

画像の三次元理解のための 最適化計算 [II] —だ円の当てはめ—

Optimization Computation for 3-D Understanding of Images [III]:
Ellipse Fitting

菅谷保之 金谷健一

1. はじめに

前回⁽¹⁾は、与えられた点列に直線を当てはめる問題を取り上げ、最適計算に関する用語や考え方を説明した。今回はその拡張として、画像中の円形物体にだ円を当てはめる問題を取り上げ、その応用例を示す。

2. だ円の検出と当てはめ

シーン中の円形物体を撮影すると画像面上ではだ円となり、その形状からその物体の三次元位置が解析できる⁽²⁾。このため、画像から抽出した点列にだ円を当てはめることはカメラ校正や視覚ロボットの制御を含む様々な応用の基本的な処理の一つである。

これを行うためには、まず画像からだ円弧を成す点列を抽出しなければならない。最初の処理はエッジ検出 (edge detection) である。エッジ (edge) とは物体の縁のようにその両側で輝度値が大きく変化する画素列のことである。エッジ検出の代表的な手法には零交差法 (zero-crossing) や Canny オペレータ (Canny operator) がある⁽³⁾。図 1(a) の入力画像に対して零交差法でエ

ッジを検出した結果が図 1(b) である。図 1(c) は Canny オペレータを用いた結果である。

次に、検出したエッジ点列からだ円弧を成す点列を選ぶ。これを自動的に行うことは非常に難しい問題であり、様々な研究が行われている^{(4),(5)}。ここではこの問題に深入りせず、ユーザが指定するなどの方法により適切な点列が得られているとする。

図 1(c) のエッジ点列から交通標識部分を手動で指定し、それに後述の手法でだ円を当てはめた結果が図 1(d) である。指定した点列は図 1(d) の右下に示すだ円 (この場合は円に近い) の一部であるが、だ円全体が抽出されている。図 2 は当てはめただ円から、シーン中の円の三次元位置を解析して CG を合成した例である。

3. 当てはめの方法

だ円の方程式は次のように書ける。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey)f_0 + Ff_0^2 = 0 \quad (1)$$

ただし f_0 は任意に固定した基準長であり、前回⁽¹⁾に述べたように、式の各項の物理的な次元をそろえるものである。またこれを適切に選べば、計算途中の値のオーダがそろい、数値的不安定を避けることができる。

離散的な画素から成るデジタル画像にエッジ検出を施しても、解像度や物体の写り方によってはエッジが正確に得られるとは限らない。このため、抽出しただ円弧を成す点列 (x_α, y_α) , $\alpha = 1, \dots, N$ が厳密に式 (1) を満たすとは限らない。そこで $\alpha = 1, \dots, N$ に対して

$$Ax_\alpha^2 + 2Bx_\alpha y_\alpha + Cy_\alpha^2 + 2(Dx_\alpha + Ey_\alpha)f_0 + Ff_0^2 \approx 0 \quad (2)$$

となるように A, B, C, D, E, F を定めることを考える (図 3)。ただし、式全体を何倍しても同じだ円の式であるから、 A, B, C, D, E, F には定数倍の不定性がある。した

目	次
[I] 直線の当てはめ	(3月号)
[II] だ円の当てはめ	(4月号)
[III] 基礎行列の計算	(5月号)
[IV・完] 発展と動向	(6月号)

菅谷保之 正員 豊橋技術科学大学情報工学系

E-mail sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

金谷 健一 正員 岡山大学大学院自然科学研究科

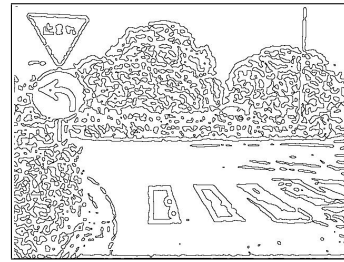
E-mail kanatani@suri.cs.okayama-u.ac.jp

Yasuyuki SUGAYA, Member (Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology, Toyohashi-shi, 441-8580 Japan) and Kenichi KANATANI, Member (Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama-shi, 700-8530 Japan).

