

# 形状CADと図形の数学 [増補資料]

金谷健一 / 著

2017.6.25

## 増補資料まえがき

コンピュータによって画像や図形を処理するコンピュータビジョン，コンピュータグラフィクス，CADなどを実践するには，2次元，3次元空間のベクトル解析の知識が不可欠である。しかし，情報系の学生向けのよいベクトル解析の教科書がほとんど存在しない。それは，歴史的にベクトル解析は電磁気学，流体力学などの物理学の記述のために発展した学問だからである。そのため，市販のベクトル解析の教科書のほとんどは，ページの大半が微分演算子（発散，回転など）や積分定理（ガウスの発散定理，ストークスの定理など）に費やされ，図形の処理に関する記述は少ない。このような教科書が情報系の学生には向いていないことは，本書の初版まえがきでも述べた。そして，本書が情報系の学生向けのベクトル解析のほとんど唯一の書物であることから，本書がいくつかの大学で情報系の授業の教科書として用いられてきた。

しかし，本書を教科書として用いるには問題がある。それは，本書が1998年に工系数学講座の1分冊として発行されたとき，これを教科書として用いることを想定していなかったためである。このシリーズは，伊理正夫東大教授（当時）を始めとする編集委員が本書の冒頭で述べているように，一通り数学を学んだ学生の知識の再確認と，数学への関心を高めることを主眼としていた。本書もその方針で書かれ，図形のコンピュータによる計算処理を目指しながら，数学の面白さを強調し，やや高度な内容もくだけて説明している。また，ほとんどの命題や定理の証明は本文中では省いているが，各章末の「練習問題」とし，巻末の「解答」という形で詳細に示している。その結果，初版まえがき書いたように，教科書とハンドブックや事典との中間のような形となっている。

この増補資料は，本書が学部レベルでの教科書として，より利用しやすいように，本書み補足を加えたものである。まず第0章「序論」を挿入し，初学者はとりあえずこれさえ学べばよいという各章の「ポイント」を示し，どちらかといえば数学愛好者向けのより高度な事項を「さらにも学びたい人に」として，両者を区別した。そして，本書全体の内容の理解を助けるために，新たに二つの章を追加した。

まず，第6章「画像の変換: テクスチャマッピング，プロジェクションマッピング，モザイク生成」において，CAD，コンピュータグラフィクスへの親しみやすい応用を示す。これによって，本書のベクトル解析，アフィン変換，射影変換などの幾何学的概念の意味がよく理解できるであろう。本章を読むのに画像処理やコンピュータグラフィクスの知識は不要であり，逆に，本章によって画像処理の基礎やコンピュータグラフィクスの原理に触れることができる。最後に，第7章「変換群と幾何学」において，本書に現れるさまざまな変換や幾何学の数学的な関係や構造を整理する。また，誤差のあ

るデータから各種の変換を数知的に計算する方法を示す。

各章末に、その章の「要約」を列挙し、本文の要点を、数式を使わずに直観的なことばでまとめている（厳密な定義は本文中で与えている）。そして、時間が限定された半期、または通年の学部レベルの授業では立ち入る必要がない、大学院レベル、あるいは数学愛好者向けの“栄養過剰”な内容の節に※をつけて区別した。本文中ではいろいろな事項が入り混じっていて雑然とした印象を与えるが、この要約を読めば、各章のねらいが一目瞭然になるであろう。さらに、各章末に、読者の興味を引くと思われる、内容に関連した話題や文献を「雑談」として書いた。これはどちらかというと数学愛好者向けであるから、初学者は読み飛ばして頂ければよい。

これらの増補によって、本書が情報系の学部レベルの教科書としてより広く活用され、コンピュータビジョン、コンピュータグラフィクス、CADの学習の助けになることを期待している。

2017年6月

金谷健一

# 目次

<b>第0章 序論</b>	<b>7</b>
0.1 第1章「平面幾何学」のポイント	7
0.2 第2章「空間幾何学」のポイント	8
0.3 第3章「曲面の幾何学」のポイント	9
0.4 第4章「投影の幾何学」のポイント	9
0.5 第5章「射影幾何学」のポイント	10
0.6 第6章「画像の変換: テクスチャマッピング, プロジェクションマッピング, モザイク生成」のポイント	11
0.7 第7章「変換群と幾何学」のポイント	12
<b>第1章 平面幾何学 [要約]</b>	<b>13</b>
1.1 平面ベクトル	13
1.2 平面上の射影と回転	13
1.3 平面上の直線	14
1.4 平面の座標変換*	14
1.5 平面上の曲線	14
1.6 曲線の曲率*	15
雑談	15
<b>第2章 空間幾何学 [要約]</b>	<b>16</b>
2.1 空間ベクトル	16
2.2 空間の射影と回転	16
2.3 空間の直線	17
2.4 空間の平面	17
2.5 空間の座標変換*	17
2.6 空間の曲線	17
2.7 曲線の曲率と捩率*	18
雑談	18

目次	5
<b>第3章 曲面の幾何学 [要約]</b>	<b>20</b>
3.1 曲面の表現	20
3.2 グラフ表現	20
3.3 局所表現	20
3.4 曲面の輪郭線*	21
3.5 陰表現	21
3.6 パラメータ表現	21
3.7 曲面の構造*	21
雑談	22
<b>第4章 投影の幾何学 [要約]</b>	<b>23</b>
4.1 投影とアスペクト	23
4.2 空間曲線のアスペクト	24
4.3 曲面の投影*	24
4.4 曲線の計算*	25
4.5 消去と終結式*	25
雑談	25
<b>第5章 射影幾何学 [要約]</b>	<b>27</b>
5.1 直線上の射影変換	27
5.2 直線の透視投影*	27
5.3 直線上の同次座標	27
5.4 平面上の射影変換	28
5.5 平面の透視投影*	28
5.6 平面上の同次座標	28
5.7 2次曲線*	29
5.8 平面上の極変換*	29
5.9 空間の射影変換*	30
5.10 空間の同次座標	30
5.11 2次曲面*	31
5.12 空間の極変換*	31
5.13 空間の透視投影*	32
雑談	32
<b>第6章 画像の変換: テクスチャマッピング, プロジェクションマッピング, モザイク生成</b>	<b>34</b>
6.1 重心座標	34

目次	6
6.2 三角形のアフィン変換 . . . . .	37
6.3 三角形の射影変換 . . . . .	40
6.4 四辺形の射影変換 . . . . .	42
第6章の要約 . . . . .	46
雑談 . . . . .	47
<b>第7章 変換群と幾何学</b>	<b>49</b>
7.1 変換群 . . . . .	49
7.2 ユークリッド変換 . . . . .	49
7.3 相似変換 . . . . .	51
7.4 アフィン変換 . . . . .	52
7.5 変換の計算 . . . . .	53
7.6 射影変換 . . . . .	56
7.7 変換群の構造 . . . . .	58
第7章の要約 . . . . .	61
雑談 . . . . .	63
<b>追加参考文献</b>	<b>65</b>
<b>練習問題解答</b>	<b>67</b>

## 第0章 序論

### あらまし

本書の記述は全編にわたって非常に簡潔ではあるが、かなり入門的な内容から高度に専門的な事項まで、百科事典的に配列されている。このための、初心者が独学したり、学部レベルの授業で学習するには内容が過剰である。そこで、本章では各章に対して、初学者はまずこれさえ学べばよいという「ポイント」をまとめ、「さらに学びたい人に」でより高度な内容の事項を列挙する。さらに、各章末には、これを理解すれば十分であるという内容を要約しているので、そちらも参照するとよい。これらによって本書は、入門的教科書としても、専門的参考書としても、目的に応じて利用しやすくなるであろう。なお、第1章、第2章は本書を通して基礎となるものであるが、以降の章はほぼ独立した内容であり、どの章からどの順序で読み進めてもよい。あるいは、百科事典的のように必要に応じて関心のある項目のみを参照してもよい。

### 0.1 第1章「平面幾何学」のポイント

平面上の点と直線の距離や、点から直線に下ろした垂線の足はベクトルの「内積」を用いて計算できる。また折れ線で囲まれた図形の面積はベクトルの「外積」を用いて計算できる。長さや面積は正または負の量となる。

ベクトルの回転や、指定した直線上への射影は「回転行列」、「射影行列」と呼ばれる行列を用いて計算できる。

直線は原点からの距離と単位法線ベクトルで指定できる。あるいは、その上の1点と単位方向ベクトルを指定してもよい。都合のよい表現を用いると、2直線の交点、2点を通る直線、点から直線までの距離が簡単に計算できる。

平面上の曲線は一つの方程式  $F(x, y) = 0$  で表してもよいし、パラメータ  $t$  を用いて  $(x(t), y(t))$  と表してもよい。曲線の接線や法線、指定した部分の長さや囲む面積を計算するには、それに都合のよい表現を用いる。

### さらに学びたい人に

点や直線は、固定した  $xy$  座標系に対して表現されているので、座標系を回転したり平行移動したりすると、それらの表現が変化する。その「座標変換」が平行移動のベクトルや回転の行列を用いて

表せる.

曲線と直線,あるいは曲線と曲線が接するとき,その接触の滑らかさが「接触の次数」で指定される.曲線の各点で最も次数の高い接触をする円をその点の「接触円」と呼び,その半径を「曲率半径」と呼ぶ.その逆数その点の「曲率」である.曲線を表す微分方程式は「フルネ・セレーの公式」と呼ばれ,各点の曲率のみによって表せる.したがって,各点の曲率が指定されると,曲線の形が一意的に定まる(「ブーケの公式」).

## 0.2 第2章「空間幾何学」のポイント

2次元ベクトルの内積はそのまま3次元空間に拡張されるが,2次元ベクトルの外積に相当するのは,3次元空間では「ベクトル積」と「スカラ三重積」という二つの演算である.3次元空間では3本のベクトルの相対的が向きが重要となり,「右手系」と「左手系」が区別される.これに伴い,体積も正または負の量となる.

3次元ベクトルの回転や,指定した直線上への射影は「回転行列」,「射影行列」と呼ばれる行列を用いて計算できる.

空間の直線や平面はベクトルを用いて指定できるが,その表現は一通りではない.点から平面までの距離,平面と直線の交線,3点を通る平面などの計算は,都合のよい表現を用いると簡単になる.

空間の曲線は,パラメータ  $t$  を用いて  $(x(t), y(t), z(t))$  の形に表せる.接線や指定した部分の長さなどはこれを微分,積分して計算される.

### さらに学びたい人に

点や直線や平面は,固定した  $xyz$  座標系に対して表現されているので,座標系を回転したり平行移動したりすると,それらの表現が変化する.その「座標変換」が平行移動のベクトルや回転の行列を用いて表せる.

曲線と平面,あるいは曲線と曲面が接するとき,その接触の滑らかさが「接触の次数」で指定される.曲線の各点で最も次数の高い接触をする平面をその点の「接触平面」と呼ぶ.接触平面上で接線と直交する「主法線」,および接線と主法線とに直交する「従法線」が定義される.接線,主法線,従法線は各点で「動標構」(「移動座標系」)と呼ばれる直交系を定義する.

接触平面上でその曲線と最も次数の高い接触をする円を「接触円」と呼び,その半径を「曲率半径」と呼ぶ.その逆数その点の「曲率」である.さらに,曲線に沿う動標構の方向変化を表す「捩率」が定義される.曲線を表す微分方程式は「フルネ・セレーの公式」と呼ばれ,各点の曲率と捩率のみによって表せる.したがって,各点の曲率と捩率が指定されると,曲線の形が一意的に定まる.

### 0.3 第3章「曲面の幾何学」のポイント

曲面は  $z = f(x, y)$  の形でも、一つの式  $F(x, y, z) = 0$  の形でも、パラメータを用いた式  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  の形でも表される。曲面の法線ベクトル、接平面、曲率、指定した部分の面積などは、それに都合のよい表現を用いて、微分、積分によって計算できる。

曲面の凹凸の程度は、各点で最も曲がり方が大きい方向とそれの直交する方向の曲率で指定される。その二つの曲率を「主曲率」と呼び、それらの平均を「平均曲率」、積を「全曲率」（「ガウス曲率」）と呼ぶ。曲面上の各点は、その全曲率の符号によって「楕円点」、「放物点」、「双曲点」に分類される。

#### さらに学びたい人に

曲面の「輪郭線」とは、曲面をある方向から眺めたときの視線と曲面の接点の全体である。輪郭線が凸の点は曲面の楕円点、輪郭線が凹の点は双曲点であり、輪郭線の変曲点は曲面の放物点である。

曲面がパラメータ（「曲面座標」）によって表されているとき、各曲面座標の方向の二つの接線ベクトルと、それに直交する法線ベクトルを基底とする「動標構」（「移動座標系」）が定義できる。その曲面に沿う変化は「構造方程式」（「ガウスの式」、「ワインガルテンの式」）と呼ぶ微分方程式で表せる。これは「クリストッフェルの記号」と呼ぶ記号を含んでいる。この記号を用いれば、曲面の2点を最短に結ぶ曲線（「測地線」）を定義する微分方程式や、曲面座標の導関数の間の恒等式（「ガウスの方程式」、「マイナルディ・コダッツィの方程式」）が得られる

### 0.4 第4章「投影の幾何学」のポイント

各点を、それと視点とを結ぶ視線と投影面との交点へ写像するのが「透視投影」であり、各点を、それを通る一定の方向の視線と投影面との交点へ写像するのが「平行投影」である。

3次元空間の図形を視点を移動しながら眺めて、いろいろな質的に異なる見え方が現れるとき、それぞれの見え方を「アスペクト」と呼ぶ。視点を自由に移動しても見え方に質的な変化がないとき、そのアスペクトは「構造安定」であるという。

無限に長い直線を透視投影すると、ある点で途切れて見える。その点を「消失点」と呼ぶ。無限に広い平面を透視投影すると、ある直線を境界として途切れて見える。その直線を「消失線」と呼ぶ。消失点も消失線も構造安定である。

滑らかな曲線も、ある方向から見ると「カusp」と呼ぶ角のある特異点が見える。滑らかな曲面の輪郭線は、凸の部分、変曲点、凹の部分、および尖った「カusp」と呼ばれる特異点が見える。これらはすべて構造安定である。

## さらに学びたい人に

ある見え方（アスペクト）は視点をある範囲内で自由に移動しても見え方に質的な変化がないとき、「余次元0」（または構造安定）であるといい、視点をある曲面上を自由に移動したときのみ見え方に質的な変化がないとき、「余次元1」であるという。視点をある曲線に沿って自由に移動したときのみ見え方に質的な変化がないとき、そのアスペクトは「余次元2」であるといい、視点をある位置から少しでも移動すると見え方に質的に変化するとき、「余次元3」であるという。

