta$ を解き , 最小固有値 λ に対する単位固有ベクトル θ を計算する .
- (4) 符号を除いて $\theta \approx \theta_0$ なら θ を返して終了する . そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る .

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (18)$$

これは次の「サンプソン誤差」を最小にする手続きである .

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\xi_\alpha, \theta)^2}{(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)} \quad (19)$$

この θ に関する微分は式 (17) の行列 M, N を用いれば $\nabla_\theta J = 2(M - L)\theta$ と書ける^{25),28)} . 上記の手続きは $\nabla_\theta J = \mathbf{0}$ となる θ を求めるものであり , Leedan ら²⁰⁾ や Matei ら²¹⁾ の「HEIV 法」, 筆者らの「射影ガウスニュートン法^{17),28)}」でも同じ解が計算される . 初期状態 $W_\alpha = 1$ のもとで計算される初期解は最小二乗法に一致する . 最終的に得られた解を用

いて上式のサンプソン誤差に修正を加えて , それをまた FNS 法 (あるいは HEIV 法 , 射影ガウスニュートン法) で最小化し , これを反復することによって再投影誤差を最小にする解が計算される^{18),19),22)} . しかし , 実験によればサンプソン誤差を最小化する解と再投影誤差を最小にする解は有効数字数桁に渡って一致する . そこで以下ではこれらを含めて「最尤推定」と呼び , 計算法は FNS 法で代表させる .

この解の「超精度補正」とは , 得られた解 θ の偏差を精密に解析して , それを事後的に引き算によって補正するものである^{12),27)} . その手順は次のようになる .

- (1) 次のように σ^2 を推定する .

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\theta, M\theta)}{1 - 5/N} \quad (20)$$

ただし , M は FNS 法の終了時点での値を用いる .

- (2) 次の補正項を計算する .

$$\Delta_c \theta = \frac{\hat{\sigma}^2}{N^2} M_5^- \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha^2 (\xi_\alpha, M_5^- V_0[\xi_\alpha]\theta) \xi_\alpha \quad (21)$$

ただし , W_α は FNS 法の終了時点での値を用いる .

- (3) $\theta \leftarrow \mathcal{N}[\theta - \Delta_c \theta]$ と補正する . ただし $\mathcal{N}[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化を表す ($\mathcal{N}[a] = a/\|a\|$) .

7. 実 験

図 2(a) に示す楕円の第 1 象限に等間隔に 30 点をとる . 楕円は長軸半径 , 短軸半径がそれぞれ 100 画素 , 50 画素と想定している . 各点の x, y 座標に平均 0 , 標準偏差 σ 画素の正規分布に従う乱数ノイズを独立に加え , これに楕円を次の方法で当てはめる : 1. 最小二乗法 , 2. 重み反復法 , 3. Taubin 法 , 4. くりこみ法 , 5. 超精度最小二乗法 , 6. 超精度くりこみ法 , 7. 最尤推定 , 8. 最尤推定の超精度補正 . 図 2(b), (c) は $\sigma = 0.5$ の場合の例である . 点線は真の楕円である . 重み反復法 , くりこみ法 , 超精度くりこみ法はいずれも 4 回の反復で収束したのに対して , 最尤推定を計算する FNS 法は収束に図 2(b) では 9 回 , 図 2(c) では 8 回の反復を要した .

これを見ると , 最小二乗法と重み反復法は偏差が非常に大きく , 小さい楕円が当てはまっていることが分かる . 図 2(b) では超精度くりこみ法が , 図 2(c) では最尤推定の超精度補正が真の楕円に近い楕円を当てはめている . しかし , 結果はデータのノイズに依存するので , 手法の比較には統計的な方法が必要である .