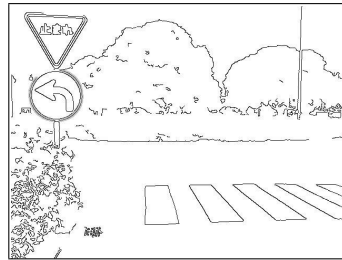
電子情報通信学会誌 Vol. 92 No. 4 pp.301-306 2009年4月



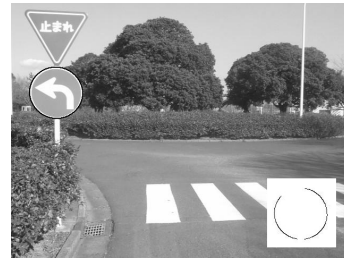
(a) 入力画像



(b) 零交差法によるエッジ検出

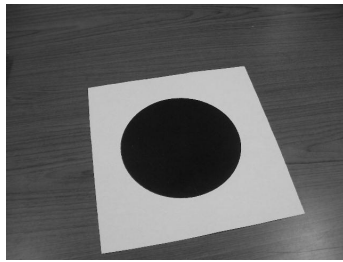


(c) Canny オペレータによるエッジ検出



(d) だ円の当てはめ

図 1 エッジ検出



(a) 入力画像



(b) 当てはめただ円から計算した円の三次元位置に CG を合成した結果

図 2 当てはめただ円による三次元解析の例

がって、適当なスケールの正規化が必要となる。例えば $F = 1, A + B = 1, A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 = 1$ などが考えられる。しかし、この正規化は計算の便宜であり、どういう正規化を行うかで当てはめた結果が異なるというのは不合理である。後に示すように、最ゆう推定という手法を用いれば、結果は正規化に依存しないことが分かる。そこで、以下では次の正規化を採用する。

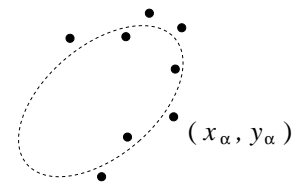


図 3 点列 (x_α, y_α) へのだ円を当てはめ

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 = 1 \quad (3)$$

ベクトル u, ξ_α を、

$$u \equiv (A, B, C, D, E, F)^T \quad (4)$$

$$\xi_\alpha \equiv (x_\alpha^2, 2x_\alpha y_\alpha, y_\alpha^2, 2f_0 x_\alpha, 2f_0 y_\alpha, f_0^2)^T \quad (5)$$

と置くと、式 (2) は次のように書ける。

$$(u, \xi_\alpha) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (6)$$

ただし、本講座ではベクトル a, b の内積を (a, b) と書く。式 (3) の正規化を行うことは、 $\|u\| = 1$ と約束することと等価である。

前回⁽¹⁾の講座と比較すれば、上式は直線当てはめの場合と同じ形をしていることが分かる^(注1)。したがって、前回に解説した直線当てはめの手法がほとんどそのまま

(注1) 直線の場合は直線の係数から作られるベクトルを u 、データ (x_α, y_α) から作られるベクトルを x_α と書いた。

適用できる。

なお、式 (1) が表すのはだ円とは限らず、放物線、双曲線、及びそれらの退化も含み、総称して円すい曲線 (conic) と呼ばれる。誤差が極端に大きい場合は、だ円上の点列に式 (1) を当てはめると双曲線が当てはまることもある。それを防ぐ方法もあるが⁽⁶⁾、ここでは考慮しない^(注2)。

4. 最小二乗法

式 (6) を満たす六次元単位ベクトル \mathbf{u} を求める最も単純な方法は、直線当てはめの場合に示した $\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2$ を最小にする最小二乗法 (least squares) である。これは、 6×6 行列 M_{LS} を

$$M_{LS} \equiv \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \quad (7)$$

と置くと、次式の最小化となる。

$$\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, M_{LS} \mathbf{u}) \quad (8)$$

