

確率統計を学ぶにあたって

金谷健一

岡山大学工学部情報系学科

1 確率統計は大学の一番難しい科目？

私の知っている人で（中には大学の理科系の先生もいる）、確率統計は習ったがよく分からないという人が多い。私自身もそうであった。大学で確率統計を習ったが（私の場合は3年次であった）、まったく分からなかった。期末試験のためにいろいろな本を読んだが、どうしても理解できない。個々の例題の計算の仕方の説明を読めば、そのやり方は分かるし、導出も書いてあるので、そのようになるのだということに疑いは起きない。しかし、どうしても「分かった」という気にならない。自分の頭で考えることができない。そのため覚えられないのである。

大学に入ると難しい科目をいろいろ学ぶ。特に1年次の解析学（微分積分学）と線形代数学（ベクトルと行列）を学んだときは、あまりに抽象的な記述に愕然とした記憶がある。しかし、その後、物理学（古典力学、電磁気学、量子力学など）やさまざまな工学応用（材料・流体力学、電気回路、制御、信号処理、数理計画など）を学ぶにつれ、現実世界がどのように微分、積分、ベクトル、行列で記述されるかが分かり、解析学や線形代数学が要するに何を理論化しているのかが理解できるようになった¹。一口でいえば、解析学や線形代数学は、この現実世界で成り立つことを理想化し、一般化し、体系化しているのである。

しかし、確率統計は全然違う。なぜ理解できないのか、私とその理由を悟ったのは何年も経って、大学の教員になって確率統計を部分的に含む専門的な研究を行うようになってからである。振り返ってみると確率統計は大学の一番難しい科目であると言っても過言ではない。

確率統計は日本中のほぼすべての大学で教えられているはずである。その結果、ほぼすべての大学で「確率統計が分からない」という学生が毎年大量に生まれているであろう。そのため、書店では確率統計の新しい教科書が次々と売り出されている。そして「やさしい...」、「よく分かる...」、「絶対に分かる...」、「猿でも分かる...」、「もう悩まない...」のようなタイトルを見ると、いかに学生にとって理解不可能であるかが想像できる。問題はそれらの本を読んでも少しも分かるようにならないことである。

以前に私が書いた本の読者から、「いろいろな教科書を読んだがどうしても確率統計が分からない」というコメントを頂いたことがある。そして、私が返事を書いた結果、「そうでしたか、確率統計が分からない理由がよく分かりました。そのようなことはどの本にも書いてありませんでした」と納得された。要するに市販の「確率統計」の教科書の著者は内容を分からせようと焦るあまり、最も重要なことを書いていないのである。

2 確率現象は存在しない？

結論を先に言うと、確率統計が分からない最大の理由は、現実世界には「確率現象は存在しない」ということを十分に理解していないためである。確率統計は「存在しないことを学び、研究

¹これについては以前に線形代数について感想を書いたことがある。
金谷健一、線形代数の3つの観点、数学セミナー、Vo. 28, No. 12/337 (1989), p.4.
<http://www.suri.cs.okayama-u.ac.jp/~kanatani/papers/mathseminar89.pdf>

する学問」である。要するに「虚構」であり、極端に言えば「嘘」である。他の教科は「科学」であり、現実世界で成立する「法則」を調べるものである。そのような法則を利用して機械は動き、新幹線が走り、飛行機は飛び、人工衛星が打ち上げられる。それに対して確率統計は現実にはあり得ない「非現実世界」で成り立つ法則を調べるものである。その世界では物理法則もそれに基づく因果関係も存在しない。ただ物事が確率的にのみ生起する仮想世界である。

確率統計で最初に取り上げられ、例題として最もよく使われるサイコロを考えよう。サイコロの目がどう出るかは最初のサイコロの持ち方とその振り方によって決まる。そこには何の偶然性もない。ただし、その因果関係はあまりにも複雑なので、結果を予想するのはほぼ不可能である。理論的には同じ持ち方をして、同じように振れば同じ結果が出るはずである。振動や風が起きないように管理された精密な「サイコロ振り機械」を作ればこれは可能であろうが、人間が普通の環境では行うのは無理である。このような予測しにくいこと、制御しにくいことを「偶然である」とみなすのが確率統計の出発点である。