曲線のアスペクトは凸型の弧（余次元0）、変曲点（余次元1）、「カusp」（余次元1）、「ダブルカusp」（余次元2）に分類される。曲面の輪郭線も、見る方向によって凸型の弧（余次元0）、変曲点（余次元0）、カusp（余次元0）、「唇」（余次元1）、「くちばし」（余次元1）「つばめの尾」（余次元1）、「蝶」（余次元2）、「がちょう」（余次元2）、「かもめ」（余次元2）などのアスペクトが現れる。

曲面の方程式から輪郭線の式を導くには、変数を消去する。複数の多項式から変数を消去する組織的な方法は、「終結式」と呼ばれる式を導くことである。1変数の場合は「シルヴェスターの終結式」、 $\text{「ベズー・ケーリーの終結式」}$ 、2変数の場合は「ケーリー・ディクソンの終結式」が知られている。一般の多変数の消去には「グレブナー基底」の方法が知られている。

## 0.5 第5章「射影幾何学」のポイント

「1次元射影空間」、「2次元射影空間」、「3次元射影空間」はそれぞれ、直線、平面、空間に無限遠点を追加したものである。1次元、2次元、3次元射影空間の点の位置は、それぞれ2個、3個、4個の数の比で表すことができる。これを「同次座標」と呼び、分母が0となる点を無限遠点と解釈する。「射影変換」とは、同次座標に定数倍を含む線形変換を施すことである。平面上の射影変換によって正方形は一般の四辺形に写像され、空間の射影変換によって立方体は一般の四面体に写像される。射影変換は特別の場合として、平行移動、回転、スケール変化を含むので、同次座標を用いれば、平行移動、回転、スケール変化が同じ形の式で表せる。

視点を指定したとき、一つの直線または平面上の点を、その点と視点を通る視線の他の直線または平面との交点へ写像することを「透視投影」と呼ぶ。透視投影は直線から直線、および平面から平面への射影変換である。同一直線上の3点に「複比」と呼ぶ量を定義すると、射影変換によって複比は変化しない。

平面上の2次曲線は楕円、双曲線、放物線、および直線への退化を表す。どのような図形を表すかは、2次曲線の方程式の係数の作る $3 \times 3$ 行列の3個の固有値の符号によって分類される。射影変換しても、2次曲線は2次曲線に写像される。楕円、双曲線、放物線はそれぞれ、無限遠方の直線（「無限遠直線」）に交わらない、交わる、接する閉じた曲線と解釈される。

空間の2次曲面は楕円体、双曲面、放物面、および柱面や平面や直線への退化を表す。どのような図形を表すかは、2次曲面の方程式の係数の作る $4 \times 4$ 行列の4個の固有値の符号によって分類され

る。射影変換しても、2次曲面は2次曲面に写像される。柱面は無限に伸びた楕円体、平面は無限に広がった楕円体とみなせる。

### さらに学びたい人に

直線の両方向の無限遠方にある無限遠点を同一視するので、直線はイメージ的には“輪”になっている。平面も空間も、すべての直線の無限遠の両端を同一視するので、向かい合う無限遠方を張り合わせた“閉じた”空間と解釈できる。

直線上に、指定した3点を基準とする「射影座標」が複比によって定まる。一つの基準点（その射影座標は $\infty$ ）を無限遠方に遠ざけると、射影座標は普通の座標となる。平面上に、指定した4点を基準とする射影座標が複比によって定まる。二つの基準点（その射影座標は $(\infty, 0)$ ,  $(\infty, 0)$ ）を無限遠方に遠ざけると普通の座標系となる。空間に、指定した5点を基準とする射影座標が複比によって定まる。三つの基準点（その射影座標は $(\infty, 0, 0)$ ,  $(0, \infty, 0)$ ,  $(0, 0, \infty)$ ）を無限遠方に遠ざけると普通の座標系となる。直線上や平面上や空間のどの点も、指定する基準点を変えると射影座標が変わるが、その変化は射影変換であり、射影座標の分数式で表される

2次曲線や2次曲面の方程式を任意に与えると、それらを満たす点が存在しないことがあるが、仮想的にそれらを満たす虚数座標の点を考え、「虚の楕円」、「虚の直線」、「虚の楕円体」、「虚の平面」などの“虚”の図形を考える。そして、これらも2次曲線や2次曲面であるとみなす。これによって、2次曲線や2次曲面に関するさまざまな定理が例外なく記述できる。2次曲線を指定すると、すべての点に対して、その「極線」が定義され、すべての直線に対して、その「極点」が定義される。2次曲面を指定すると、すべての点に対して、その「極面」が定義され、すべての平面に対して、その「極点」が定義される。点や直線や平面に関する命題は「極点」 $\leftrightarrow$ 「極線」、「通る」 $\leftrightarrow$ 「上にある」の入れ換えを行っても成立する（「双対定理」）。

## 0.6 第6章「画像の変換: テクスチャマッピング, プロジェクションマッピング, モザイク生成」のポイント

平面上に3点を指定すると、各点の「重心座標」が定まる。これはその3点の作る三角形を分割する面積比を表し、その符号によって、各点はその三角形の内部か外部か、外部のときはどの辺のどちら側か判定できる。二つの三角形の各点を重心座標が等しい点に対応させる写像はアフィン変換である。平面上の三角形から三角形への射影変換は、重心が写像される点の重心座標によってパラメータ化される。これを用いれば、四辺形から四辺形への射影変換が定まる。

## さらに学びたい人に

3次元物体の表面を三角形パッチに分割し、それを投影した画像上の各パッチに図柄（テクスチャ）をアフィン変換で写像することにより、「テクスチャマッピング」が行える。これによって、実物が空間を移動しているような表示が可能となる。四辺形から四辺形への射影変換を用いてテクスチャマッピングを行い、それをプロジェクターで3次元物体（建物など）の平面部分に投影することによって、図柄を物体表面に描いたような「プロジェクションマッピング」が行える。また、別々に撮影した複数の画像を射影変換によって重なり合うように張り合わせれば、広い視野のパノラマ画像を作り出す「モザイク生成」が行える。

## 0.7 第7章「変換群と幾何学」のポイント

空間の「ユークリッド変換」、「相似変換」、「アフィン変換」、「射影変換」の集合はそれぞれ「群」の構造を持ち、「ユークリッド変換群」、「相似変換群」、「アフィン変換群」、「射影変換群」と呼ばれる。それぞれに、それらの変換群に不変な性質を調べる「ユークリッド幾何学」、「相似幾何学」、「アフィン幾何学」、「射影幾何学」が対応する。図形の変換と座標系の変換は同等な役割を果たし、互いに逆変換の関係にある。

複数の点に対して、それらの変換前後の点の位置からその変換（ユークリッド変換、相似変換、アフィン変換、射影変換）が計算できる。点の位置の誤差があっても、全体的によく当てはまる変換を最小2乗の意味で定めることができる。

アフィン変換群は射影変換群の部分群であり、相似変換群はアフィン変換群の部分群であり、ユークリッド変換群は相似変換群の部分群であるという「包含関係」がある。各変換群は、その変換によって変化しない「不変量」と不変な性質（「不変性」）をもつ。変換群の包含関係により、ある変換群の不変量と不変性は、そのすべての部分群の不変量と不変性でもある。変換群の不変量と不変性と幾何学との対応は、クラインの「エルランゲン目録」で提唱された。

## さらに学びたい人に

誤差があるときの変換前後の複数の点の位置からアフィン変換を最小2乗の意味で定めることは、誤差が独立で一様等方な正規分布するときの「最尤推定」とみなすことができる。回転や射影変換に対しても最尤推定を行うことができるが、やや複雑な計算となる。

誤差のある変換前後の複数の点の位置から、それがどういう変換を受けたかを判定しようとするとき、候補となる変換による位置ずれの2乗和（「残差」）の大小で判定することはできない。それは変換群の包含関係のためである。どの変換群に対しても、その残差はその部分群に対する残差より常に小さいからである。不適切な判定（「過当てはめ」）を防ぐには、変換の「自由度」を考慮した「幾何学的モデル選択」が必要である。

# 第1章 平面幾何学 [要約]

\* 印の付いた節は、学部レベルの授業では省略してもよい内容を表す。

## 1.1 平面ベクトル

ベクトルの内積  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  と外積  $|\mathbf{a}, \mathbf{b}|$  に関する定理.

- ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が直交する必要十分条件は  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  である.
- ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が平行 (同じ向き, または反対向き) である必要十分条件は  $|\mathbf{a}, \mathbf{b}| = 0$  である.

内積と外積の幾何学的意味

- 任意のベクトル  $\mathbf{a}$  と単位ベクトル  $\mathbf{u}$  との内積  $(\mathbf{u}, \mathbf{a})$  は, ベクトル  $\mathbf{a}$  を  $\mathbf{u}$  方向の直線に射影した長さである (図 1.2).
- ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の外積  $|\mathbf{a}, \mathbf{b}|$  は,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の作る平行四辺形の面積である (図 1.3).
  - $|\mathbf{a}, \mathbf{b}|$  は,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  を列とする行列の行列式に等しい.
- 長さや面積には正負がある.
  - 長さは, 基準となるベクトルの向きに正, 反対向きに負.
  - ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の作る平行四辺形の面積は,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が右手系のとき正, 左手系のとき負.

## 1.2 平面上の射影と回転

- 式 (1.15) の射影行列  $P_n$  を用いると, ベクトル  $\mathbf{a}$  を, 単位ベクトル  $\mathbf{n}$  に垂直な直線上へ射影したものは  $P_n \mathbf{a}$  と書ける (図 1.6(a)).
- 式 (1.16) の回転行列  $R(\theta)$  を用いると, ベクトル  $\mathbf{a}$  を角度  $\theta$  だけ回転したものは  $R(\theta)\mathbf{a}$  と書ける.
  - 図形の回転は, 反時計周りを正, 時計回りを負と約束する.

### 1.3 平面上の直線

平面上の直線は次のように表現される.

- 原点からの距離  $h$  と単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を指定する (式 (1.27)).
- その上の1点  $\mathbf{r}_0$  と単位方向ベクトル  $\mathbf{u}$  を指定する (式 (1.29)).

一方の表現から他方の表現への変換は容易である. 2直線の交点, 2点を通る直線, 点から直線までの距離は, 都合のよい表現を用いると簡単に計算される.

### 1.4 平面の座標変換\*

- $xy$  座標系を原点  $O$  の周りに角度  $\theta$  だけ回転し, ベクトル  $\mathbf{t}$  だけ平行移動した新しい  $x'y'$  座標系をとると, 点の位置や直線の表現は変化する (式 (1.40), (1.42), (1.43)).
- 点や直線を原点  $O$  の周りに角度  $\theta$  だけ回転し, ベクトル  $\mathbf{t}$  だけ平行移動すると, 点は新しい位置に移り, 直線は新しい表現に変化する (式 (1.41), (1.44), (1.45)).
- 固定した点や直線に対する座標系の回転, 平行移動と, 固定した座標系に対する点や直線の回転, 平行移動は, 表現の変化が互いに反対の関係式となる.

### 1.5 平面上の曲線

平面上の曲線は次のように表現される.

- 一つの方程式  $F(x, y) = 0$  で表す.
- パラメータ  $t$  を用いた式  $x = x(t), y = y(t)$  で表す.

曲線の性質は, 都合のよい表現を用いると簡単に計算される.

- 「ナブラ演算子」 $\nabla$  による  $\nabla F$  はその点での法線ベクトルである (式 (1.53)).
  - $\nabla F$  を用いて, 接線の方程式が得られる (式 (1.59)).
- 曲線の指定した部分の長さや囲む面積は,  $x = x(t), y = y(t)$  の形に微分, 積分をほどこして得られる (式 (1.57), (1.59)).

曲線と直線 (あるいは曲線と曲線) の接触の滑らかさは, 「接触の次数」で示される.

- 曲線と直線 (あるいは曲線と曲線) の接点が  $k$  個の交点の一致した極限であるとき, それらは「 $k$ 点接触」するという.

## 1.6 曲線の曲率\*

- 曲線と3点接触する円を「接触円」と呼び、その半径を「曲率半径」と呼ぶ。その逆数が、その点の「曲率」である。
- 曲線の各点で、単位接線ベクトルと単位法線ベクトルを基底とする「動標構」（「移動座標系」）が定義できる（式(1.72)）。
- 動標構を弧長  $s$  で微分すると「フルネ・セレーの公式」が得られる（式(1.73)）。これは各点の曲率  $\kappa$  のみによって定まる。
- フルネ・セレーの公式から、弧長  $s$  をパラメータとする曲線の表現  $x = x(s), y = y(s)$ （「ブーケの公式」）が得られる（式(1.74)）。これは各点の曲率  $\kappa$  のみによって定まる。
  - 各点の曲率が指定されると、曲線の形が一意的に定まる。

## 雑談

ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$  には二通りの解釈が存在する。一つは、大きさと方向をもった幾何学的対象（イメージとしては「矢印」）を表す「記号」とみなすものであり、もう一つは、実数を縦に並べた配列とみなすものである。

このことから、ベクトルの関係式を導出したり、証明するのに二通りの方法が存在する。一つは幾何学的方法であり、与えられた式を図形が満たすべき性質と対応させるものである。もう一つは解析的方法であり、与えられた式の左辺と右辺の各成分が等しいことを、式の変形によって確認するものである。後者は今日の線形代数の観点でもある。

本書では両者の立場が混在しているが、前者の幾何学的方法を徹底させているのが近年になって注目されている「幾何学的代数」(geometricalgebra) と呼ばれているものである ([65] が入門的な教科書)。この立場に立つと、ベクトル  $\mathbf{a}$  は図形としての意味をもつ “ $\mathbf{a}$ ” という記号であるから、これに行列を掛けることはできない。このため、ベクトルの回転を回転行列  $\mathbf{R}$  を用いて  $\mathbf{R}\mathbf{a}$  と書くことはできないので、“記号” に作用する「ベクトル作用素」(versor)  $\mathcal{R}$  を定義して  $\mathcal{R}\mathbf{a}\mathcal{R}^\dagger$  のように書く ( $\dagger$  は共役を表す)。

歴史的には、記号の操作とみなす定式化が先に発展し、列ベクトルと行列による線形代数の方法が確立したのは20世紀に入ってからである。式(1.8)で定義されるベクトルの外積  $|\mathbf{a}, \mathbf{b}|$  は、列ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  を列とする  $2 \times 2$  行列の行列式にほかならないが、このことに触れずに、 $|\mathbf{a}, \mathbf{b}|$  を単に（記号とみなした）ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の“演算”として扱っているのも、幾何学的代数の考えを意識したものである。しかし、回転や曲線の解析には線形代数の立場をフルに用いている。