これは \mathbf{u} の二次形式であるから、よく知られたように、これを最小にする単位ベクトル \mathbf{u} は行列 M_{LS} の最小固有値に対する単位固有ベクトルである⁽⁸⁾。

最小二乗法はこのように簡単に解が求まるので、実際の応用に非常に便利である。しかし、理論的な問題が潜んでいる。それは解が正規化に依存することである。実際、式 (3) でない正規化条件 (例えば $F = 1$ や $A + B = 1$) のもとで式 (8) を最小化すると別の解が得られる。計算の便宜上の約束が解に影響することは不都合である。また、当てはめ精度にも問題がある。当てはめに用いる点列がほぼだ円全体を覆うような場合は問題ないが、点列が短い部分弧の場合は、最小二乗法で得られるだ円は当てはまるべきだ円から相当の偏りがあることが知られている^{(2),(9),(10),(11)}。

5. 最ゆう推定

最小二乗法の問題は、直線当てはめの場合と同様に考察できる。前回⁽¹⁾ 指摘したように、ガウスが提唱した最小二乗法は二乗和する各式に期待値 0、分散同一の独立な正規分布に従う誤差が加わっていると考えるものである。式 (8) の場合には各 α に対して

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha) = Ax_\alpha^2 + 2Bx_\alpha y_\alpha + Cy_\alpha^2 + 2(Dx_\alpha + Ey_\alpha)f_0 + Ff_0^2 \quad (9)$$

に期待値 0、分散同一の独立な正規分布に従う誤差が加わるとみなすことになる。しかし、誤差は画像の不正確さに起因するので、各点 (x_α, y_α) の x, y 座標に期待値 0、分散一定の誤差が加わるとみなすほうが自然である。そこで直線の場合と同様に、各点の誤差がない場合の位置 (真値) を $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ として次のように置く。

$$x_\alpha = \bar{x}_\alpha + \epsilon_\alpha, \quad y_\alpha = \bar{y}_\alpha + \eta_\alpha \quad (10)$$

そして $\epsilon_\alpha, \eta_\alpha$ を期待値 0、分散 σ^2 の独立な確率変数とみなす。上式を式 (9) に代入して展開すると、真値 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ に対しては式 (9) が 0 であるから次のようになる。

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha) = 2(A\bar{x}_\alpha + B\bar{y}_\alpha + Df_0)\epsilon_\alpha + 2(B\bar{x}_\alpha + C\bar{y}_\alpha + Ef_0)\eta_\alpha + \dots \quad (11)$$

ただし、 \dots は誤差の二次の項である。これを無視すれば、 $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ には期待値 0、分散

$$4((A\bar{x}_\alpha + B\bar{y}_\alpha + Df_0)^2 + (B\bar{x}_\alpha + C\bar{y}_\alpha + Ef_0)^2) \sigma^2 \quad (12)$$

の誤差が加わることになる^(注3)。これを \mathbf{u} を用いた形に直すと次のようになる。

$$4\sigma^2 (\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \mathbf{u}) \quad (13)$$

ただし、 6×6 行列 $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ を次のように置いた。

$$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \equiv \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{x}_\alpha^2 + \bar{y}_\alpha^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 \\ 0 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{y}_\alpha^2 & 0 & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 \\ f_0 \bar{x}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)$ に期待値 0、分散 $4\sigma^2 (\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \mathbf{u})$ の誤差が加わることは、 $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha) / \sqrt{4(\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \mathbf{u})}$ に期待値 0、分散 σ^2 の誤差が加わることに等しい。したがって、ガウスの最小二乗法の考え方によると、

$$J = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2}{(\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \quad (15)$$

(注2) 得られた解がだ円かどうかを判定するには $AC - B^2 > 0$ かどうかを調べればよい⁽⁷⁾。

(注3) 確率変数を c 倍すると、その分散は c^2 倍される。

を最小化しなければならない。この式を最小にするのが最尤推定 (maximum likelihood estimation) である。ただし、実際の計算では分母中の $V_0[\xi_\alpha]$ は式 (14) において、真値 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ をデータ (x_α, y_α) に置き換えたもので代用する。明らかに式 (15) は u を任意の定数倍しても変化しないから、解 u は正規化の仕方によらない。