これはサイコロだけではない。トランプや壺からの球の取り出しでも同じであり、結果は初期のトランプや球の配置と引き方や取り出し方で一意的に決まる。しかし、非常に制御しにくいので偶然現象とみなす。受験産業ではセンター試験の得点分布を確率分布とみなして希望大学へ合格する確率を計算したりする。勉強すれば成績が向上して大学に合格できるはずであるが、体調不良になるかもしれないし、よく知っていることを思い違いをするかもしれない。完全に結果を予測できないから、便宜上、偶然現象とみなす。交通事故もわき見とか飲酒とか、必ず原因があるが、人によって違うので、警察や保険会社は偶然現象とみなして事故確率を計算する。

このように言うと、学識のある人は量子力学があるではないかと反論するであろう。現代物理学では素粒子の崩壊は完全な確率現象であり、素粒子の位置や速度は「観測しない限り」不確定で確率的にしか記述できない²。物理学者や数学者の中には、これは現代物理学が不十分なためであり、将来は不確定性のない法則が発見されるであろうと预言する人もいるが、そのような議論には立ち入らない。一方、物質中の分子の挙動を計算する「統計力学」という学問がある。分子は 10^{23} のオーダーの個数あり、個々の分子を支配する物理法則から集団全体の挙動を解析することは実際問題として不可能である³。そこで個々の分子の挙動は確率的であると仮定して、確率論によって平均的な挙動を計算する⁴。しかし、分子の数が非常に多いので、通常の状態⁵では測定装置による測定結果と統計力学による計算結果は完全に一致し、統計力学の計算は「物理法則」であるといえる。

ここでいう「現実世界」とはそのようなミクロな素粒子の量子力学や物質内の分子の世界ではなく、人間が実際に生活するマクロな世界である。そのよう現実世界では確率現象は原理的には存在しない。このようなマクロな世界で確率現象でないことがわかっている現象を確率的とみなすのが確率統計という学問である。

3 確率統計は「創作科学」?

それでは嘘だとわかっていることをなぜ研究するのであるだろうか。それはこの現実世界を簡単な手段で近似するためである。まず仮想世界ではどうなるかを計算し、次にそれを現実世界に対応させる。完全に対応させることはできないが、それが有益かどうかはその問題とその目的とによる。

²これについては朝永振一郎の「光子の裁判」という記事が有名である。以下の本にある。

朝永振一郎「鏡の中の物理学」、講談社学術文庫、講談社 1976。

朝永振一郎「量子力学と私」、岩波文庫、岩波書店 1997。

朝永振一郎「量子力学的世界像（新装版）」、朝永振一郎著作集 8、みすず書房 2001。

³電子や分子の挙動を利用して、絶対に制御できない、絶対に予測できない理想的なサイコロ振り機械（「乱数発生器」と呼ぶ）を作る試みもある。一方、最新のスーパーコンピューターを使って分子の集団の挙動を実際に計算してみようとする人々もいる。

⁴このように考えて統計力学を樹立したのはオーストリアの物理学者ボルツマン (Ludwig Eduard Boltzmann, 1844-1906) であった。しかし、彼の考えは当時の物理学者からは激しい批判を受けた。