## 第2章 空間幾何学 [要約]

\*印のついた節は、学部レベルの授業では省略してもよい内容を表す。

### 2.1 空間ベクトル

ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の作る平行六面体の体積を、 $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$  が右手系るとき正、左手系るとき負と約束する。

- ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が「右手系」であるとは、 $\mathbf{c}$  が  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の張る平面に対して、 $\mathbf{a}$  が  $\mathbf{b}$  の向きに回転するときねじの進む側にあることである。

ベクトル積とスカラ三重積

- ベクトル積  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  は、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に直交するベクトルであり、長さは  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  の作る平行四辺形の面積に等しく、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が右手系である方向に伸びる (図 2.1(a)) .
- スカラ三重積  $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$  は、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の作る平行六面体の体積に等しい (図 2.1(b)) .
  - $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$  は、 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  を列とする行列の行列式に等しい。

内積, ベクトル積, スカラ三重積に関する定理

- ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が直交する必要十分条件は  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  である。
- ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が平行 (同じ向き, または反対向き) である必要十分条件は  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$  である。
- ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  が同一平面上にある必要十分条件は  $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = 0$  である。

### 2.2 空間の射影と回転

- 式 (2.16) の射影行列  $P_n$  を用いると、ベクトル  $\mathbf{a}$  を、単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  の平面上へ射影したものは  $P_n \mathbf{a}$  と書ける (図 2.2(a)) .
- 式 (2.17) の回転行列  $R(\mathbf{n}, \Omega)$  を用いると、ベクトル  $\mathbf{a}$  を回転軸  $\mathbf{n}$  (単位ベクトル) の周りに角度  $\Omega$  だけ回転したものは  $R(\mathbf{n}, \Omega) \mathbf{a}$  と書ける。
  - 空間での回転は、回転軸の方向に進むねじの回転方向を正、反対向きを負と約束する。
- ベクトル  $\mathbf{a}$  が単位ベクトル  $\mathbf{n}$  の周りに角速度  $\omega$  (ラジアン/秒) で回転しているとき、その速度は  $\dot{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$  である。ただし、 $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$  とおく。

## 2.3 空間の直線

空間の直線は次のように表現される.

- その直線の方向ベクトル  $\mathbf{m}$  と、原点  $O$  とその直線を含む平面の法線ベクトル  $\mathbf{n}$  で指定する (式 (1.29)).
  - $\mathbf{m}, \mathbf{n}$  の大きさは  $\|\mathbf{m}\|^2 + \|\mathbf{n}\|^2 = 1$  となるように正規化し、向きは、 $\mathbf{n}$  が  $\mathbf{m}$  の周りに正の回転をするように定める (図 2.3(b)).
- その上の1点  $\mathbf{r}_0$  と単位方向ベクトル  $\mathbf{u}$  を指定する (式 (1.28), 図 2.3(a)).

一方の表現から他方の表現への変換は容易である. 2直線の交点, 2点を通る直線, 点から直線までの距離は, 都合のよい表現を用いると簡単に計算される.

## 2.4 空間の平面

- 空間の平面を表現するには, 原点からの距離  $h$  と単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  を指定する (図 2.5(b)).
- 点から平面までの距離, 平面と直線の交点, 2平面の交線, 3点を通る平面は容易に計算される. このとき, 直線に都合のよい表現を用いると, 計算が簡単になる.

## 2.5 空間の座標変換\*

- $xyz$  座標系を原点  $O$  の周りに回転行列  $\mathbf{R}$  の回転を施し, ベクトル  $\mathbf{t}$  だけ平行移動した新しい  $x'y'z'$  座標系をとると, 点の位置や直線, 平面表現は変化する.
- 点や直線や平面を原点  $O$  の周りに回転行列  $\mathbf{R}$  の回転を施し, ベクトル  $\mathbf{t}$  だけ平行移動すると, 行移動すると, 点は新しい位置に移り, 直線や平面は新しい表現に変化する.
- 固定した点や直線や平面に対する座標系の回転, 平行移動と, 固定した座標系に対する点や直線や平面の回転, 平行移動は, 表現の変化が互いに反対の関係式となる.

## 2.6 空間の曲線

- 空間の曲線は, パラメータ  $t$  を用いた式  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  で表される (式 (2.58)).
- 曲線の接線や, 指定した部分の長さは, 曲線の式  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  を微分, 積分して得られる (式 (2.60), (2.61)).
- 曲線と平面 (あるいは曲線と曲面) の接触の滑らかさは, 「接触の次数」で示される.

- 曲線と平面（あるいは曲線と曲面）の接点が  $k$  個の交点の一致した極限であるとき、それらは「 $k$ 点接触」するという。

## 2.7 曲線の曲率と捩率\*

- 曲線の各点で、接線とそれに直交する二つの法線（主法線、従法線）が定義される（図 2.10）
  - 主法線は、それと接線とが張る平面（接触平面）が曲線と 3 点接触する方向に定義する。
- 接触平面上で曲線と 3 点接触する円を「接触円」と呼び、その半径を「曲率半径」と呼ぶ。その逆数が、その点の「曲率」である。
- 曲線の各点で、単位接線ベクトル、単位主法線ベクトル、単位従法線ベクトルを基底とする「動標構」（「移動座標系」）が定義できる。
- 動標構を弧長  $s$  で微分すると「フルネ・セレーの公式」が得られる（式 (2.68)）。これは各点の曲率  $\kappa$  と捩率  $\tau$  によって定まる。
- フルネ・セレーの公式から、弧長  $s$  をパラメータとする曲線の表現  $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ （「ブーケの公式」）が得られる（式 (2.70)）。これは各点の曲率  $\kappa$  と捩率  $\tau$  によって定まる。
  - 各点の曲率と捩率が指定されると、曲線の形が一意的に定まる。

## 雑談

式 (2.13) で定義されるスカラー三重積  $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$  は、列ベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  を列とする  $3 \times 3$  行列の行列式にほかならないが、本文でこのことに触れていないのは、第 1 章の平面ベクトルの場合と同様に、「記号」とみなしたベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  の“演算”を考える幾何学的代数の思想を引きついでいる

歴史的には、幾何学を純粋に記号の演算とみなす「四元数代数」がアイルランドの数学者ハミルトン (Sir William Rowan Hamilton: 1805–1865) によって提唱された。「四元数」(quaternion) とは  $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  の形の要素である。これは複素数  $z = x + iy$  を拡張したものであり、 $i, j, k$  は  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  となる“虚数単位”である。この四元数にいろいろな演算を定義することによって、回転などの幾何学的に意味のある関係を記述することができる。

同じころ、ドイツの数学者グラスマン (Hermann Günter Grassmann: 1809–1877) は点や直線の関係を記号的に記述する「グラスマン代数」(Grassmann algebra) を作り上げた。例えば 2 点  $p_1, p_2$  を結ぶ直線  $l$  は  $l = p_1 \wedge p_2$  と書かれ、3 点  $p_1, p_2, p_3$  を通る平面  $\Pi$  は  $\Pi = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$  と書かれる。記号  $\wedge$  は「外積」(outer product) と呼ばれる。このような記号の操作で空間の点や直線や平面のいろいろな関係を記述することができる。

このハミルトンの四元数とグラスマン代数を研究した米国の物理学者ギブス (Josiah Willard Gibbs: 1839–1903) は、内積  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 、ベクトル積  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 、スカラー三重積  $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|$  を本章のように定義すると、ハミルトンとグラスマンが示したことのほとんどすべてを表すことができ、物理学の記述には十分であることを見いだした。このギブスの定式化は「ベクトル解析」(vector calculus) と呼ばれ、3次元空間の図形の幾何学的関係や電磁気学、流体力学の方程式を表すのに十分であるため、世界の大学の理工系の標準科目となった。その結果、ハミルトンの四元数とグラスマン代数はほとんど教えられなくなった。

しかし、最近はこちらが見直され、ベクトル解析にハミルトンの四元数やグラスマン代数の概念を取り入れて、拡張されている。これが米国の物理学者ヘステネス (David Orlin Hestenes: 1933–) の提唱した「幾何学的代数」[65] である。幾何学的代数では2点を通る直線、3点を通る平面、1点と直線を含む平面をそれらの点や直線の「結合」(join) と呼び、直線と平面の交点や平面と平面の交線をそれらの直線や平面の「交差」(meet) と呼ぶ。そして、点に対しては、その「双対平面」(dual plane) が定義され、平面に対しては、その「双対点」(dual point) が定義され、直線に対しては、その「双対直線」(dual line) が定義される。その結果、2点の結合(通る直線) はそれぞれの点の双対平面の交差(交線) の双対直線であり、点と直線の結合(含む平面) はその点の双対平面とその直線の双対直線の交差(交点) の双対平面であるという「双対定理」(duality theorem) が成り立つ。このような関係を利用すると、各種の結合や交差が系統的に計算できる。今日ではこのような計算を行うソフトウェアツールがいろいろ提供されている。

3次元空間の回転をベクトルの内積とベクトル積で表す式(2.20) は、フランスの数学者ロドリグ (Benjamin Olinde Rodrigues: 1795–1851) によって示された。これは本来は「ロドリグの公式」(Rodrigues' formula) と呼ぶのが正しいが、我が国ではこれまで「ロドリゲスの公式」と呼ばれてきた。今日では線形代数が発展し、3次元空間の回転は、ベクトルを数字の列とみなし、式(2.17) (場合によっては式(2.22)) の「回転行列」と積によって表すのが普通になった。

本章で述べたような空間曲線の解析は、歴史が非常に古い。我が国では明治時代に西欧の文献が輸入され、さまざまな用語の日本語が当てられた。このため、今日見ると古風な感覚が残るものも多く、現代風に言い換えられることもある。例えば「従法線」は伝統的には「陪法線」(英語の binormal の音訳) と書かれていた。一方、「動標構」(moving frame) は今では「移動座標系」と書かれることも多いが、本書では伝統的な用語「動標構」を用いている。

## 第3章 曲面の幾何学 [要約]

\* 印のついた節は，学部レベルの授業では省略してもよい内容を表す.

### 3.1 曲面の表現

曲面は次のように表現される.

- 局所的な  $xyz$  座標系に関して部分的に  $z = f(x, y)$  の形で表す.
- 一つの方程式  $F(x, y, z) = 0$  で表す.
- パラメータ (「曲面座標」)  $u, v$  を用いた式  $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$  で表す.

### 3.2 グラフ表現

曲面が  $z = f(x, y)$  と表されていれば，法線ベクトル，接平面や指定した部分の面積は，式  $f(x, y)$  を微分，積分して得られる.

### 3.3 局所表現

- 曲面上の点を原点とし，その点での接平面を  $xy$  平面となる座標系 (局所座標系) をとれば，曲面は式 (3.13) の形で書ける.
- 曲面の接平面に直交する断面 (法断面) の曲率を「法曲率」と呼ぶ.
- 法曲率の最大値と最小値を「主曲率」と呼び，その平均  $H$  を「平均曲率」，積  $K$  を「全曲率」 (または「ガウス曲率」) と呼ぶ.
- 曲面の点は，その周りの形状によって「楕円点」 ( $K > 0$ )，「放物点」 ( $K = 0$ )，「双曲点」 ( $K < 0$ ) に分類される (図 3.5).

### 3.4 曲面の輪郭線\*

- 曲面をある方向から眺めたときの輪郭線は、視線と曲面の接点の全体である。
- 輪郭線が凸の点は曲面の楕円点、輪郭線が凹の点は双曲点であり、輪郭線の変曲点は曲面の放物点である。

### 3.5 陰表現

曲面が  $F(x, y, z) = 0$  と表されているとき、

- 「ナブラ演算子」 $\nabla$ による $\nabla F$ はその点での法線ベクトルである (式 (3.35)).
  - $\nabla F$ を用いて、接平面の方程式が得られる (式 (3.36)).
- 法曲率 $\kappa$ , 平均曲率 $H$ , 全曲率 $K$ は「ヘッセ行列」 $\nabla^2 F$ , 「ラプラシアン」 $\Delta F$ を用いて表される (式 (3.40) (3.42)).

### 3.6 パラメータ表現

曲面が  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  と表されているとき、

- $x, y, z$ の式を曲面座標 $u, v$ で微分することにより、各点で曲面に接するベクトル $e_1, e_2$ が得られ (式 (3.53)), それに直交する単位法線ベクトル $n$ が定義される (式 (3.54)).
- 各点で $e_1, e_2, n$ を基底とする「動標構」(「移動座標系」)が定義できる。
- 指定した部分の面積は、動標構 $\{e_1, e_2, n\}$ から得られる量を積分して得られる (式 (3.60)).
- 法曲率 $\kappa$ , 平均曲率 $H$ , 全曲率 $K$ は、動標構 $\{e_1, e_2, n\}$ , およびそれを微分した量を用いて表せる (式 (3.78), (3.79)).

### 3.7 曲面の構造\*

- 動標構 $\{e_1, e_2, n\}$ を曲面座標 $(u, v)$ で微分した $\partial e_i / \partial u^j$ ,  $\partial n / \partial u^j$  (ただし,  $u = u^1, v = u^2$ と置く)は「構造方程式」(「ガウスの式」(式 (3.91)), 「ワインガルテンの式」(式 (3.92)))と呼ばれる微分方程式を満たす。

– これは、クリストッフエルの記号 $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}$ を用いて表される。

- クリストッフエルの記号を用いれば、曲面の2点を最短に結ぶ曲線(「測地線」)を定義する微分方程式が得られる。

- 「ガウスの方程式」(式 (3.94)), 「マイナルディ・コダッツィの方程式」(式 (3.95)) と呼ばれる恒等式が得られる.
  - これらは構造方程式の「積分可能条件」(指定して2点を結ぶ経路に沿う積分が経路の選び方によらない条件)である.

## 雑談

3次元空間の曲線や曲面(数学的にはより高次元空間に拡張される)を扱う数学を「微分幾何学」(differential geometry)と呼ぶ. 前章の「雑談」で述べたように, 微分幾何学は明治以来のやや古風な用語が用いられてきた, 式 (3.15) で定義される「全曲率」(total curvature) は今日では「ガウス曲率」(Gaussian curvature) と呼ばれることが多くなった.

定理 3.3 はオランダの心理学者・数学者ケンデリンク (Jan Johan Koenderink: 1943–)[28] が発見したものである. これは人間の外界の知覚の仕方を調べる知覚心理学, およびコンピュータによって画像から外界を認識・識別するコンピュータビジョンの研究から発生した. ケンデリンクはこの両者の立場から, 人間の視角による認識の仕方を数学的に表現するさまざまな研究を行った.