注意すべきことは、式 (15) が前回⁽¹⁾の直線当てはめの最尤推定の式と同じ形をしていることである^(注4)。これは式 (6) が直線当てはめと同じ形をしているから当然である。このため、式 (15) を最小化するには直線の場合に紹介した Chojnacki ら⁽¹²⁾の FNS 法がそのまま使える。

6. 幾何学的解釈

式 (15) を最小化する最尤推定は、次のような幾何学的解釈が考えられる。 ξ_α は六次元空間中に与えられた N 個の点であり、 $(u, \xi) = 0$ はこの空間中の (超) 平面を表す。したがって、問題は u を調節してこの (超) 平面が N 点 ξ_α をなるべくよく通るようにすること、すなわち“六次元空間での (超) 平面当てはめ”とみなせる。このとき (超) 平面と各点 ξ_α の食い違いを普通の距離 (ユークリッド距離 (Euclidean distance)) で測るのではなく、誤差の出やすさを考慮した各点の共分散行列で重み付けしたマハラノビス距離 (Mahalanobis distance) で測る。点 ξ_α からのマハラノビス距離が一定の点の全体は点 ξ_α を中心とする (超) だ円面であり、誤差が出やすい方向に飛び出している (図 4)。

式で書くと、各点 ξ_α の誤差のない場合の値 (真値) を $\bar{\xi}_\alpha$ とし、 ξ_α の共分散行列を $V[\xi_\alpha]$ とすると、マハラノビス距離の二乗和は次のように表せる。

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V[\xi_\alpha]^{-1} (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (16)$$

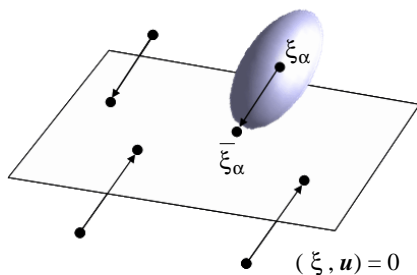


図 4 最尤推定の幾何学的意味 マハラノビス距離の二乗和を最小にするように超平面を当てはめる。

(注 4) 直線の場合は ξ_α が三次元ベクトル x_α であり、 $V_0[\xi_\alpha]$ が 3×3 行列 $V_0[x_\alpha]$ であった。

ただし $(\cdot)_5^{-1}$ はランク 5 の一般逆行列^(注5)を表す。問題は式 (16) を制約条件 $(u, \bar{\xi}_\alpha) = 0, \alpha = 1, \dots, N$ のもとで最小化することである。ラグランジュ乗数を用いて制約条件を消去すると、式 (16) は式 (15) において $V_0[\xi_\alpha]$ を $V[\xi_\alpha]$ に置き換えたものと一致する (導出省略)。このことから、式 (14) は、定数倍を除いてベクトル ξ_α の共分散行列であることが分かる。

7. Taubin 法

式 (15) を最小化する FNS 法の手順は前回⁽¹⁾に述べたが、これは反復解法であり、初期値が必要である。初期値を計算する最も簡単な方法は 4. に示した最小二乗法である。しかし、最小二乗法よりも精度が高い近似解法として Taubin 法が知られている。これは式 (15) の分母の共分散行列 $V_0[\xi_\alpha]$ をすべての点にわたる平均

$$N_{TB} \equiv \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N V_0[\xi_\alpha] \quad (17)$$

に置き換え、式 (15) を次の J_{TB} で近似するものである。

$$J_{TB} = \frac{N}{4} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha)^2}{(u, N_{TB}u)} = \frac{N}{4} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha \xi_\alpha^\top u)}{(u, N_{TB}u)} = \frac{N}{4} \frac{(u, M_{LS}u)}{(u, N_{TB}u)} \quad (18)$$