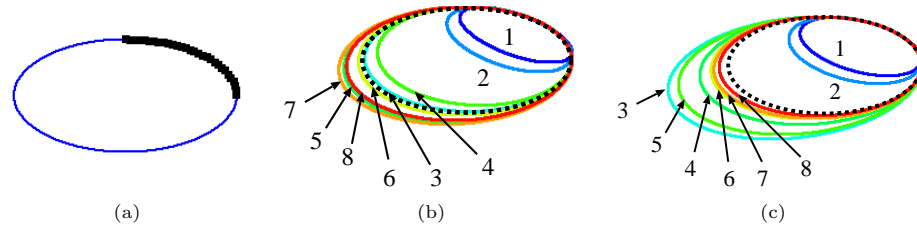


図 2 (a) 楕円上の 30 点 . (b), (c) $\sigma = 0.5$ の場合の当てはめの例 . 1. 最小二乗法, 2. 重み反復法, 3. Taubin 法, 4. くりこみ法, 5. 超精度最小二乗法, 6. 超精度くりこみ法, 7. 最尤推定, 8. 最尤推定の超精度補正 . 破線は真の形状 .

計算した θ と真の値 $\bar{\theta}$ はともに単位ベクトルであることから, その差 $\Delta\theta$ を θ の $\bar{\theta}$ に垂直な成分 $\Delta^\perp\theta = P_{\bar{\theta}}\theta$ で測る (図 3(a)). ただし $P_{\bar{\theta}} (\equiv I - \bar{\theta}\bar{\theta}^\top)$ は $\bar{\theta}$ に垂直な空間への射影行列である. 図 3(b), (c) は横軸の各 σ に対して 10000 回の独立に試行し, 次の偏差 B と RMS (平方平均二乗) 誤差 D をプロットしたものである .

$$B = \left\| \frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \Delta^\perp\theta^{(a)} \right\|, \quad D = \sqrt{\frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \|\Delta^\perp\theta^{(a)}\|^2} \quad (22)$$

ここに $\theta^{(a)}$ は a 回目の試行の解である. 図 3(c) 中の点線は精度の理論限界を表す KCR 下界^{2),10),11),13)} であり, 次のように定義される .

$$D_{\text{KCR}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\text{tr} \bar{M}^-} \quad (23)$$

ただし, \bar{M}^- は行列 M (式 (9), (11), (14)) の真値 \bar{M} の一般逆行列であり ($\bar{M}\bar{\theta} = \mathbf{0}$ より \bar{M} はランク 5), tr はトレースを意味する .

図 3(b), (c) で重み反復法, 最尤推定, 最尤推定の超精度補正のプロットが途中で途切れているのは, それより大きいノイズでは反復が収束しなかったためである . ただし, 収束判定は符号をそろえた解 θ と前回の解 θ_0 が $\|\theta - \theta_0\| < 10^{-6}$ であるとし, 100 回反復して収束しないとき, 「収束しない」と判定した . そして 10000 回の試行で 1 度でも収束しないとき, 実験を打ち切った . 図 4(a), (b) は図 3(b), (c) の σ が小さい部分の拡大である .

図 3(b) から分かるように, 最小二乗法と重み反復法は偏差が非常に大きい . それに比較すると Taubin 法とくりこみ法は偏差が少ない . 超精度最小二乗法と超精度くりこみ法はさらに偏差が少なく, 最尤推定よりも少ない . 解析によって重み反復法, くりこみ法, 超精度