3.6 節に示した, 曲面座標  $(u, v)$  を用いる解析は伝統的な微分幾何学の中心テーマであった. ここで用いるような, 上下に添字を付けた量にアインシュタインの規約を用いて解析することは, 「テンソル解析」(tensor calculus) と呼ばれ, さまざまな公式が得られる. これらは, 指定した目的に最適な3次元形状の設計や, 美しい建物や調度品や道具の設計に役立てられてきたが, 今日ではCADツールが発展して, 微分幾何学的な解析をする必要があまりなくなっている. 一方, 微分幾何学とテンソル解析は, 材料の変形を記述や時空の歪みを扱うアインシュタイン (Albert Einstein: 1879–1955) の一般相対性理論を始めとして, 宇宙論, 素粒子理論などの物理学の中心的な道具となっている. 一方, 甘利俊一 (1936–) は統計的推論を行うために, 確率分布の集合を高次元の曲面とみなして微分幾何学やテンソル解析を適用する「統計幾何学」(statistical geometry) というアプローチを提唱している.

## 第4章 投影の幾何学 [要約]

\* 印の付いた節は、学部レベルの授業では省略してもよい内容を表す。

### 4.1 投影とアスペクト

空間の投影

- 各点を、それと視点とを結ぶ視線と投影面との交点へ写像するのが「透視投影」である。
- 各点を、それを通る一定の方向の視線と投影面との交点へ写像するのが「平行投影」である。
  - － 透視投影の視点を後方に遠ざけた極限とみなせる。

3次元空間の図形を 視点を移動しながら眺めて、いろいろな質的に異なる見え方が現れるとき、それぞれの見え方を「アスペクト」と呼ぶ。

- 視点をある範囲内で自由に移動しても見え方に質的な変化がないとき、そのアスペクトは「余次元0」（あるいは「構造安定」）であるという。
- 視点をある曲面上を自由に移動したときのみ見え方に質的な変化がないとき、そのアスペクトは「余次元1」であるという。
- 視点をある曲線に沿って自由に移動したときのみ見え方に質的な変化がないとき、そのアスペクトは「余次元2」であるという。
- 視点をある位置から少しでも移動すると見え方に質的に変化するとき、そのアスペクトは「余次元3」であるという。

消失点と消失線

- 無限に長い直線を透視投影すると、ある点で途切れて見える。その点を「消失点」と呼ぶ。
  - － 消失点を見る視線が、その直線と平行になっている。
- 無限に広い平面を透視投影すると、ある直線を境界として途切れて見える。その直線を「消失線」と呼ぶ。

- 消失線上の点を見る視線が，その平面と平行になっている。
- 消失点も消失線も余次元0（構造安定）である。

## 4.2 空間曲線のアスペクト

曲線上の点は，それを眺めたとき，滑らかな弧上の通常点と，角のある特異点に分類される（図4.7）。

- 通常点は凸型の弧上の点（余次元0）と，S字型の弧で曲率が符号を変える変曲点（余次元1）に分類される。
- 特異点はとがった（先端で角度0）の「カusp」（余次元1）と，それが退化した「ダブルカusp」（余次元2）に分類される。
  - カuspを見る視線が，その点で曲線と接している。
  - ダブルカuspを見る視線は，その点で曲線と3点接触している。
- 一つの曲線の複数の部分が交わって見えるときは，見る方向によって見るさまさまなアスペクトが現れる（図4.11）。

## 4.3 曲面の投影\*

滑らかな曲面の輪郭線は，それを見る視線とその曲面の接し方によって，さまざまな見え方（アスペクト）が現れる。

- 視線が曲面の凸型の部分（楕円点）に接するとき，滑らかな凸型の輪郭（余次元0）が見える（図4.13）。
- 視線が凸型と凹型の境界（放物点）に接するときは，通常は輪郭の変曲点（余次元0）が見える（図4.13）。しかし，特定の方向から見ると，「唇」（余次元1），「くちばし」（余次元1）が現れる（図4.15）。
- 視線が凸型の部分（双曲点）に接するときは，通常は滑らかな凹型の輪郭（余次元0）またはカusp（余次元0）が見える（図4.13）。しかし，特定の方向から見ると，「つばめの尾」（余次元1）が現れる（図4.16）。
- 特殊な点を特殊な方向から見ると，より複雑な余次元2のアスペクト（「蝶」，「がちょう」，「かもめ」）が現れる（図4.19, 4.20）。
- 特殊な点を特殊な位置から見たときのみ現れる，より複雑な余次元3のアスペクトも存在する。

視線が曲面の複数の点で接すると、いろいろな見え方が生じる (図 4.21)。例: 「単純交差」 (余次元 0), 「3 重交差」 (余次元 1), 「単接触」 (余次元 1), 「カस्प交差」 (余次元 1)。

#### 4.4 曲線の計算\*

- 曲面を指定した方向から見たときの輪郭線となる部分 (「輪郭母線」) は,  $uv$  パラメータ空間のある条件を満たす点を追跡する, あるいは  $xyz$  座標空間の二つの条件を満たす点を追跡することによって得られる。
- 輪郭線 (輪郭母線の投影) を直接に得るには, 2 パラメータを含む  $u, v$  の 3 式から  $u, v$  を消去する, あるいは 2 パラメータを含む  $x, y, z$  の 4 式から  $x, y, z$  を消去する。

#### 4.5 消去と終結式\*

- パラメータを含む複数の多項式から変数を消去する組織的な方法は, 「終結式」と呼ばれる式を導くことである。
  - 終結式は一般に, ある行列式が 0 になることから得られる。
- 単変数  $x$  の二つの多項式  $f(x) = 0, g(x) = 0$  から  $x$  を消去する「シルヴェスターの終結式」, 「ベズー・ケーリーの終結式」が知られている。
- 2 変数  $x, y$  の三つの多項式  $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0, h(x, y) = 0$  から  $x, y$  を消去する「ケーリー・ディクソンの終結式」が知られている。
- 一般の多変数多項式から変数を系統的に消去する方法として, 「グレブナー基底」の方法が知られている。
  - 非常に高次の多項式を扱う必要があり, 計算量が非常に多いので, 数式処理のソフトウェアツール必要である。

## 雑談

本章の内容は, 初版「あとがき」で述べたように, 視角認識, コンピュータビジョンに関するケンデリンク [27–32] の研究から始まったものである。それが, 数学者によって「カタストロフィ」(catastrophe) の理論と結びつけられて論じられるようになった。カタストロフィの理論自体はより歴史が古く, 1970 年代にフランスの数学者トム (René Frédéric Thom: 1923–2002)[52] が提唱していた。本章では代表的な結果のみを紹介した。詳細は初版「あとがき」を参照。

4.5章で扱った変数の消去は、多項式によって形状や物体の運動をモデル化するコンピュータグラフィクスやコンピュータビジョンでは必須の技法であり、さまざまな終結式が使われてきた。しかし、変数が増えると計算量が爆発的に増大するので、今日では、主として、本章で述べたグレブナー基底に基づいたソフトウェアツールが用いられている。

## 第5章 射影幾何学 [要約]

\* 印の付いた節は、学部レベルの授業では省略してもよい内容を表す。

### 5.1 直線上の射影変換

- 直線に無限遠点を付け加えたものを「射影直線」または「(1次元) 射影空間」と呼ぶ。
  - 無限遠点は直線を両方に延ばした極限にあるとみなし、両端を同一視する（“輪”になっている解釈する）。
- 基準となる3点を指定すると、「複比」によって座標（「射影座標」）を定義することができる。
  - その1点（その射影座標は $\infty$ ）を無限遠方に遠ざけると通常の座標系となる。
  - 残りの2点（その射影座標は0および1）を移動すると、原点の位置やスケールが変化する。
- 直線の「射影変換」は座標の1次分数式で表され（式(5.4)）、これによって複比は変化しない。

### 5.2 直線の透視投影\*

- 平面上に2直線  $L, l$  が与えられたとき、点  $v$  を視点とする透視投影とは、直線  $L$  上の点  $p$  を、 $p$  と  $v$  を通る直線（「視線」）と直線  $l$  との交点  $P$  へ写像することである。
- 透視投影によって複比は変化しない。
- 2直線上に射影座標を定義すると、透視投影によって対応する点の射影座標は射影変換で結ばれる。

### 5.3 直線上の同次座標

- 直線上の点の位置を二つの数（「同次座標」）の比（分数）で表すことができる。
  - 分母が0となる点は無限遠点とみなす。
- 直線上の射影変換は同次座標の定数倍を含む線形変換で表される（式(5.10)）。
  - 射影変換全体は合成に関して閉じていて、「(1次元) 射影変換群」と呼ばれる。

## 5.4 平面上の射影変換

- 平面に無限遠点を付け加えたものを「射影平面」または「(2次元) 射影空間」と呼ぶ。
  - 無限遠点は平面上のすべての直線の無限遠方にあり、無限遠点の全体を「無限遠直線」と呼ぶ。
  - 無限遠直線は、平面を取り囲む無限遠方の円周と解釈できる。
  - 直線の両側の無限遠点は同一視されるから、射影平面は“閉じている”と解釈される。
- 基準となる4点を指定すると、複比によって座標（「射影座標」）を定義することができる。
  - その2点（その射影座標は  $(\infty, 0)$  および  $(0, \infty)$ ）を直交する方向の無限遠方に遠ざけると通常の座標系となる。
  - 残りの2点（その射影座標は  $(0, 0)$  および  $(1, 1)$ ）を移動すると、原点の位置やスケールが変化する。
- 平面の射影変換は座標の1次分数式で表され（式 (5.13)）、これによって複比は変化しない。
  - 射影変換によって、直線は直線に写像され、直線の係数は定数倍を含む線形変換で表される（式 (5.15)）。
  - 射影変換によって、正方形は一般の四辺形に写像される（ただし、無限遠方に開いたり、内外が反転することもある）。

## 5.5 平面の透視投影\*

- 空間に2平面  $\Pi, \pi$  が与えられたとき、点  $v$  を視点とする透視投影とは、平面  $\Pi$  上の点  $p$  を、 $p$  と  $v$  を通る直線（「視線」）と平面  $\pi$  との交点  $P$  へ写像することである。
- 2平面上に射影座標を定義すると、透視投影によって対応する点の射影座標は射影変換で結ばれる。

## 5.6 平面上の同次座標

- 平面上の点の位置を三つの数（「同次座標」）の比（分数）で表すことができる。
  - 分母が0となる点は無限遠点とみなす。
- 平面上の射影変換は同次座標の定数倍を含む線形変換で表される（式 (5.17)）。
  - 射影変換全体は合成に関して閉じていて、「(2次元) 射影変換群」と呼ばれる。

- 射影変換は特別の場合として，平行移動，回転，スケール変化を含むので，同次座標を用いれば，平行移動，回転，スケール変化が同じ形の式で表せる.
- 直線の三つの係数は比のみが意味をもち，直線の「同次座標」と呼ばれる.
- 指定した直線が指定した点を通る条件，3点在同一線上にある（「共線」）条件，3直線が同一点で交わる（「共点」）条件は，点や直線の同次座標を用いて表せる（式(5.21), (5.22), (5.23)）.
- 点と直線に関する命題は，次の入れ換えを行っても成立する（「双対定理」）：「点」 $\leftrightarrow$ 「直線」，「通る」 $\leftrightarrow$ 「上にある」.

## 5.7 2次曲線\*

- 2次曲線は「円錐曲線」または「コニック」とも呼ばれ，楕円，双曲線，放物線，および直線への退化を表す.
  - 楕円は「虚の楕円」（例： $x^2 + y^2 = -1$ ）を含む.
  - 退化には，交わる実または虚の2直線（交点は常に実），平行な実または虚の2直線，1直線（2直線が重なった場合と，一方が無限遠直線の場合）がある.
- 2次曲線はどのような図形を表すかは，係数の作る $3 \times 3$ 行列の「符号」（正の固有値の数と負の固有値の数）によって分類される.
- 射影変換しても2次曲線は2次曲線に写像される.
  - 射影変換によって2次曲線を標準形に直すことができる.
  - 楕円，双曲線，放物線はそれぞれ，無限遠直線に交わらない，交わる，接する閉じた曲線'であると解釈される.

## 5.8 平面上の極変換\*

- 2次曲線を指定すると，点と直線の対応（「極変換」）が定まり，それぞれ互いの「極点」，「極線」と呼ばれる（図5.18(a)）.
  - 点が2次曲線上にある条件は，その極線がその2次曲線と接することである.
  - 直線が2次曲線に接する条件は，その極点がその2次曲線上にあることである.
  - 指定した2次曲線に対して，2点が互いに「共役」であるとは，一方が他方の極線上にあることである.

- 指定した2次曲線に対して、直線が互いに「共役」であるとは、一方が他方の極点を通ることである.
- 楕円を円の透視投影と解釈すると、消失線のその楕円に対する極点はその円の中心の像である (図 5.18(b)).
- 2次曲線と点と直線に関する命題は、次の入れ換えを行っても成立する (「双対定理」): 「極点」 $\leftrightarrow$  「極線」, 「通る」 $\leftrightarrow$  「上にある」,

## 5.9 空間の射影変換\*

- 空間に無限遠点の全体 (「無限遠平面」) を付け加えたものを「(3次元) 射影空間」と呼ぶ.
  - 無限遠平面は、空間を取り囲む無限遠方の球面と解釈される.
- 基準となる5点を指定すると、複比によって座標 (「射影座標」) を定義することができる.
  - その3点 (その射影座標は  $(\infty, 0, 0)$ ,  $(0, \infty, 0)$  および  $(0, 0, \infty)$ ) を直交する方向の無限遠方に遠ざけると通常の座標系となる.
  - 残りの2点 (その射影座標は  $(0, 0, 0)$  および  $(1, 1, 1)$ ) を移動すると、原点の位置やスケールが変化する.
- 射影変換は座標の1次分数式で表され (式 (5.44)), これによって複比は変化しない.
  - 射影変換によって、平面は平面に写像され、平面の係数は定数倍を含む線形変換で表される (式 (5.47)).
  - 射影変換によって、立方体形は一般の四面体に写像される (ただし、無限遠方に開いたり、内外が反転することもある).

## 5.10 空間の同次座標

- 空間の点の位置を四つの数 (「同次座標」) の比 (分数) で表すことができる.
  - 分母が0となる点は無限遠点とみなす.
- 空間面上の射影変換は同次座標の定数倍を含む線形変換で表される (式 (5.49)).
  - 射影変換全体は合成に関して閉じていて、「(3次元) 射影変換群」と呼ばれる.
  - 射影変換は特別の場合として、平行移動、回転、スケール変化を含むので、同次座標を用いれば、平行移動、回転、スケール変化が同じ形の式で表せる.