M_{LS} は式 (7) で定義した行列である。 J_{TB} は二次形式の比 (レイリー商 (Rayleigh quotient) と呼ばれる) であり、これを最小にする単位ベクトル u は一般固有値問題^(注6) (generalized eigenvalue problem)

$$M_{LS}u = \lambda N_{TB}u \quad (19)$$

の最小一般固有値に対する単位一般固有ベクトルとして計算できる⁽¹⁰⁾。しかし、式 (14) から分かるように、 $V_0[\xi_\alpha]$ は第 6 列及び第 6 行がすべて 0 の特異行列であり、したがって式 (17) の N_{TB} も特異行列である。ところが、通常の一般固有値問題のライブラリプログラムでは右辺の行列 N_{TB} は正値対称行列^(注7)であると仮定されている。そこで次のように工夫する。まず $\xi_\alpha, u, V_0[\xi_\alpha]$ を次のように分解する。

(注 5) スペクトル (固有値) 分解し、大きい 5 個の固有値を逆数に置き換え、残りを 0 としたもの⁽⁸⁾。前報⁽¹⁾。

(注 6) 式 (19) の N_{TB} が単位行列のときが普通の固有値問題である。それ以外の場合を一般固有値問題といい、 λ を一般固有値、 u を一般固有ベクトルと呼ぶ。

(注 7) 固有値がすべて正の対称行列。A が正値対称行列なら任意の 0 でないベクトル x に対して $(x, Ax) > 0$ となる⁽⁸⁾。

$$\xi_\alpha = \begin{pmatrix} z_\alpha \\ f_0^2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} v \\ F \end{pmatrix}$$

$$V_0[\xi_\alpha] = \begin{pmatrix} V_0[z_\alpha] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

そして、 5×5 行列 \tilde{M}_{LS} , \tilde{N}_{TB} を次のように置く。

$$\tilde{M}_{LS} \equiv \sum_{\alpha=1}^N \tilde{z}_\alpha \tilde{z}_\alpha^\top, \quad \tilde{N}_{TB} \equiv \sum_{\alpha=1}^N V_0[z_\alpha] \quad (21)$$

ただし、次のように置いた。

$$\tilde{z}_\alpha \equiv z_\alpha - \bar{z}_\alpha, \quad \bar{z} \equiv \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N z_\alpha \quad (22)$$

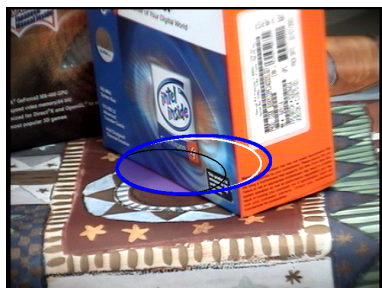
こうすると、式(19)は次のように二つの式に分解される。

$$\tilde{M}_{LS} v = \lambda \tilde{N}_{TB} v, \quad (v, \bar{z}) + f_0^2 F = 0 \quad (23)$$

この第1式は式(19)より次元が一つ低い一般固有値問題である。この \tilde{N}_{TB} は正値対称行列であり、通常のライブラリプログラムで解くことができる。こうして求めた v を第2式に代入すれば残りの未知数 F が求まる。実験的比較によれば、Taubin法は最小二乗法よりはるかに精度が高く、最ゆう推定に近い精度を持つことが知られている(図5)



(a) 円形物体を含む画像から検出したエッジ画像



(b) だ円弧を抽出して当てはめただ円を原画像上に重ねて表示したもの

図5 だ円当てはめの例 細線は最小二乗法、白線は Taubin 法、太線は最ゆう推定解(文献(11)より)

Taubin 法という名称は点データに代数方程式を当てはめる方法を示した Taubin⁽¹³⁾ に由来している。彼は共分散行列などの誤差の統計的性質は考慮しなかったが、考え方が似ているので Taubin 法という名称が広がった。しかし、このように個々の共分散行列を平均値で置き換える手法は我が国で 1990 年代に田川ら^{(14)–(16)} によって、オプティカルフローからの三次元復元において既に提唱されていた。