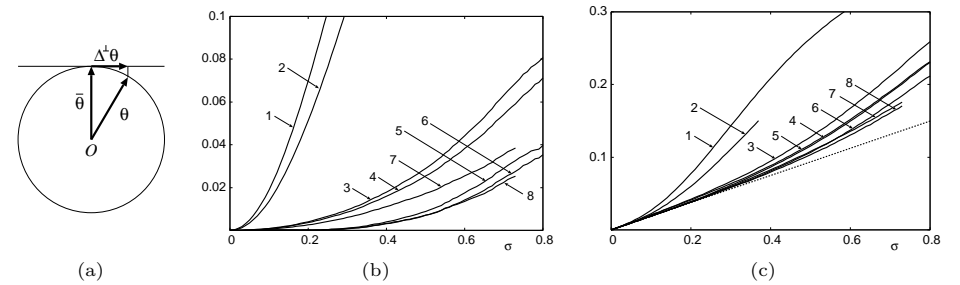


図 3 (a) 計算値 θ の真の値 $\bar{\theta}$ に垂直な成分 $\Delta^\perp\theta$. (b), (c) 図 2(a) のデータに対する当てはめの偏差 (b) と RMS 誤差 (c) . 横軸は各点に加えたノイズの標準偏差 σ . 1. 最小二乗法, 2. 重み反復法, 3. Taubin 法, 4. くりこみ法, 5. 超精度最小二乗法, 6. 超精度くりこみ法, 7. 最尤推定, 8. 最尤推定の超精度補正 . (c) の点線は KCR 下界 .

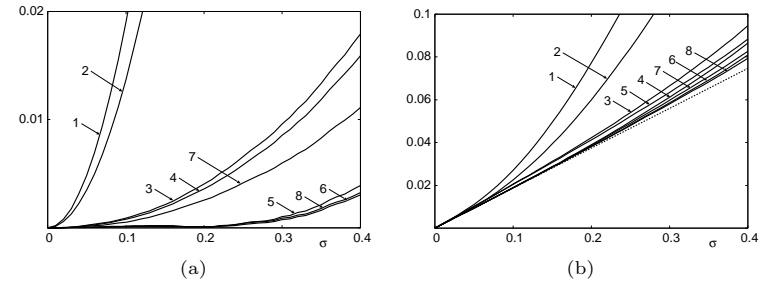


図 4 (a) 図 3(b) の拡大 . (b) 図 3(c) の拡大 .

くりこみ法の解の共分散行列の主要項は等しく, KCR の下界に一致することが示せる (付録) . このため RMS 誤差は偏差の与える影響が大きく, 図 3(c) に示されるように偏差の減少がそのまま RMS 誤差の減少に結びついている .

超精度くりこみ法は高次の誤差項を除いて偏差が存在しないため, 図 3(c) から分かるように従来最も精度が高いとみなされた最尤推定にほぼ等しい精度になっている . さらに詳細に見ると図 4(b) に示されるように σ が小さい範囲では最尤推定を上回る精度である . 一方, 偏差項を事後的に引き去る最尤推定の超精度補正は図 3(c), 図 4(b) に示すように, わずかであるが他のどの手法よりも RMS 誤差が小さい . 図 3(b) から分かるように σ が大きいとき他のどの手法よりも偏差が小さいが, 図 4(a) を見ると, σ が小さいときは超精度

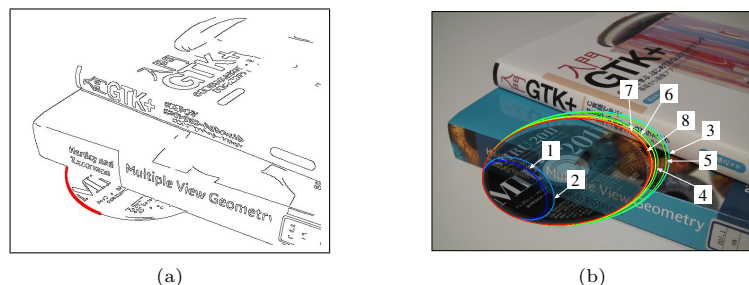


図 5 (a) 円形物体を含む画像から検出したエッジ画像と、楕円を当てはめたエッジ点 (160 点)。(b) 当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したもの。隠れた部分を半透明で合成している。1. 最小二乗法, 2. 重み反復法, 3. Taubin 法, 4. くりこみ法, 5. 超精度最小二乗法, 6. 超精度くりこみ法, 7. 最尤推定, 8. 最尤推定の超精度補正。

りこみ法のほうが偏差が少ない。

以上より、最も高精度な楕円当てはめは最尤推定の超精度補正であり、超精度くりこみ法がほぼそれに匹敵する高精度であることが分かった。ただし、超精度補正のためにはまず最尤推定解を求める必要があるが、それを計算する FNS 法が図 3(b), (c) から分かるようにノイズが大きいと必ずしも収束しないという問題がある。それに対して超精度くりこみ法はノイズにロバストであり、数回の反復で収束する。これは初期解が超精度最小二乗法であり、図 3, 図 4 から分かるように最初から精度の高い解になっているからである。この意味で超精度くりこみ法が実際の計算には最も適しているといえる。