- 平面の四つの係数は比のみが意味をもち、平面の「同次座標」と呼ばれる.
- 指定した平面が指定した点を通る条件, 4点在同一平面にある(「共面」)条件, 4直線が同一点で交わる(「共点」)条件は, 点や平面の同次座標を用いて表せる(式(5.55), (5.56), (5.57)).
- 点と直線と平面に関する命題は, 次の入れ換えを行っても成立する(「双対定理」): 「点」 $\leftrightarrow$ 「平面」, 「通る」 $\leftrightarrow$ 「上にある」, 「共点」 $\leftrightarrow$ 「共面」

### 5.11 2次曲面\*

- 2次面線は, 楕円体, (1葉, 2葉)双曲面, 楕円放物面, 双曲放物面, および柱面や平面や直線への退化を表す.
  - 楕円体は「虚の楕円体」(例:  $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ )を含む.
  - 柱面は無限に延びた楕円体, 平面は無限に広がった楕円体とみなせる.
  - 1直線は2枚の虚の2平面の交わりと解釈される.
- 2次曲面はどのような図形を表すかは, 係数の作る $4 \times 4$ 行列の「符号」(正の固有値の数と負の固有値の数)によって分類される.
- 射影変換しても2次曲面は2次曲面に写像される.

### 5.12 空間の極変換\*

- 2次曲面を指定すると, 点と平面の対応(「極変換」)が定まり, それぞれ互いの「極点」, 「極面」と呼ばれる(図5.24).
  - 点が2次曲面上にある条件は, その極面がその2次曲面と接することである.
  - 平面が2次曲面に接する条件は, その極点がその2次曲面上にあることである.
  - 指定した2次曲面に対して, 2点が互いに「共役」であるとは, 一方が他方の極面上にあることである.
  - 指定した2次曲面に対して, 平面が互いに「共役」であるとは, 一方が他方の極点を通ることである.
- 2次曲面と点と直線と平面に関する命題は, 次の入れ換えを行っても成立する(「双対定理」): 「極点」 $\leftrightarrow$ 「極面」, 「通る」 $\leftrightarrow$ 「上にある」,

### 5.13 空間の透視投影\*

- 空間に画像面  $\Pi$  と視点  $v$  を視点を指定したとき、「透視投影」とは空間の点  $p$  を、 $p$  と  $v$  を通る直線（「視線」）の画像面  $\Pi$  との交点  $P$  へ写像することである。
  - － 透視投影により、空間の2次曲面は画像面上の2次曲線に写像される。
- 空間に画像面  $\Pi$  と視点  $v$  を視点を指定したとき、与えられた平面  $\pi$  に対して画像面  $\Pi$  上の点  $p$  を、 $p$  と  $v$  を通る直線（「視線」）と平面  $\pi$  との交点  $P$  へ写像することを  $p$  の「逆投影」と呼ぶ。
  - － 逆投影により、画像面上の2次曲線は平面  $\pi$  上の2次曲線に写像される。
  - － 平面  $\pi$  を別の位置  $\pi'$  に移動すると、逆投影によって得られる図形は  $\pi$  から  $\pi'$  への射影変換となる。

## 雑談

射影幾何学は今日のCAD、コンピュータグラフィクス、コンピュータビジョンで重要な役割を果たしている。とはいえ、実際の応用で必要となるのは「同次座標」(homogeneous coordinate)を用いることである。これは、本章に示したように、変数を一つ増やした1次元高い空間で式を書くことである（直線上は2変数、平面上は3変数、空間は4変数）。その結果、点や直線や平面や2次曲線や2次曲面の関係が、「定数項のない”式（右辺が0の式）で表される。これによってコンピュータによる計算が扱いやすくなるが、利点はそれだけではない。同次座標を使うと、無限遠を区別する必要がなくなる。例えば平面上の2直線は必ず1交点を持つ。平行な2直線は無限遠方で交わるとみなす。同次座標を使うと、これは付加した変数が0になることを意味するが、式の形は同じである。

本章ではCAD、コンピュータグラフィクス、コンピュータビジョンの応用を考慮して、こうした同次座標による記述を中心としているが、無限遠方を特別扱いしない「射影空間」(projective space)は、数学的には「位相幾何学」(topology)の典型的な研究対象である。例えば、1次元射影空間は直線の両端の無限遠方を「無限遠点」(point at infinity)として同一視するので、イメージ的には無限に大きい“円”とみなせる。同様に、2次元射影空間は無限遠方を「無限遠直線」(line at infinity)として同一視するが、どの方向も両方の無限遠方を同一視するので、想像しにくい“閉じた”空間となる（正方形の向かい合う2辺を、向きを変えて張り合わせるイメージである）。3次元射影空間も、無限遠方を「無限遠平面」(plane at infinity)として同一視する空間となる。しかし、本章ではこのような位相幾何学的性質には深入りしなかった。

一方、初版「あとがき」で述べたように、射影幾何学は歴史的には公理に基づく幾何学の構成として研究され、さまざまな非ユークリッド幾何学が誕生した。これについても本章では扱わなかった。

ところで、CAD、コンピュータグラフィクスに関して、一つ注意することがある。5.10 節に示したように、点  $(x, y, z)$  に拡大・縮小、回転、平行移動を施した点  $(x', y', z')$  は、同次座標を用いて  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$

$= A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$  と書ける。ここに、 $A$  は式 (5.51) のように定義した拡大・縮小、回転、平行移動を表す

$4 \times 4$  行列である。この変換に引き続いて、さらに行列  $B$  で表される変換を施した結果は  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} =$

$BA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$  であり、さらに  $C, \dots, D$  で表される変換を加えると  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = D \cdots BA \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$  となる。

ところが、CAD、コンピュータグラフィクスではなぜか、ほとんどすべての教科書や文献で、同次座標を用いる点の位置を横ベクトルとして、 $[x \ y \ z \ 1]$  と書いてている。その結果、拡大・縮小、回転、平行移動を施した結果は  $[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1]A$  となる。このときの変換行列  $4 \times 4$  は列ベクトルを用いる場合の転置行列となっている。これに  $B$  で表される変換を加えると  $[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1]AB$  となり、さらに  $C, \dots, D$  で表される変換を加えると  $[x' \ y' \ z' \ 1] = [x \ y \ z \ 1]ABC \cdots D$  となる。

なぜ通常の数学の習慣と異なる行ベクトルによる表示を用いるのだろうか、これがいつから始まったのだろうか。著者が何人かの CAD、コンピュータグラフィクスの専門家に聞いても、「そういうものだと思っていた」ということで、理由や起源は不明である。想像できるのは、一つは列ベクトルを用いると、横書きの本文中で行から上下にはみ出して見苦しいことである（しかし、 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$  を  $(x \ y \ z \ 1)^T$  と書くこともできる）。もう一つは、変換の合成が通常の数学の流儀では前に、前にと付加されるのに対して、行ベクトルの流儀では次々と後に行列（通常の数学の流儀の転置）が追加され、積  $ABC \cdots$  が「まず  $A$  して、次に  $B$  して、それから  $C$  して、…」というように、直観に合う解釈ができることである（数式表現の逆ポーランド記法の影響?）。これらが理由なのか、それ以外に別の理由があるのか、現時点ではわかっていない。

## 第6章 画像の変換: テクスチャマッピング, プロジェクションマッピング, モザイク生成

### あらまし

「テクスチャマッピング」とは、ユーザーが設計した3次元物体の表面に図柄を張り付けて、画面上に本物らしく表示する技術である。これを行うには、物体表面を三角形に分割し、画像上の対応する各三角形領域に張り付ける図柄をアフィン変換によって写像する。「プロジェクションマッピング」とは、ユーザーが作成した図柄を建物の壁面などにプロジェクターで投影する技術である。これを行うには、対象を撮影した画像中の図柄を張り付ける領域を四辺形に分割し、作成した図柄を各四辺形領域に射影変換する。そして、その画像をカメラの撮像と等価なプロジェクターで投影する。「モザイク生成」とは別々に撮影した画像を張り合わせて、視野の広いパノラマ画像を作成する技術である。これを行うには、一つの画像が他の画像と部分的に重なるような射影変換を計算する。本章ではこれらを行うために、アフィン変換と射影変換による画像の変換の計算法を解説する。

### 6.1 重心座標

平面上の3点  $A : (x_A, y_A)$ ,  $B : (x_B, y_B)$ ,  $C : (x_C, y_C)$  に関する点  $(x, y)$  の**重心座標** (barycentric coordinates)  $(\alpha, \beta, \gamma)$  とは、点  $(x, y)$  を次のように表すものである。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_A \\ y_B \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_B \\ y_C \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \quad (6.1)$$

書き直すと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

クラメールの公式 (→注 5.30) を用いると、解は次のようになる。

$$\alpha = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x & x_B & x_C \\ y & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_A & x & x_C \\ y_A & y & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.3)$$

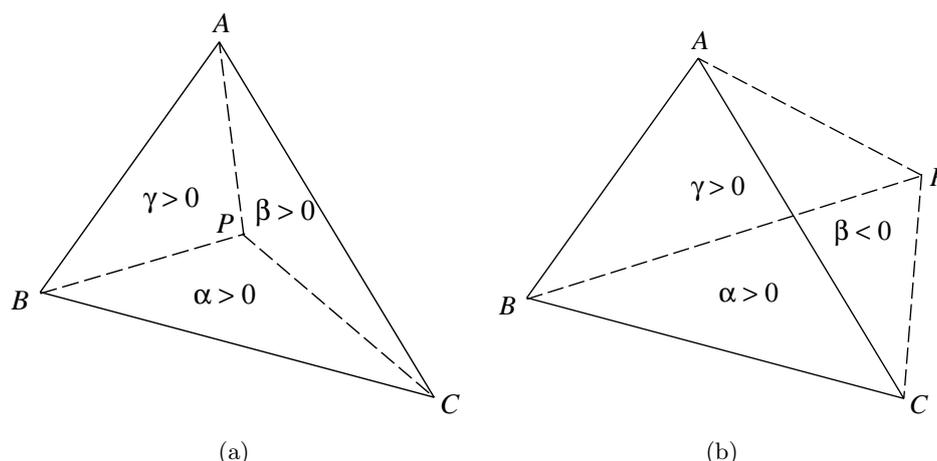


図 6.1: 点 P の重心座標. (a) P が  $\triangle ABC$  の内部の場合. (b) P が  $\triangle ABC$  の外部の場合.

したがって, 指定された 3 点  $A : (x_A, y_A)$ ,  $B : (x_B, y_B)$ ,  $C : (x_C, y_C)$  に対して, 点  $(x, y)$  が与えられると, その重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  が式 (6.3) で定まる, また, 重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  が与えられると, その点の位置  $(x, y)$  が式 (6.1) で定まる. 式 (6.1) より明らかに,

**【命題 6.1】** 三角形  $\triangle ABC$  の重心の重心座標は  $(1/3, 1/3, 1/3)$  である.

であるが, さらに次のことが成り立つ.

**【命題 6.2】** 点 P の重心座標が  $(\alpha, \beta, \gamma)$  のとき, 点 A, P を通る直線の辺 BC との交点を D, 点 B, P を通る直線の辺 CA との交点を E, 点 C, P を通る直線の辺 AB との交点を F とすると (図 6.1),

$$\alpha : \beta : \gamma = \overline{\triangle PBC} : \overline{\triangle PCA} : \overline{\triangle PAB} \tag{6.4}$$

が成り立つ ( $\rightarrow$  問題 6.1). ただし,  $\overline{\triangle ABC}$  は三角形  $\triangle ABC$  の (符号付き) 面積である.

このため, 重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  は**面積座標** (area coordinages) と呼ばれることもある. これから次のこともわかる (図 6.2).

**【系 6.1】** 点  $(x, y)$  が三角形  $\triangle ABC$  の周上または内部にある条件は,  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$  である. 内部に含まれる条件は,  $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$  である.

**【系 6.2】** 点  $(x, y)$  が辺 BC, CA, AB の上にある必要十分条件はそれぞれ  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$  である.  $\alpha < 0$  なら, 点  $(x, y)$  は辺 BC の A と反対側にあり,  $\beta < 0$  なら辺 CA の B と反対側にあり,  $\gamma < 0$  なら辺 AB の C と反対側にある.

**(注 6.1)**

系 6.1, 6.2 を用いれば, 与えられた三角形に対して各点があるか, 外部にあるか, 外部にあるときはどの辺のどちら側にあるかが, 式 (6.3) の重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を計算することによって判定できる. 1.1 節の「線

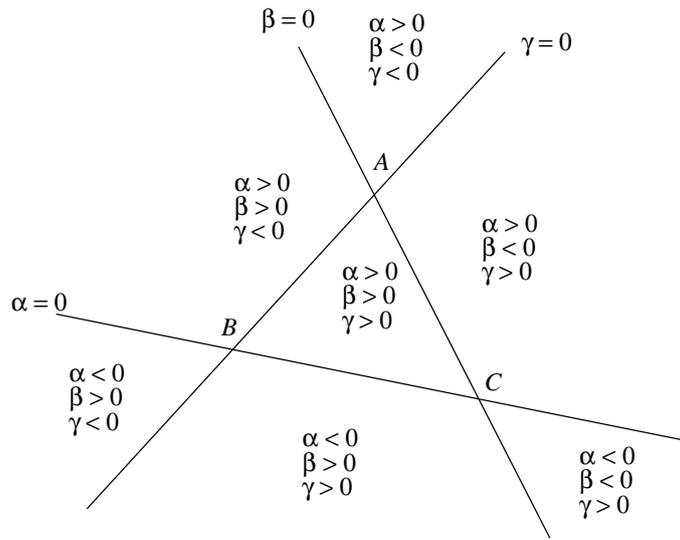


図 6.2: 重心座標の符号. 直線  $BC, CA, AB$  上でそれぞれ  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$  となり, それぞれ直線の一方では正, 他方では負となる.

分の交差判定」の項では, 各点が与えられた線分のどちら側にあるかを, 外積の符号で判定しているが, 重心座標による判定も実質的には同じ計算を行っている.