8. 精度の理論限界

だ円当てはめにおいても、直線の場合と同様に、当てはめただ円の信頼性を評価することは重要である。これは当てはめただ円から撮影したカメラ位置を計算して、ロボットを制御するような応用で特に必要になる。しかし、だ円当てはめの定式化は直線当てはめと同じ理論構造をしているので、前回⁽¹⁾の直線の信頼性評価と全く同じ定式化ができる。

だ円のパラメータ u は単位ベクトルであるから、その微小変化は u に直交する方向に生じる。そこで、計算値 \hat{u} の誤差 Δu を、 \hat{u} の u に直交する方向の大きさで測る(図6)。そして \hat{u} の信頼性を次の共分散行列で評価する。

$$V[\hat{u}] = E[\Delta u \Delta u^\top] \quad (24)$$

ここに $E[\cdot]$ は誤差分布に関する期待値を表す。直線の場合と同様に、この共分散行列には次の理論限界(KCR下界(KCR lower bound))が存在する。

$$V[\hat{u}] \succ 4\sigma^2 \bar{M}_5^- \quad (25)$$

ただし、 \succ は左辺引く右辺が半正値対称行列^(注8)であることを表し、 σ^2 は各データ点の座標に加わる誤差の

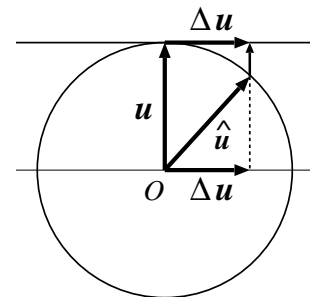
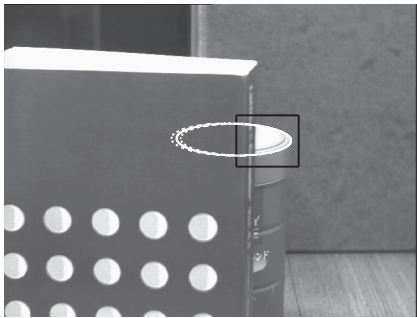
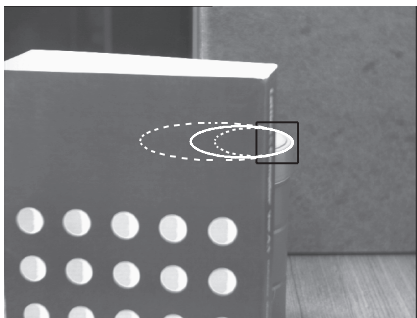


図6 推定値の精度の評価 u の計算値 \hat{u} の誤差を u に垂直な平面に射影して Δu で測る。

(注8) 固有値がすべて非負の対称行列。 A が半正値対称行列なら任意のベクトル x に対して $(x, Ax) \geq 0$ となる⁽⁸⁾。



(a)



(b)

図 7 だ円当てはめの信頼性評価 実線：当てはめただ円．破線：信頼性を表す不確定性の幅．当てはめるだ円弧が長ければ信頼性が高いが（左），だ円弧が短いと信頼性が急速に低下する（右）（文献（9）より）

分散である．そして， \bar{M} は次の行列である．

$$\bar{M} \equiv \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_{\alpha} \bar{\xi}_{\alpha}^T}{(\mathbf{u}, V_0[\bar{\xi}_{\alpha}] \mathbf{u})} \quad (26)$$

ここに $\bar{\xi}_{\alpha}$ 及び $V_0[\bar{\xi}_{\alpha}]$ は ξ_{α} 及び $V_0[\xi_{\alpha}]$ を (x_{α}, y_{α}) と \mathbf{u} の真値を用いて計算した値である．