図 5(a) は円形物体を含む画像から検出したエッジ画像であり、赤色で示した 160 個のエッジ点にいろいろな手法で楕円を当てはめた。図 5(b) はそれを原画像上に重ねて表示したものである。分かりやすくするために隠れた部分を半透明で合成している。この例では重み反復法が 4 回の反復で、くりこみ法と超精度くりこみ法が共に 3 回の反復で収束したのに対して、最尤推定を計算する FNS 法は収束に 6 回の反復を要した。この場合もやはり最小二乗法と重み反復法は小さい楕円が当てはまっている。それ以外の手法はどれも真の楕円に近い結果を与えている。この場合は最尤推定の当てはめが最も真の楕円に近い。

8. ま と め

本論文では画像から抽出した点列に楕円を当てはめるこれまでに知られている次の方法をまとめた。

- (1) 最小二乗法とそれを反復的に改善する重み反復法。
- (2) Taubin 法²⁶⁾ とそれを反復的に改善するくりこみ法^{8),9)}。
- (3) 超精度最小二乗法^{15),16),24)} とそれを反復的に改善する超精度くりこみ法¹⁴⁾。
- (4) 再投影誤差を最小にする最尤推定とそれを事後的に補正する超精度補正^{12),27)}。

そして、これらの精度を実験的に比較した。その結果、次のことが明らかになった。

- 従来から最尤推定が最も高精度であるとみなされていたが、超精度くりこみ法はそれよりさらに精度が高い。
- 最も精度が高いのは超精度補正であるが、超精度くりこみ法との差はわずかである。
- 最尤推定解の計算はノイズが大きいと収束しないことがあるのに対して、超精度くりこみ法はノイズに対してロバストである。

この結果から、実用的には超精度くりこみ法が最も優れた方法であると結論される。

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成によった。

参 考 文 献

- 1) 有馬利洋, 菅谷保之, エッジ点列の分割とモデル選択を用いた統合による楕円検出, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-166-5 (2009-3), 33-40.
- 2) N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comp. Stat. Data Anal.*, **47-4** (2004-11), 713-728.
- 3) W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel, and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22-11** (2000-11), 1294-1303.
- 4) V. P. Godambe (Ed.), *Estimating Functions*, Oxford University Press, New York, U.S.A., 1991.
- 5) R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004.
- 6) 岩元祐輝, プラサンナ・ランガラヤン, 金谷 健一, 楕円当てはめの超精度最小二乗法, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-168-14 (2009-8/9), 1-8.
- 7) K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- 8) K. Kanatani, Renormalization for unbiased estimation, *Pro. 4th Int. Conf. Comput. Vis. (ICCV'93)*, May 1993, Berlin, Germany, pp. 599-606.
- 9) 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35-2** (1994-2), 201-209.
- 10) 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36-88** (1995-8), 1865-1873.
- 11) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.