(注 6.2)

$n$  次元空間の線形独立な  $r$  本のベクトルの張る (または, 生成する) 空間, すなわち線形結合の全体を  $r$  次元部分空間 (subspace) と呼ぶ. それにある方向に平行移動したものを  $r$  次元アフィン空間 (affine space) (あるいは  $r$  次元フラット (flat)) と呼ぶ. 例えば 3 次元空間に含まれるの 0 次元, 1 次元, 2 次元, 3 次元のアフィン空間はそれぞれ点, 直線, 平面, 3 次元空間全体である. 特に  $n$  次元空間の  $n - 1$  次元アフィン空間は超平面 (hyperplane) と呼ばれる.  $n$  次元空間内の  $N$  本の位置ベクトルと呼ばれる.  $n$  次元空間内の  $N$  本の位置ベクトル  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  の線形結合

$$c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_N \mathbf{x}_N \tag{6.5}$$

で  $c_1 + \dots + c_N = 1$  のものをアフィン結合 (affine combination) と呼ぶ. そのようなアフィン結合全体は  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  を含む最小のアフィン空間である (「最小の」とはどの一部を除いてもその性質を満たさないことをいう). これは,  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  の張る (または, 生成する) アフィン空間ともいう. 式 (6.5) で  $c_1 + \dots + c_N = 1$ , かつ  $c_1 \geq 0, \dots, c_N \geq 0$  のものを凸結合 (convex combination) と呼ぶ. そのような凸結合の全体を,  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  の張る (または, 生成する) 凸包 (convex hull) と呼ぶ. これは  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  を含む最小の凸集合 (convex set) である. ただし, 凸集合とは, その任意の 2 点を端点とする線分がそれに含まれる集合のことをいう. 式 (6.1) と系 6.1 からわかるように, 3 点の凸結合の全体, すなわち凸包は, その 3 点を頂点とする三角形にはかならない.  $n$  次元空間に一般の位置 (general position) にある  $n + 1$  個の点 (すなわち, どの  $n$  点も同一超平面に含まれない点) を指定すると, 各点をそれらの点のアフィン結合で表した係数によって, その点の重心座標が定義できる. そして, その符号によって図 6.2 の関係を一般化して, それら  $n + 1$  個の張る凸包 ( $n$  次元単体 (simplex) と呼ぶ) の内外関係が判定できる. 0 次元, 1 次元, 2 次元, 3 次元単体はそれぞれ点, 線分, 三角

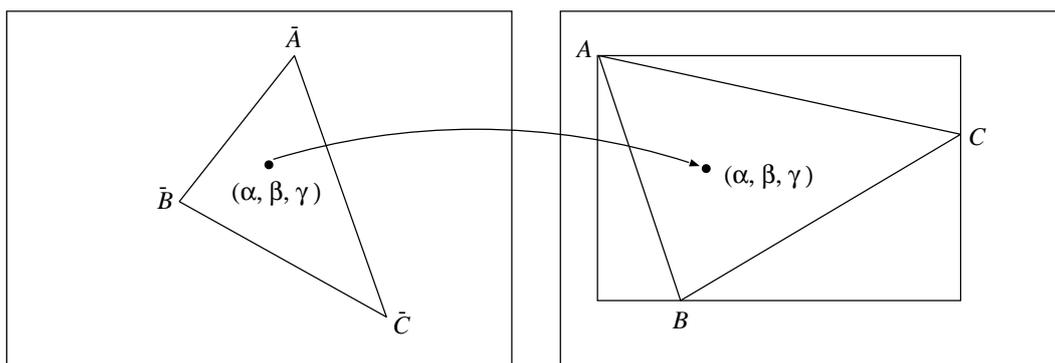


図 6.3: 三角形  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  から三角形  $\triangle ABC$  へのアフィン変換.

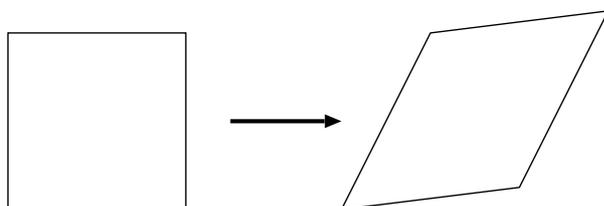


図 6.4: アフィン変換によって, 正方形は平行四辺形に写像される.

形, 四面体である.

## 6.2 三角形のアフィン変換

**アフィン変換** 重心座標を用いれば, 三角形から三角形への写像が容易に計算できる. 三角形  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  を三角形  $\triangle ABC$  に写像するには,  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  の各点の重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を計算し, それを  $\triangle ABC$  に関して同じ重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を持つ点に写像すればよい (図 6.3). これによって点  $(\bar{x}, \bar{y})$  が点  $(x, y)$  に写像されるとすると, 座標は次の形の 1 次式で表される (→ 問題 6.2).

$$x = a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} + a_{13}, \quad y = a_{21}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{23} \quad (6.6)$$

このような写像は 2 次元**アフィン変換** (affine transformation) (→ 式 (5.14)) と呼ばれる (→ 問題 6.3). このようなアフィン変換によって, 線分は線分に写像され, 長さの比は保たれる. しかし, 長さや角度は保たれない. 正方形は平行四辺形に写像される (図 6.4). 式 (6.6) は次のようにも書き直せる (→ 式 (5.18)).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

**テクスチャマッピング** 数学的には, 式 (6.6), (6.7) によって点  $(\bar{x}, \bar{y})$  から点  $(x, y)$  への写像が定義されるが, これは画像間の写像を記述するには適切ではない. それは, これが画像が離散的な画素か

ら構成されているという事実を考慮していないからである。画像間の写像を記述するには、画素と画素への対応を指定する必要がある。その計算手順は次のようになる。

●手順●

写像すべき画像フレーム（画素の配列）を定義し、三角形  $\triangle ABC$  に外接する長方形領域を指定する。そして、この長方形領域の各画素  $(x, y)$  について次の計算を行う。

1.  $(x, y)$  の  $\triangle ABC$  の重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を計算する (式 (6.3)).
2.  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$  であれば原画像上の  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  に関する重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  もつ画像座標  $(\bar{x}, \bar{y})$  を計算する (式 (6.1)).
3. その原画像の画像座標  $(\bar{x}, \bar{y})$  の画素の画素値を画素  $(x, y)$  にコピーする。

これによって三角形  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  の内部の「テクスチャ」（すなわち図柄）が三角形  $\triangle ABC$  の内部にコピーされることから、この操作は**テクスチャマッピング** (texture mapping) と呼ばれる。

(注 6.3)

注意することは、三角形  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  中の点  $(\bar{x}, \bar{y})$  を三角形  $\triangle ABC$  中の点  $(x, y)$  に写像するのも関わらず、各点  $(x, y)$  に対して、そこに写像される点  $(\bar{x}, \bar{y})$  の位置を計算していることである。これは、画像を生成するということは、表示すべきフレーム、すなわち画素の配列を用意して、その各画素の画素値を定義することだからである。画素値とは、濃淡画像であればその明るさを指定する輝度値であり、カラー画像であれば三色  $R$  (赤),  $G$  (緑),  $B$  (青) の値のそれぞれについて行う。このために、画素値を与えるべき画素  $(x, y)$  をまず指定して、次にその画素値をどの画素からコピーしてくればよいかを計算することになる。これは、式 (6.6), (6.7) によって与えられる  $(\bar{x}, \bar{y})$  から  $(x, y)$  への写像の逆写像を計算していることになる。

**双1次補間** 前述の手順には一つ問題がある。それは画像フレームの画素座標  $(x, y)$  は整数値でなければならないのに、第2ステップで  $(x, y)$  から計算した  $(\bar{x}, \bar{y})$  が整数値とは限らないことである。これは、例えば  $(\bar{x}, \bar{y})$  を四捨五入によって整数化すれば解決する。しかし、それでは画像の解像度（すなわち画素の密度）が低いときに、細部が不連続な見た目に不自然な画像になる可能性がある。より自然で滑らかな画像を生成する方法は、次のように、計算した実数値の座標の位置を取り囲む4個の画素の画素値から補間することである。よく行われるのは、次の方法である。

●手順●

実数座標  $(\bar{x}, \bar{y})$  の整数部（小数部切り捨て）を  $(i, j)$  とし、切り捨てた小数部を  $\xi = \bar{x} - i, \eta = \bar{y} - j$  とする。そして、原画像の画素  $(i, j)$  の画素値を  $I(i, j)$  と書くと、実数座標  $(\bar{x}, \bar{y})$  の画素値を次のように定義する（→ 問題 6.4）。

$$I(\bar{x}, \bar{y}) = (1 - \xi)(1 - \eta)I(i, j) + \xi(1 - \eta)I(i + 1, j) + (1 - \xi)\eta I(i, j + 1) + \xi\eta I(i + 1, j + 1) \quad (6.8)$$

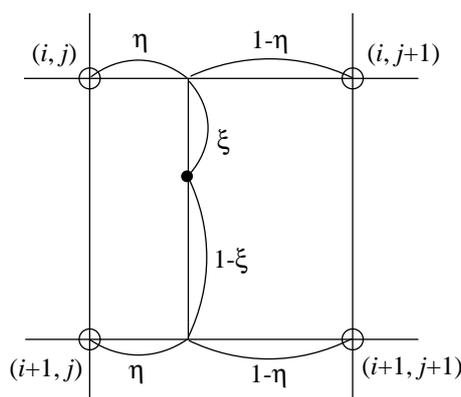


図 6.5: 双1次補間.  $I(i, j)$  と  $I(i, j+1)$  を  $\eta:1-\eta$  に内分し,  $I(i+1, j)$  と  $I(i+1, j+1)$  を  $\eta:1-\eta$  に内分し, それらを  $\xi:1-\xi$  に内分する.

これは,  $I(i, j)$  と  $I(i, j+1)$  を  $\eta:1-\eta$  に内分し,  $I(i+1, j)$  と  $I(i+1, j+1)$  を  $\eta:1-\eta$  に内分し, それらを  $\xi:1-\xi$  に内分するものである (図 6.5). 先に  $\xi:1-\xi$  に内分してから  $\eta:1-\eta$  に内分しても同じ結果になる. これは1次補間したものを1次補間するので, **双1次補間** (bilinear interpolation) と呼ばれる.

**3次元物体の表示** グラフィクスによって作成した3次元物体を表示するとき, その表面に張り付けるテクスチャは, ユーザーが任意に作成できる. よく行われるのは, 物体の面を木目や毛皮や大理石などの, 異なる地肌に見せることである (もともと, 「テクスチャマッピング」という用語はこれから始まった). しかし, その物体が実際に存在して, それを撮影した画像が存在するときは, その画像から切り取って張り付けることが多い. 例えば, 図 6.6(a) がその物体 (この場合は円筒) を撮影した画像であるとする. この物体の3次元モデルを生成し, その表面を三角形パッチに分割する. そして, それをその画像上に見えるのと同じ位置に置いて重ねて表示する. 図 6.6(b) は, その物体を別の位置に置いて, 別の画像フレームに表示したものである (あるいは, 同じ物体を別の視点から見たと考えてもよい). そして, 図 6.6(a) の各三角形パッチ内の画素値を図 6.6(b) の対応する三角形パッチにテクスチャマッピングを行う. モデルをさまざまな位置に置いてこれを行えば, 図 6.6(a) の物体がそのテクスチャとともに3次元空間を移動しているような (あるいは, 視点を移動しながら同じ物体を見ているような) 動画像を作成することができる.

**(注 6.4)**

ここでは一つの画像のテクスチャを他の画像上に張り付けている. しかし, 同じ物体を撮影した画像が複数あるときは, 物体あるいは視点を移動させて眺めた画像を生成するにはどの撮影画像のテクスチャを用いてもよい. 普通は, 生成しようとしている画像と最も似ている位置の撮影画像を用いる. どう選択すれば最も自然かという基準もいろいろ研究されている. 上の例では, 説明のために粗いモデルを用いているが, 三角形分割を細かくとれば自然な表示となる. しかし, 移動した物体モデルに別の画像のテクスチャをそのまま張り付けたのでは, 光に反射の具合が不自然になることがある. これを解決するには, 物体表面の反射特性や光源との位置関係まで考慮しなければならない. このようにして表示を本物らしく見せる技術は**レンダリング** (rendering)

と呼ばれ, さまざまな手法が確立されている. 3次元モデルが多面体のとき, 三角形パッチの境界で生じる光の反射関係の不連続をめだたなくする**スムーズシェーディング** (smooth shading) と呼ばれる技術もその一つである. しかし, このような3次元表示を行うためには, まず3次元モデルが必要である. これはユーザーがCAD ツールを用いて, 直接に作成してもよいが, 画像からそこに写っている物体の3次元モデルを作成することもできる. これは**コンピュータビジョン** (computer vision) と呼ばれ, 画像から3次元形状を計算する**3次元復元** (3D reconstruction) のさまざまな方法が開発されている.

### 6.3 三角形の射影変換

**射影変換** 射影変換 (projective transformation, homography) は次の形の1対1の写像である (→式 (5.13)).

$$\bar{x} = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}, \quad \bar{y} = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}} \quad (6.9)$$

このような射影変換によって, 線分は線分に写像されるが, 長さや長さの比や角度は保たれない. 正方形は一般の四辺形に写像される (図 6.7). 点  $(x, y)$ ,  $(\bar{x}, \bar{y})$  の同次座標を  $X : Y : Z$ ,  $\bar{X} : \bar{Y} : \bar{Z}$  とする (→ 5.6 節). すなわち,  $x = X/Z$ ,  $y = Y/Z$ ,  $\bar{x} = \bar{X}/\bar{Z}$ ,  $\bar{y} = \bar{Y}/\bar{Z}$  とする. 上式は次のように書き直せる (→ 式 (5.17)).

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

ただし,  $k$  は任意の0でない数である (→ 問題 6.5). すなわち, 同次座標をベクトルとみなせば, 射影変換は定数倍を除いて線形変換となる. 右辺の  $3 \times 3$  行列を**射影変換行列** (projection transformation matrix, homography matrix) と呼ぶ. 式 (6.9), (6.10) を式 (6.6), (6.7) と比較すればわかるように, 射影変換はアフィン変換の一般化であり,  $h_{31} = h_{32} = 0$  の場合がアフィン変換である.

**相反系** 3次元ベクトル  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  に対して, その**相反系** (reciprocal system)  $\{\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3\}$  とは,

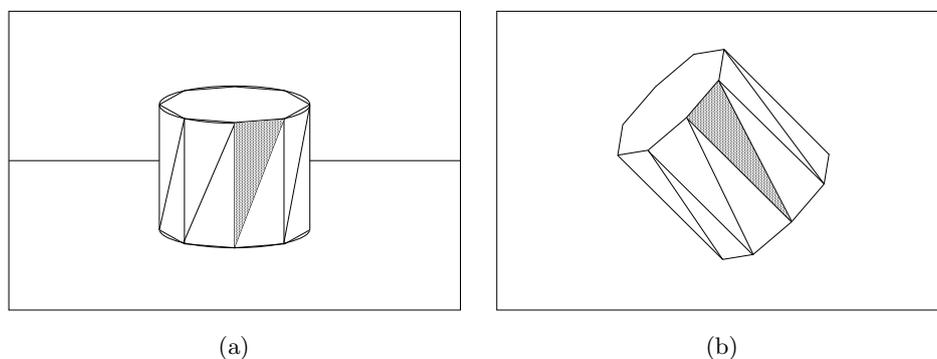


図 6.6: (a) 原画像上に3次元モデルを重ねて表示する. (b) 3次元モデルを別の位置に置いたものを表示し, その各三角形パッチに原画像上の対応するパッチをテクスチャマッピングを行う.