直線の場合と同様に，最ゆう推定を行えば，式（25）が $O(\sigma^4)$ を除いて等号で成立する．このことから，KCR 下界を用いて最ゆう推定で当てはめただ円の信頼性が評価できる．図 7 は円筒物体の上面の縁のだ円弧（黒枠内の部分）を抽出してそれにだ円を当てはめ，その両側に不確定性の標準偏差に相当する不確定性を表示したものである（文献（9）より）．このように，当てはめる弧が短いほど当てはめただ円の信頼性が低下する．

9. むすび

今回は与えられた点列にだ円を当てはめる問題を取り上げ，最ゆう推定の考え方，最小二乗法や Taubin 法の計算の仕方，当てはめただ円の信頼性評価の仕方を説明した．次回は 2 画像間の対応点から基礎行列を計算する問題を取り上げて，その最適化手法について解説する．

文 献

- (1) 菅谷保之，金谷健一，“画像の三次元理解のための最適化計算 [I] —直線の当てはめ—”，信学誌，vol.92，no.3，pp.229–233，March 2009.
- (2) K. Kanatani, Geometric Computation for Machine Vision, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- (3) 新編画像処理ハンドブック，高木 幹雄，下田 陽久（監修），東京大学出版会，2004.
- (4) 岡部光生，金谷健一，太田直哉，“楕円成長法による円形物体の自動検出”，信学論（D-II），vol.J85-D-II，no.12，pp.1823–1831，Dec. 2002.
- (5) 菅谷保之，福山治樹，“エッジセグメントの分割と統合による楕円検出” 第 14 回画像センシングシンポジウム（SSII08）講演論文集，IN1-14，pp.1–6，June 2008.
- (6) A. Fitzgibbon, M. Pilu and P. B. Fisher, “Direct least square fitting of ellipses,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.21, no.5, pp.476–480, May 1999.
- (7) 金谷健一，形状CADと図形の数学，共立出版，1998.
- (8) 金谷健一，これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—，共立出版，2005.
- (9) Y. Kanazawa and K. Kanatani, “Optimal conic fitting and reliability evaluation,” IEICE Trans. Inf. & Syst., vol.E79-D, no.9, pp.1323–1328, Sept. 1996.
- (10) K. Kanatani, Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, 2005.
- (11) 山田純平，菅谷保之，金谷健一，“楕円当てはめの高精度計算法とその性能評価”，情処学研報，no.2006-CVIM-154-36，pp.339–346，May 2006.
- (12) W. Chojnacki, M.J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, “On the fitting of surfaces to data with covariances,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.22, no.11, pp.1294–1303, Nov. 2000.
- (13) G. Taubin, “Estimation of planar curves, surfaces and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.13, no.11, pp.1115–1138, Nov. 1991.
- (14) N. Tagawa, T. Toriu, and T. Endoh, “Un-biased linear algorithm for recovering three-dimensional motion from optical flow,” IEICE Trans. Inf. & Syst., vol.E76-D, no.10, pp.1263–1275, Oct. 1993.
- (15) N. Tagawa, T. Toriu, and T. Endoh, “Estimation of 3-D motion from optical flow with unbiased objective function,” IEICE Trans. Inf. & Syst., vol.E77-D, no.10, pp.1148–1161, Oct. 1994.
- (16) N. Tagawa, T. Toriu, and T. Endoh, “3-D motion estimation from optical flow with low computational cost and small variance,” IEICE Trans. Inf. & Syst., vol.E79-D, no.3, pp.230–241, March 1996.

（平成 20 年 10 月 29 日受付 平成 20 年 11 月 17 日最終受付）

すがや やすゆき

菅谷 保之（正員）

平 8 筑波大・第三学群・情報学類卒．平 13 同大学院博士課程了．博士（工学）．岡山大・工・助手を経て，現在，豊橋技科大・情報工学系・講師．画像処理，コンピュータビジョンの研究に従事．



かなたに けんいち

金谷 健一（正員）

昭 47 東大・工・計数（数理工学）卒．昭 54 同大学院博士課程了．工博．群馬大・工・情報・教授を経て，現在，岡山大大学院自然科学研究科教授．IEEE フェロー．コンピュータビジョンの数理解析に従事．