⁵例外は著しく希薄な気体や著しく低温のような何らかの極限状態である。

私の専門は画像処理であり、画像から計算機によって抽出したデータの確率分布やそのデータから計算した結果の信頼性を計算したりする。計算機による画像処理は IF ... THEN ... ELSE ... のようなプログラムで書かれ、何の偶然性もない。すべてが確定的であり、同じ画像を何回繰り返して処理しても結果は常に同じである。ではなぜ確率分布など考えられるのであろうか。それは画像処理のアルゴリズムは、非常に巧妙に作られてはいるが、結局は画像のカラー値に四則演算を施しているだけであり、本当に望ましい結果（画像中の人物を抽出したい、画像中の車体の位置を知りたい、建物までの距離を知りたい、など）になっているとは限らない。その正しさはその画像による。しかし、この画像では結果は正しいであろう、この画像では正しくないかもしれない、というような判断を個別に行うのは難しいので、抽出したデータはその真の値の周りにある確率分布をしていると仮定して、最終結果の信頼性を計算する。これは「確率現象でないかわかっているものを確率的とみなす」典型的な例であり、そのような人為的な嘘を工学的には「モデル」と呼ぶ。例えば一様分布を仮定する「一様分布モデル」、正規分布を仮定する「正規分布モデル」などが代表的である。しかし、ミクロな世界の統計力学とは異なり、計算結果は実際の状況に合うとは限らない。あるモデルに基づいて計算した結果が実際とよく合えば、そのモデルは「よいモデル」であるといい、合わなければ「不適切なモデル」であるという。

確率統計は「小説」のようなものであるとも言える。小説は創作であり、書かれていることが嘘であること誰でも知っている。しかし、「よい小説」は現実をよく映し出していて、人はそれから人生を学び、社会に対する判断力を得ることができる。この意味で確率統計は「創作科学」であるということが出来る。

4 確率世界と現実世界の対応

確率法則が成り立つ仮想世界（モデル）を考えるのは、それによって現実世界を近似するためであるが、それでは確率世界と現実世界とをどう対応づけるのであろうか。実はこれはあいまいなのである。例えばサイコロを振ったとき「1の目が出る確率が1/6である」ということは現実世界では何を意味するのであろうか。サイコロを振ると6回に1回は1の目が出るということではない。これは「1の目が出る可能性が1/6である」という意味であり、実際に出る目とは無関係である。これを現実世界と対応させるのは「確率が適切に定義されていれば、確率の高いことが実際に起こるのであろう、確率の低いことは実際には起こらないであろう」という期待である。例えばサイコロを100回振って1の目が100回連続して出る確率は $1/6^{100}$ である。しかし、これは小さい値だからたぶん起きないであろうと期待する。一方、100回中に1の目が20回出る確率は大きいからそういうことも起きやすいと期待する。もし期待と異なることがよく起きれば、それは確率の定義の仕方が適切でなかったと判断される。

ところでサイコロの1の目が2回続けて出る確率はなぜ $1/6 \times 1/6 = 1/36$ （積の法則）で計算されるのであろうか。実はこれは数学的な約束であり、「確率の公理」と呼ばれる。公理とは数学的な一貫性が保たれ、矛盾が生じないように定めた約束であり、何かから導いたり証明したりするものではない。しかし、そのように決めることが「妥当」かどうかは、それがいろいろな状況に当てはまるかどうかで確認できる。どんなに数学的に一貫して矛盾がなくても、それが当てはまるような状況がほとんどないような公理は定義しても意味がないからである。サイコロの場合は1, ..., 6の目が出る可能性がどれも等しく1/6であるとき、二つの目の組み合わせは(1,1), (1,2), ..., (6,6)の36通りあり、どれも等しい可能性があると考えれば確率は1/36となり、積の法則が妥当であることが確認できる。

このように確率を計算するルールは公理による約束であり、現実世界の発生の仕方とは無関係である⁶。そして、ある出来事（「事象」と呼ぶ）のルールに従って計算した確率が実際の起き方

⁶確率論を現実世界の問題とは独立に公理のみに基づく数学として定式化したのはロシアの数学者のコルモゴロフ (Andrey Nikolaevich Kolmogorov, 1903–1987) である。

A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Publishing, New York, U.S.A., 1956.