次のように定義されるベクトルである.

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3|}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3|}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3|} \quad (6.11)$$

**【命題 6.3】**  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  とその相反系  $\{\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3\}$  は, 次の関係を満たす.

$$(\mathbf{a}_i, \tilde{\mathbf{a}}_j) = \delta_{ij} \quad (6.12)$$

ただし,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ ( $i = j$  のとき 1,  $i \neq j$  のとき 0 をとる記号) である (→ 式 (3.58), (3.74)).

式 (6.12) は, ベクトル積  $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$  がベクトル  $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  に直交すること (→ 2.1 節), およびスカラ三重積  $|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3|$  が  $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$  に等しいこと (→ 式 (2.13)) から明らかである. ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  を列とする行列を  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$  とし, ベクトル  $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \tilde{\mathbf{a}}_3$  を列とする行列を  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{a}}_1 \ \tilde{\mathbf{a}}_2 \ \tilde{\mathbf{a}}_3)$  と置けば, 式 (6.12) は  $\mathbf{A}^\top \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$  (単位行列) であることを意味している. したがって, 次のようにも言える.

**【系 6.3】** 行列  $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{\mathbf{a}}_1 \ \tilde{\mathbf{a}}_2 \ \tilde{\mathbf{a}}_3)$  は行列  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3)$  の転置の逆行列 (あるいは逆行列の転置) である (→ 問題 6.6).

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^\top)^{-1} (= (\mathbf{A}^{-1})^\top) \quad (6.13)$$

**三角形の射影変換** 三角形  $\triangle ABC$  から三角形  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  への射影変換を考える. 点  $A, B, C$  の同次座標をそれぞれ  $X_A : Y_A : Z_A, X_B : Y_B : Z_B, X_C : Y_C : Z_C$  とし, 点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  の同次座標をそれぞれ  $X_{\bar{A}} : Y_{\bar{A}} : Z_{\bar{A}}, X_{\bar{B}} : Y_{\bar{B}} : Z_{\bar{B}}, X_{\bar{C}} : Y_{\bar{C}} : Z_{\bar{C}}$  とする. そして, ベクトル  $\{(X_A, Y_A, Z_A)^\top, (X_B, Y_B, Z_B)^\top, (X_C, Y_C, Z_C)^\top\}$  の相反系を  $\{(\tilde{X}_A, \tilde{Y}_A, \tilde{Z}_A)^\top, (\tilde{X}_B, \tilde{Y}_B, \tilde{Z}_B)^\top, (\tilde{X}_C, \tilde{Y}_C, \tilde{Z}_C)^\top\}$  とする.

**【命題 6.4】**  $\alpha\beta\gamma \neq 0$  の任意の定数  $\alpha, \beta, \gamma$  に対して,

$$\mathbf{H} = \alpha \begin{pmatrix} X_{\bar{A}} \\ Y_{\bar{A}} \\ Z_{\bar{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_A \\ \tilde{Y}_A \\ \tilde{Z}_A \end{pmatrix}^\top + \beta \begin{pmatrix} X_{\bar{B}} \\ Y_{\bar{B}} \\ Z_{\bar{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_B \\ \tilde{Y}_B \\ \tilde{Z}_B \end{pmatrix}^\top + \gamma \begin{pmatrix} X_{\bar{C}} \\ Y_{\bar{C}} \\ Z_{\bar{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_C \\ \tilde{Y}_C \\ \tilde{Z}_C \end{pmatrix}^\top \quad (6.14)$$

は 3 点  $A, B, C$  を 3 点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  に写像する射影変換行列である.

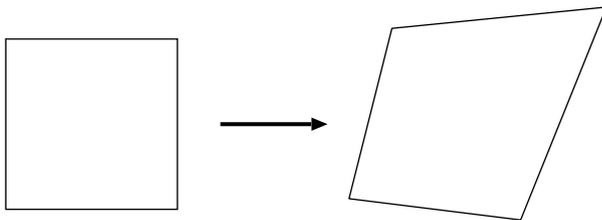


図 6.7: 射影変換によって, 正方形は一般の四辺形に写像される.

これは射影変換行列と相反系の定義より明らかである (→問題 6.7). 式 (6.10) の射影変換行列の定義より,  $H$  には定数倍の不定性があるので,  $\alpha, \beta, \gamma$  は全体を何倍しても同じ射影変換を表す. 次の関係が成り立つ (→問題 6.8, 6.9).

**【命題 6.5】**  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  と正規化すると, 式 (6.14) の  $(\alpha, \beta, \gamma)$  は三角形  $\triangle ABC$  の重心が写像される点の, 三角形  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  に関する重心座標である.

**【系 6.4】** 式 (6.14) がアフィン変換を表す条件は  $\alpha = \beta = \gamma$  のときである.

## 6.4 四辺形の射影変換

四辺形  $ABCD$  を四辺形  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  に写像する射影変換を考える. ただし,  $ABCD$  と  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  は一般の (すなわち, どの3頂点も同一直線上にない) 凸の四辺形であるとする. これらの間の射影変換を定めるには, 3点  $A, B, C$  を3点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  に写像する式 (6.14) の  $\alpha, \beta, \gamma$  を,  $D$  が  $\bar{D}$  に写像されるように定めればよい.

**【命題 6.6】** 式 (6.14) の射影変換行列  $H$  が点  $D$  を点  $\bar{D}$  に写像するような  $\alpha, \beta, \gamma$  は,

$$\begin{aligned} W_A &= \tilde{X}_A X_D + \tilde{Y}_A Y_D + \tilde{Z}_A Z_D, \\ W_B &= \tilde{X}_B X_D + \tilde{Y}_B Y_D + \tilde{Z}_B Z_D, \\ W_C &= \tilde{X}_C X_D + \tilde{Y}_C Y_D + \tilde{Z}_C Z_D \end{aligned} \tag{6.15}$$

と置き, 次の連立1次方程式を解いて定まる (→問題 6.10).

$$\begin{pmatrix} X_{\bar{A}}W_A & X_{\bar{B}}W_B & X_{\bar{C}}W_C \\ Y_{\bar{A}}W_A & Y_{\bar{B}}W_B & Y_{\bar{C}}W_C \\ Z_{\bar{A}}W_A & Z_{\bar{B}}W_B & Z_{\bar{C}}W_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

**(注 6.5)**

式 (6.16) の解の存在と一意性は, 四辺形  $ABCD$  と四辺形  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  が一般の凸の四辺形であることから保証される. 4点  $A, B, C, D$  を4点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  に写像する射影変換は, 問題 6.3 と同様にして, 直接に式 (6.9) の関係から計算することもできる (→問題 6.11).

**四辺形のテクスチャマッピング** 画像フレーム上に与えられた二つの一般の凸四辺形  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}, ABCD$  に対して, 4点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  の座標をそれぞれ  $(x_{\bar{A}}, y_{\bar{A}}), (x_{\bar{B}}, y_{\bar{B}}), (x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}), (x_{\bar{D}}, y_{\bar{D}})$  とし, 4点  $A, B, C, D$  の座標をそれぞれ  $(x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C), (x_D, y_D)$  とする. そして, それらの同次座標を次のように定める.

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X_{\bar{A}} \\ Y_{\bar{A}} \\ Z_{\bar{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\bar{A}} \\ y_{\bar{A}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_{\bar{B}} \\ Y_{\bar{B}} \\ Z_{\bar{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\bar{B}} \\ y_{\bar{B}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_{\bar{C}} \\ Y_{\bar{C}} \\ Z_{\bar{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\bar{C}} \\ y_{\bar{C}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

次のようにして, 四辺形  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  の内部のテクスチャを四辺形  $ABCD$  の内部に写像することができる.

### ●手順●

- 式 (6.17) の同次座標を用いて, 式 (6.15) の  $W_A, W_B, W_C$  を計算する.
- 式 (6.16) を解いて,  $\alpha, \beta, \gamma$  を定める.
- 式 (6.14) の射影変換行列  $\mathbf{H}$  を計算する.
- 四辺形  $ABCD$  に外接する長方形領域を指定し, その長方形領域の各画素  $(x, y)$  について次の計算を行う.
  1. 画素  $(x, y)$  が四辺形  $ABCD$  の内部にあれば, 次のように  $(\bar{x}, \bar{y})$  を定める.

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{Z}[\mathbf{H} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}] \quad (6.18)$$

ただし,  $\mathcal{Z}[\cdot]$  は第3成分を1にする正規化 (すなわち,  $\mathcal{Z}[(X, Y, Z)^\top] = (X/Z, Y/Z, 1)^\top$ ) を表す.

2. 四辺形  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  の点  $(\bar{x}, \bar{y})$  の画素値を画素  $(x, y)$  にコピーする.

### (注 6.6)

5.6 節に示したように, 同次座標は比のみが意味を持つから, 式 (6.17), (6.18) のように,  $Z$  成分を1としてよい. そして, 正規化  $\mathcal{Z}[\cdot]$  を行えば, 式 (6.10) の定数  $k$  は考える必要はない. 上の手順では, 各画素  $(x, y)$  に対して, まずそれが四辺形  $ABCD$  の内部にあるかどうかを判定する. これは点  $(x, y)$  が三角形  $\triangle ABC$  あるいは三角形  $\triangle BCD$  に含まれるかどうかを, 6.1 節に示した重心座標によって判定する. 注意することは, 式 (6.14) が  $\triangle ABC$  を  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  に写像する射影変換行列を定義しているのに, これを用いて四辺形  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$  を四辺形  $ABCD$  に写像していることである ( $\alpha, \beta, \gamma$  を式 (6.16) で定めれば,  $D$  は  $\bar{D}$  に写像される). これは, 注 6.3 で指摘したように, テクスチャを張り付けることは, 表示するフレームの各画素に対して, そこに書き込むべき画素値 (輝度値, あるいは RGB カラー値) を持つ画素を別の画像から探すことだからである. このため,  $(\bar{x}, \bar{y})$  から  $(x, y)$  への写像の逆写像することになる. 三角形のテクスチャマッピングの場合と同様に, 計算した  $(\bar{x}, \bar{y})$  は一般に整数座標ではないから, 周囲の画素値から双1次補間を行う.



図 6.8: (a) 投影すべきテクスチャ. (b) 3次元物体（建物など）を撮影した画像の、投影したい領域へテクスチャマッピングを行う。

**プロジェクションマッピング** 図 6.8(b) は 3次元物体（建物など）を撮影した画像であるとする。図 6.8(a) は平面部分に投影したい、ユーザーがデザインした図柄（テクスチャ）を正面から見たものであり、投影したい領域と同じアスペクト比（縦横比）の長方形内に描かれているとする。これを上に述べた方法で、図 6.8(b) の投影したい四辺形領域にそれぞれテクスチャマッピングを行う。そして、図 6.8(b) のテクスチャ部分のみからなる画像を、カメラの撮像と等価なプロジェクターで投影する。5.5 節、および 5.13 節で述べたように、3次元空間における平面から平面への透視投影、およびその逆投影は射影変換である。したがって、図 6.8(b) のように投影されたテクスチャの各部分を正面から見ると、図 6.8(a) と同じになっている。このようなプロジェクターによる投影は、**プロジェクションマッピング** (projection mapping) と呼ばれる。この原理を用いれば、逆に壁面や掲示板を斜めから撮影した画像を、射影変換によって正面から見た画像に変換することもできる。

#### (注 6.7)

図 6.8 は説明のための単純な例である。多くの面を持つ複雑な物体では、これを各平面部分ごとに行う。カメラの撮像とプロジェクターの投影を等価にするためには、あらかじめ、カメラとプロジェクターの撮像および投影のモデル化し、そのパラメータを推定する必要がある。これをカメラとプロジェクターの**校正** (calibration) と呼ぶ。現在、そのためのさまざまなツールが提供されている。なお、3次元物体の平面部分のテクスチャの画像と、それを正面から見たテクスチャとは射影変換で結ばれるから、6.2 節に示したテクスチャマッピングも、本来は射影変換を用いるべきである。しかし、物体表面を細かく三角形分割すれば、各三角形パッチの対応はアフィン変換で近似できる。アフィン変換は三角形の 3 頂点の対応のみから定まる（射影変換を定めるには、三角形内部のもう 1 点の対応が必要となる）。このため、テクスチャマッピングには通常はアフィン変換が用いられる。

**モザイク生成** シーン中の同一平面を異なる視点から撮影した 2 画像は、互いの射影変換になっている（→ 命題 5.10）。しかし、平面でなくても、ある程度（例えば 5 ~ 6m 以上の）遠距離のシーンは無限遠方の平面上に描かれた”絵”とみなせる。したがって、カメラを移動して撮影すると、画像は射影変換を受ける。この性質を利用して、複数の画像をつないで、大きな視野のパノラマ画像を

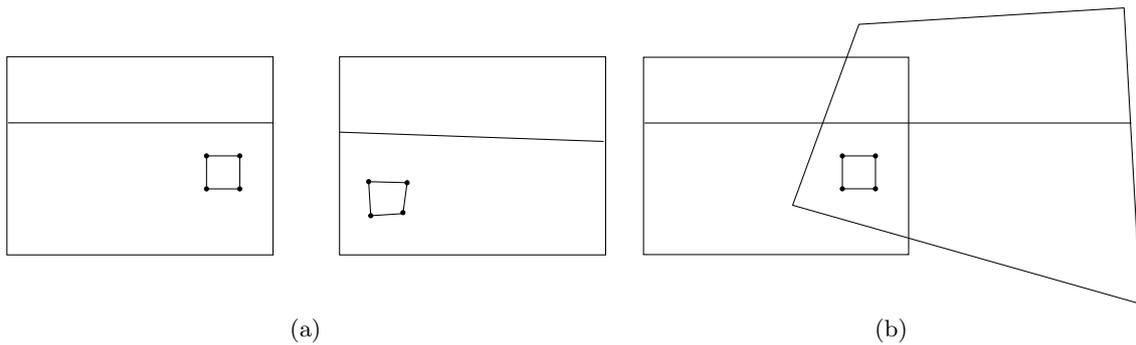


図 6.9: モザイク生成. (a) 2 画像間の 4 点の対応を定める. (b) その 4 点が他方の 4 点に写像されるような射影変換を定めて, 画像全体を変換して重ね合わせ, パノラマ画像にする.