- 12) K. Kanatani, Ellipse fitting with hyperaccuracy, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E89-D-10** (2006-10), 2653–2660.
- 13) K. Kanatani, Statistical optimization for geometric fitting: Theoretical accuracy analysis and high order error analysis, *Int. J. Comput. Vis.*, **80-2** (2008-11), 167–188.
- 14) 金谷健一, アリ・アルシャラドカー, ニコライ・チェルノフ, 菅谷保之, 超精度くりこみ法, 情報処理学会研究報告, 2012-CVIM-180-25 (2012-1), 1–8.
- 15) K. Kanatani and P. Rangarajan, Hyper least squares fitting of circles and ellipses, *Comput. Stat. Data Anal.*, **55-6** (2011-6), 2197–2208.
- 16) K. Kanatani, P. Rangarajan, Y. Sugaya and H. Niitsuma, HyperLS and its applications, *IPSI Trans. Comput. Vis. Appl.*, **3** (2011-10), 80–94.
- 17) K. Kanatani and Y. Sugaya, Performance evaluation of iterative geometric fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **52-2** (2007-10), 1208–1222.
- 18) 金谷健一, 菅谷保之, 幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の統一的計算法, 情報処理学会論文誌: CVIM, **2-1** (2009-3), 53–62.
- 19) K. Kanatani and Y. Sugaya, Unified computation of strict maximum likelihood for geometric fitting, *J. Math. Imaging Vis.*, **38-1** (2010-9), 1–13.
- 20) Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vis.*, **37-2** (2000-6), 127–150.
- 21) J. Matei and P. Meer, Estimation of nonlinear errors-in-variables models for computer vision applications, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **28-10** (2006-10), 1537–1552.
- 22) 中川裕介, 金谷健一, 菅谷保之, 高ノイズレベルにおける最尤楕円当てはめ, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-10 (2008-3), 53–60.
- 23) 岡部光生, 金谷健一, 太田直哉, 楕円成長法による円形物体の自動検出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J85-D-II-12** (2002-12), 1823–1831.
- 24) P. Rangarajan and K. Kanatani, Improved algebraic methods for circle fitting, *Electronic J. Stat.*, **3** (2009-10), 1075–1082.
- 25) 菅谷保之, 金谷健一, [講座] 画像の三次元理解のための最適化計算 [I]–[IV] 電子情報通信学会誌, **92-3, 4, 6, 7** (2009-3, 4, 6, 7), 229–233, 301–306, 463–468, 573–578.
- 26) G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13-11** (1991-11), 1115–1138.
- 27) 山田純平, 金谷健一, 超精度の楕円当てはめ, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-151-15 (2005-11), 197–114.
- 28) 山田 純平, 金谷 健一, 菅谷 保之, 楕円当てはめの高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-154-36 (2006-5), 339–346.

付録 解の共分散行列の評価

重み反復法, くりこみ法, 超精度くりこみ法はすべて一般固有値問題 $M\theta = \lambda N\theta$ を解くものである。ただし行列 N は重み反復法では単位行列 I であり, くりこみ法では式

(11), 超精度くりこみ法では式 (14) で与えられる。一方, 行列 M はすべての方法で同じである (式 (9), (11), (14))。データにノイズがあるとき, ξ_α の真の値を $\bar{\xi}_\alpha$ とし, $\xi_\alpha = \bar{\xi}_\alpha + \Delta\xi_\alpha + \dots$ と展開する。ただし, $\Delta\xi_\alpha$ は $O(\sigma)$ の項であり, \dots はより高次の誤差項である。これを代入して行列 M, N も $M = \bar{M} + \Delta M + \dots, N = \bar{N} + \Delta N + \dots$ と同様に展開する。 λ, θ も同様に展開して

$$(\bar{M} + \Delta M + \dots)(\bar{\theta} + \Delta\theta + \dots) = (\bar{\lambda} + \Delta\lambda + \dots)(\bar{N} + \Delta N + \dots)(\bar{\theta} + \Delta\theta + \dots) \quad (24)$$

の両辺から $O(\sigma)$ の項を取り出して等値する。ノイズがないとき $\bar{M}\bar{\theta} = \mathbf{0}$ であり $\bar{\lambda} = 0$ であることに注意すると次式を得る。

$$\bar{M}\Delta\theta + \Delta M\bar{\theta} = \Delta\lambda\bar{N}\bar{\theta} \quad (25)$$

行列 M の定義 (式 (9), (11), (14)) から $\Delta M\bar{\theta}$ は次のように書ける。

$$\Delta M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \bar{W}_\alpha \left(\Delta\xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top + \bar{\xi}_\alpha \Delta\xi_\alpha^\top \right) + \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \Delta\bar{W}_\alpha \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top, \quad (26)$$