によく合えば、その出来事は「確率事象」であるとみなし、合わない場合は、「確率事象」ではないと判断する。例えば、いかさま詐欺師が振ったサイコロの目の出方が公理に基いて計算した確率と全然合わない場合は、そのサイコロ振りは確率事象ではなく、何らかの操作が加わっていると判断する。このように、確率世界は現実世界とは無関係に、それ自身で独立に数学的に定義されるものである。これを「数学的虚構」と言ってもよい。現実世界との対応は後で我々が判断するものである。

5 統計は確率とどう違うのか

「確率統計」とは「確率論と統計学」を縮めた言葉であり、確率論と統計学はやや異なる学問である。確率論は確率が与えられた仮想世界の現象を計算する。例えば、サイコロのどの目も等しい確率 $1/6$ でランダムに出る世界を考えたとき、いくつかの目の組み合わせの出る確率や、何回か振ったときの特定の結果の出る回数の確率や、出る目によって決まる値の期待値を計算したりする。さらに一般的に、一様分布、正規分布、その他 分布と名前をついた確率分布によって物事が発生する仮想的な世界での特定の結果（事象）が起こる確率やそれに付随する値の期待値を計算したりする。要するに確率論とは基礎となる確率が既に与えられている仮想世界で計算を行う学問である。

それに対して統計学とは単純化すれば、「実際に生じた結果を見て」基礎となる確率を推定する学問であるといえる。これは確率論を基礎にしたのでは原理的に不可能である。この不可能なことを行なおうとすることこそ、統計学が学生を混乱させる根本原因である。例えばサイコロを 6000 回振って、1, ..., 6 が出た回数が 5012 回, 93 回, ... と出たら、1, ..., 6 の出る確率 p_1, \dots, p_6 を $p_1 = \dots = p_6 = 1/6$ としてはいけないのであろうか。いけないなら、その根拠は何であろうか。確率論からは何も断定できないはずである。なぜなら、確率的とはいえ、どんな結果でも生じ得るからである。例えば 1 の目が $1/6$ で発生する仮想世界では、1 の目が連続して 100 回出る確率は $1/6^{100}$ であり、確率が小さいとはいえ、そのような可能性があるからである⁷。

このように確率を定めることや結果の妥当性を判断することは確率論の立場からはできない。確率論から行えるのは確率を与えたときにそれを用いて計算することだけである。このことから「統計学」という別の学問が必要となった。それでは統計学ではどうするかというと、ある程度小さい確率の現象が起きたら、「それはおかしい」と約束するのである。その限界の確率も約束で決める。それらの約束は、それに従えば現実世界で不自然でないように定める⁸。要するに、確率論は「計算」の世界であるのに対して、統計学は「約束事」の世界である。統計学の約束事は非常に手が込んだ複雑なものであり、それに従って薬の臨床試験からその薬が効くか効かないかを判定したり、受験生に過去の模試の点数から A 大学は無理だから B 大学を受験したほうがよいと判定したりする。私が学生のときのことを振り返ると、計算を行うことは問題なくても、約束事を覚えることが非常に負担であり、結局身につかなかった最大の原因であったと思える。

6 確率の解釈をめぐる論争

統計学者の間には今日でも「確率」どう解釈するかをめぐる論争がある。確率は 18 世紀末に数学者のラプラス (Pierre-Simon Laplace, 1749–1827) によって初めて考え出され、その発端は賭

坂本實訳「確率論の基礎概念」、筑摩書房 2010。

⁷ 「鶴は千年、亀は万年」ということわざがあり、落語に、ある人が必ず万年生きると言われて買った亀が翌日死んで、売った人に文句を言うと、その日がちょうど 1 万年目であったと言われた。これに反論できるであろうか。

⁸ 確率論の現実の問題への応用という意味での統計学を確立したのは英国の数学者フィッシャー (R. E. Fisher, 1980–1962) である。

R. E. Fisher, *Statistical Methods for Researchers*, Oliver & Boyd, London, 1925.

遠藤健児、鍋谷清治訳「研究者のための統計的方法」、森北出版、1970。

その方法論は日本では「推計学」とも呼ばれていた。

けのもうけの計算だったということである．このときから既に確率の解釈に対する論争が始まっていたといわれる．現在でも，確率は現実を近似する理想化であるという点では統計学者は一致しているが、「ベイズ主義者」と呼ばれる人達⁹はそれを一歩進めて，確率は人間の頭の中に存在する一種の心理状態，あるいは判断基準であると考えている．その立場に立てば，例えば「明日は雨が振りそうだ」と考えるとき，非常にそう確信するか，そうかも知れないと思う程度かを数量化したものが確率であるということになる．それに対して，そのような「人間の主観」が入り込むのを反対する人は「非ベイズ主義者」と呼ばれ，確率とは何らかの多数の実験データから推測されるものでなければならないと主張する¹⁰．