ただし, 反復の収束の時点では $W_\alpha = 1/(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)$ になっているとし, $W_\alpha = \bar{W}_\alpha + \Delta W_\alpha + \dots$ と展開している。式 (25) の両辺と $\bar{\theta}$ との内積をとると次のようになる。

$$(\bar{\theta}, \bar{M}\Delta\theta) + (\bar{\theta}, \Delta M\bar{\theta}) = \Delta\lambda(\bar{\theta}, \bar{N}\bar{\theta}) \quad (27)$$

しかし, $(\bar{\theta}, \bar{M}\Delta\theta) = (\bar{M}\bar{\theta}, \Delta\theta) = 0$ であり, また式 (26) より $(\bar{\theta}, \Delta M\bar{\theta}) = 0$ であるから $(\bar{\xi}_\alpha, \bar{\theta}) = 0$ に注意), $\Delta\lambda = 0$ である。行列 \bar{M} はランク 5 であり, $\bar{\theta}$ がその零ベクトルであるから, \bar{M} の一般逆行列を \bar{M}^- とすると $\bar{M}^- \bar{M}$ は $\bar{\theta}$ 方向への射影行列 $P_{\bar{\theta}}$ に等しい。したがって式 (25) の両辺に \bar{M}^- を掛けることによって $\Delta\theta$ が次のように書ける。

$$\Delta\theta = -\bar{M}^- \Delta M\bar{\theta} \quad (28)$$

ただし, θ が単位ベクトルに正規化されることから $\Delta\theta$ が $\bar{\theta}$ に直交し, したがって $P_{\bar{\theta}}\Delta\theta = \Delta\theta$ であることを用いた。ゆえに θ の共分散行列は $O(\sigma^4)$ の誤差項を除いて次のようになる。

$$\begin{aligned} V[\theta] &= E[\Delta\theta\Delta\theta^\top] \\ &= E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \bar{W}_\alpha(\Delta\xi_\alpha, \bar{\theta})\bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha\right)\left(\frac{1}{N} \sum_{\beta=1}^N \bar{W}_\beta(\Delta\xi_\beta, \bar{\theta})\bar{M}^- \bar{\xi}_\beta\right)^\top\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \bar{W}_\alpha \bar{W}_\beta E[(\Delta \xi_\alpha, \bar{\theta})(\Delta \xi_\beta, \bar{\theta})] \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top \bar{M}^- \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \bar{W}_\alpha \bar{W}_\beta (\bar{\theta}, E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta^\top] \bar{\theta}) \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top \bar{M}^- \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \bar{W}_\alpha \bar{W}_\beta (\bar{\theta}, \sigma^2 \delta_{\alpha\beta} V_0[\xi_\alpha] \bar{\theta}) \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top \bar{M}^- \\
&= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \bar{W}_\alpha^2 (\bar{\theta}, V_0[\xi_\alpha] \bar{\theta}) \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top \bar{M}^- = \frac{\sigma^2}{N} \bar{M}^- \left(\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \bar{W}_\alpha \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top \right) \bar{M}^-
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma^2}{N} \bar{M}^- \bar{M} \bar{M}^- = \frac{\sigma^2}{N} \bar{M}^- \quad (29)$$

ただしノイズの独立性の仮定から $E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta^\top] = \sigma^2 \delta_{\alpha\beta} V_0[\xi_\alpha]$ であること ($\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカーデルタ), および一般逆行列に関する恒等式 $\bar{M}^- \bar{M} \bar{M}^- = \bar{M}^-$ を用いた. これから重み反復法, くりこみ法, 超精度くりこみ法の解 θ の共分散行列は高次の誤差項を除いてすべて等しく, 行列 N に依らないことが分かる. 式 (29) の最後の項が「KCR 下界^{2),10),11),13)}」と呼ばれる精度の理論限界であり, 重み反復法, くりこみ法, 超精度くりこみ法の解 θ はすべて高次の誤差項を除いて KCR 下界を達成していることが分かる. 式 (29) のトレースをとると $\text{tr}V[\theta] = \text{tr}E[\Delta \theta \Delta \theta^\top] = E[\|\Delta \theta\|^2]$ となり, この平方根をとると RMS 誤差が評価される (式 (23)).