ベイズ主義者と非ベイズ主義者の論争は長く，激しく，多くの論文や書物が出版された¹¹．この論争は今日でも完全に決着していないが，「ベイズ主義者」の主張は論理的に首尾一貫していることが確認されている．それに対して，ベイズ主義者は誤りであると論じる非ベイズ主義者の論理は必ずどこかで破綻することが分かってきた．もちろんこのことはベイズ主義者が正しいという証明にはならない．しかし，最近ではベイズ主義者の考えに基づく推論の方式が人工知能や画像処理や機械学習などの多くの工学問題に適用され，非常に便利で有用なツールを生み出している．

日本の大学の初学年で学ぶ確率統計の入門教科書はほとんどすべて非ベイズ主義者の立場から書かれ，授業もそれに沿って行われている¹²．しかし，学生はそのことをあまり気にする必要はない．ベイズ主義者は非ベイズ主義者を「確率論を狭くとらえすぎている」と批判し，非ベイズ主義者にはベイズ主義者の主張（「ベイズ統計学」と呼ばれている）が確率論をあまりに拡大解釈しているように見える．しかし，入門者はまず確率論を狭くとらえ，後に必要に応じて（例えば人工知能，画像処理，機械学習などの応用で）その考え拡張していけばよい．

7 まとめ

大学での勉強は高校時代とは違って，教わったことをただ覚えてその通りにするというのでは通用しない．まず内容が多すぎて覚えられない．そうでなく自分の頭で考えて，自分で納得することが重要である．覚え切れないことは後で本を見ればよい．これはどの科目の先生も力説することである．

しかし，そのようにしようとすると確率統計では途端に壁に突き当たる．というのは，真剣に考えれば考えるほど納得できないようなことが多いからである．私自身もそのような経験をした．私がこの記事を書くのは学生に「それは当然であるから心配しなくてもよい」と言いたいからである．ここに書いたように，確率統計には複雑な背景があり，なかなか普通の常識が通用しない．何より，確率統計は人為的な創作科学であり，現実世界とは直接には結びついていないことを理解しなければならない．そうでないと疑問だらけになる．これが他の科目との最大の相違点であり，これをわきまえて確率統計を学んでほしい．

何も知らない学生は，確率統計を学ぶ目的はただ確率の計算方法や統計的解析の手順を覚えることであると誤解しがちである．そうではなく，確率統計の学習目的は，現実世界とは距離を置いた抽象的な思考ができるようになることである．これができるようになれば，今後の専門課程において工学のさまざまな問題に取り組むときに非常に役立つであろう．なぜなら，抽象的な思考はあらゆる工学分野の学問の基礎であるからである．

⁹推論に確率論の「ベイズの定理」をよく利用することからそう呼ばれるようになった．

¹⁰この立場に立つと，例えば「火星に生物が存在する確率」は定義できない．なぜなら多数の実験データから存在しないからである．

¹¹非ベイズ主義者の古典的な教科書は

W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1, 1950, Vol. 2, 1966, Wiley, New York, U.S.A. (河田龍夫監訳「確率論とその応用」上, 1960, 下 1961, 紀伊國屋書店)

である．ベイズ主義者の主張は現在は

E. T. Jaynes, *Probability Theory: The Logic of Science*, Cambridge University Press, 2003, Cambridge, U.K.

が多くの工学者に読まれている．

¹²それに対して米国では，ベイズ主義者の立場から学び始めることが多い．