作成することができる. 具体的には, 2 画像間の対応する 4 点を指定し, その 4 点が他方の 4 点に写像されるような射影変換を定めて, 画像全体を変換して重ね合わせる (図 6.9). これを重なりのある画像ごとに行う. この操作は**画像モザイク生成** (image mosaicing), あるいは略して**モザイク生成** (mosaicing) と呼ばれる.

**(注 6.8)**

2 画像間の射影変換は, 一般の位置にある対応する 4 点から一意的に定まる. 画像間の対応は, ユーザーが手で指定してもよいが, 画像処理によって対応点を自動的に探索することもできる. そして, そのような画像の対応付けのいろいろなアルゴリズムが開発されている. しかし, 自動探索を用いると, 画像によっては対応位置に多少の誤差が生じ, 生成したパノラマ画像の継ぎ目にずれが生じることがある. これを防ぐには, 多数の対応点を定め, それらがほぼよく対応するような射影変換を, 例えば最小 2 乗法で定めるほうがよい. 現在では最小 2 乗法よりも精度のよい計算法もいろいろ研究されている.

**練習問題**

- 6.1. 重心座標が面積比を表すこと, すなわち式 (6.4) が成り立つことを示せ.
- 6.2. 二つの三角形に対して, 各点を重心座標が等しい点に写像すると, これがアフィン変換になること, すなわち, 座標が式 (6.6) のような 1 次式によって変換されることを示せ.
- 6.3. 式 (6.6) のアフィン変換が 3 点  $\bar{A} : (x_{\bar{A}}, y_{\bar{A}})$ ,  $\bar{B} : (x_{\bar{B}}, y_{\bar{B}})$ ,  $\bar{C} : (x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}})$  を 3 点  $A : (x_A, y_A)$ ,  $B : (x_B, y_B)$ ,  $C : (x_C, y_C)$  に写像するように係数  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{23}$  を定める計算手順を示せ.
- 6.4. 双 1 次補間が式 (6.8) で与えられることを示せ.
- 6.5. 式 (6.9) の射影変換が, ベクトルと行列によって式 (6.10) のように書けることを示せ.
- 6.6. 転置の逆行列は逆行列の転置に等しいこと, すなわち次の関係が成り立つことを示せ.

$$(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top$$

- 6.7. 式 (6.14) の射影変換によって、3点  $A, B, C$  が3点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  に写像されることを示せ.
- 6.8. 命題 6.5 を証明せよ.
- 6.9. 系 6.4 を証明せよ.
- 6.10. 点  $A, B, C, D$  を点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  に写像するような射影変換行列  $H$  は、式 (6.14) の  $\alpha, \beta, \gamma$  を、式 (6.16) によって定めればよいことを示せ.
- 6.11. 式 (6.9) の射影変換が点  $A : (x_A, y_A), B : (x_B, y_B), C : (x_C, y_C), D : (x_D, y_D)$  を点  $\bar{A} : (x_{\bar{A}}, y_{\bar{A}}), \bar{B} : (x_{\bar{B}}, y_{\bar{B}}), \bar{C} : (x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}), \bar{D} : (x_{\bar{D}}, y_{\bar{D}})$  に写像するように係数  $h_{11}, h_{12}, \dots, h_{33}$  を定める計算手順を示せ.

## 第6章の要約

### 6.1 重心座標

- 平面上に三角形  $\triangle ABC$  を指定すれば、各点の「重心座標」が定まる.
  - 重心座標から、各点の座標が定まる.
  - 重心座標は  $\triangle ABC$  を分割する三角形の面積比を表す.
- 重心座標の符号によって、各点が  $\triangle ABC$  の内部か外部か、外部のときはどの辺のどちら側か判定できる.

### 6.2 三角形のアフィン変換

- 二つの三角形の各点を重心座標が等しい点に写像するものは、三角形間のアフィン変換である.
- 画像上の二つの三角形内部を、アフィン変換によって「テクスチャマッピング」することができる.
  - 画像の変換は、画像を表示すべきフレームの各画素に対して、そこに書き込むべき値をもつ画素を逆変換によって探し、その値をコピーする.
  - 画像上の整数値でない座標の点の画素値は、その周囲の画素値から「双1次補間」によって定める.
- 物体の3次元モデルの表面を三角形に分割し、各三角形パッチにテクスチャマッピングを施せば、物体を本物らしく表示し、それを任意に移動させることができる.

### 6.3 三角形の射影変換

- 平面上の射影変換は「射影変換行列」によって定まる。
  - － 射影変換行列には定数倍の不定性がある。
- 二つの三角形の間の射影変換は、頂点の位置の同次座標とその「相反系」によって定まる。
  - － その射影変換は、重心が写像される点の重心座標によってパラメータ化される。
  - － 重心が重心に写像される場合にアフィン変換となる。

### 6.4 四辺形の射影変換

- 四辺形から四辺形への射影変換は、3点間の射影変換が残りの点を正しく写像するようにパラメータを選んで定まる。
- 射影変換を用いて、四辺形から四辺形へのテクスチャマッピングが行える。
- デザインした図柄を射影変換し、プロジェクターで3次元物体（建物など）に投影することにより、図柄を物体表面に描いたような「プロジェクションマッピング」を行うことができる。
- 別々に撮影した画像を、一つの画像が他の画像と部分的に重なるように射影変換することにより、視野の広いパノラマ画像を作成する「モザイク生成」が行える。

## 雑談

テクスチャマッピングは今日広く使われているので、色や模様がついた物体が表示されても、そういう物体だと思って、何の違和感もない。そして、その物体のモデル自体には色や模様はなく、それが画面に表示される瞬間、瞬間に、その表面部分にテクスチャ画像が写像されるというには、あまり思い至らないであろう。いわば、われわれの目がコンピュータにだまされているとも言える。それに対して、始めから色や模様を備えた3次元データを用意することも行われる。これは3次元空間全体を細かい立方体（それぞれを「ボクセル」(voxel)と呼ぶ)に分割し、各ボクセルに対応するメモリを用意して、その点の色や模様のデータを記憶しておくものである。代表的なものは、CTやMRIで撮影した人体内部の臓器のデータである。このようなデータ（「ボリュームデータ」(volume data)と呼ばれる）を用いれば、物体の任意の断面や内部を表示できる。物体内部の色や模様は「ソリッドテクスチャ」(solid texture)とか「3次元テクスチャ」(3D texture)などと呼ばれる。

実際の3次元シーンのボリュームデータを作成するには膨大なメモリが必要であるだけでなく、動的な表示のための高速な更新処理が必要となる。そして、そのための専用ハードウェアと処理システムが開発されている。コンピュータグラフィクスはハードウェアの進歩によって発展しただけでなく、

コンピュータグラフィックスの発展自体がハードウェアが進歩を促進している面もある。これは特にゲームアプリケーションで著しい。コンピュータグラフィックスに用いる幾何学的モデルの設計や表示の理論的背景は、杉原 [49] を参照するとよい。一方、カメラで撮影した画像からその3次元モデルを生成するコンピュータビジョンの技術については、金谷ら [67] が詳しい。

6.4 節に述べたプロジェクションマッピング（「ビデオマッピング」(video mapping) とも呼ばれる）は、近年いろいろなイベントなどで行われ、広く知られるようになった。そして、そのためのソフトや機器が開発されている。

一方、モザイク生成は写真がデジタル化されるようになってから、手軽にパノラマ画像が作れるソフトが普及した（初心者向けの解説記事は例えば [69]）。このとき多数の写真を射影変換によって張り合わせていくと、視野の周辺で極端に広がってしまう。しかし、パノラマ画像を一枚の平面にする必要はなく、画像対ごとに射影変換をあらかじめ計算しておけば、視点を移動するごとに、視点の周りをパノラマ画像にすることができる（具体的な計算法は、例えば [71] にある）。この原理を使えば、HMD（ヘッドマウントディスプレイ）を装着したユーザーに全周囲を一つのシーンのように見せる「仮想現実感」(virtual reality) が実現できる。

画像を射影変換で張り合わせるためには、画像間の対応点を指定しなければならない。そのためには、まず各画像で指定しやすい目立つ、例えば箱の角などの「特徴点」(feature point) を抽出する。これを自動で行う古くから知られている手法は、「ハリス演算子」(Harris operator)[57] である。これは画像の輝度値の変化が著しい点を抽出するものである。そして、画像間で抽出した特徴点の周辺の輝度値のパターンが似ているものを対応づける。現在、広く使われているのは、「SIFT 演算子」(SIFT operator)[70] である。これは輝度値の変化が特徴的な点を抽出するとともに、それを特徴づける周辺の輝度変化のヒストグラム情報を「記述子」(descriptor) というベクトル量で記述する。これを利用して、記述子の値が近い点を対応づけることができる。しかし、このような自動的な処理では誤対応が避けられない。誤対応を除去するための古くから知られている原理は、「RANSAC」 [56] である。これは特徴点を4点ごとに組み合わせて、それらが定める画像間の射影変換が残りの特徴点を正しく写像するかどうかを調べるものである（具体的な計算法は [67] に述べられている）。得られた多数の特徴点の対応から射影変換を精度よく計算する最新の方法は [67] に述べられている。

## 第7章 変換群と幾何学

### あらまし

本章では、本書で扱ったさまざまな空間の変換と幾何学を体系的に整理する。ここでは、ユークリッド変換、相似変換、アフィン変換、射影変換を考え、それらに対する不変な性質と、それに対応するユークリッド幾何学、相似幾何学、アフィン幾何学、射影幾何学との関係を明らかにする。そして、図形の変換と座標系の変換が同等な役割を果たし、互いに逆変換の関係にあることを示す。さらに、複数の点の変換前後の位置（一般に誤差を含む）からその変換（ユークリッド変換、相似変換、アフィン変換、射影変換）を計算する方法を述べる。本章の内容は任意の次元で成り立つことであるが、ここでは直観的にイメージしやすいように2次元の場合について説明する。

### 7.1 変換群

5.3節で述べたように、空間のそれ自身への全単射（1対1の上への写像）を、その空間上の**変換** (transformation) という。そして、そこに示したように、ある変換の集合に対して、

1. 合成に関して閉じている、すなわち、その二つの変換を合成したのもその集合に含まれる、
2. 恒等変換もその集合に含まれる、
3. その集合の変換の逆変換もその集合に含まれる、

が成り立つとき、その変換の集合は**変換群** (group of transformation) であるという。

$xy$  平面上で変換群を作る代表的な変換は、ユークリッド変換、相似変換、アフィン変換、射影変換である。図形のその変換に対して不変な性質の研究が、その変換に対応する「幾何学」である。すなわち、ユークリッド変換、相似変換、アフィン変換、射影変換に不変な性質の研究が、それぞれユークリッド幾何学、相似幾何学、アフィン幾何学、射影幾何学である。

### 7.2 ユークリッド変換

**ユークリッド変換** 次の式で表される変換を**ユークリッド変換** (Euclidean transformation) という。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

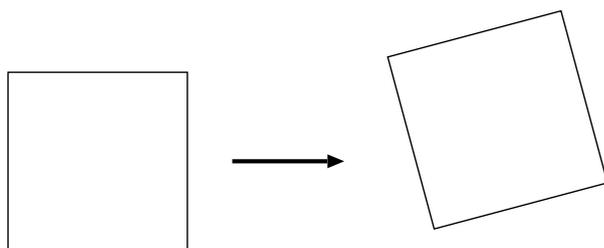


図 7.1: ユークリッド変換によって, 正方形は合同な正方形に写像される.

これは, **剛体運動** (rigid motion) (単に**運動** (motion) ともいう), あるいは**合同変換** (congruence transformation) と呼ばれ, 点  $(x, y)$  を原点  $O$  の周りに角度  $\theta$  だけ回転し, それを  $(t_1, t_2)$  だけ平行移動することを表す. これによって, 2点間の距離も2直線間の角度も変化しない. したがって, 例えば正方形は合同な正方形に写像される (図 7.1). 式 (7.1) は次のように書き直すこともできる.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & t_1 \\ \sin \theta & \cos \theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

**ユークリッド幾何学** ユークリッド変換の逆変換もユークリッド変換であり, 恒等変換もユークリッド変換であるから, ユークリッド変換全体は群を作り, **ユークリッド変換群** (group of Euclidean transformations) と呼ばれる. 二つの図形がユークリッド変換で結ばれているとき, すなわち, 一方をユークリッド変換したものが他方に重なるとき, 二つの図形は互いに**合同** (congruent) であるという. ユークリッド変換に不変な性質, すなわち, 合同な図形のすべてについていえる性質を解析して体系化することを**ユークリッド幾何学** (Euclidean geometry) と呼ぶ. 例えば三角形や四辺形の面積, 各辺の長さ, 二つの辺の成す角度などはユークリッド幾何学の対象である. 一方, 三角形や四辺形の一つの頂点が原点  $O$  に一致することや, ある辺が  $x$  軸に平行であることはユークリッド幾何学の対象ではなく, それらに関する命題はユークリッド幾何学の定理とはなり得ない.

**座標系のユークリッド変換** 1.4節で指摘したように, 図形の変換は座標系の変換に対応する. すなわち, 固定した座標系に対して図形が変化すると考えること (「アリバイの立場」) と, 固定した図形に対して座標系が変化すると考えること (「エイリアスの立場」) は, 同じことの別の見方であり, 両者は式の上では互いに逆変換となる (→ 1.4節). 例えば, 太陽の動きは, 固定した地球の周りに太陽が東から西に回ると考えても, 固定した太陽に対して地球が逆に西から東に回るとみなしても同等である. 例えば,  $xy$  座標系が原点の周りに角度  $\theta$  だけ回転して,  $(t_1, t_2)$  だけ平行移動した  $x'y'$  座標系を考える (図 7.2). このとき,  $xy$  座標系に関して位置  $(x, y)$  の点が, 変換された  $x'y'$  座標系から見ると位置  $(x', y')$  であるとき,  $(x, y)$  から  $(x', y')$  への変換は式 (7.1) の**逆変換になっている**. すなわち, 点を原点の周りに角度  $\theta$  だけ回転して  $(t_1, t_2)$  だけ平行移動することは, 点を固定して, 座標系を  $(-t_1, -t_2)$  だけ平行移動して原点の周りに角度  $-\theta$  だけ回転することに等価である (→ 式 (1.40), (1.41), 図 1.10).

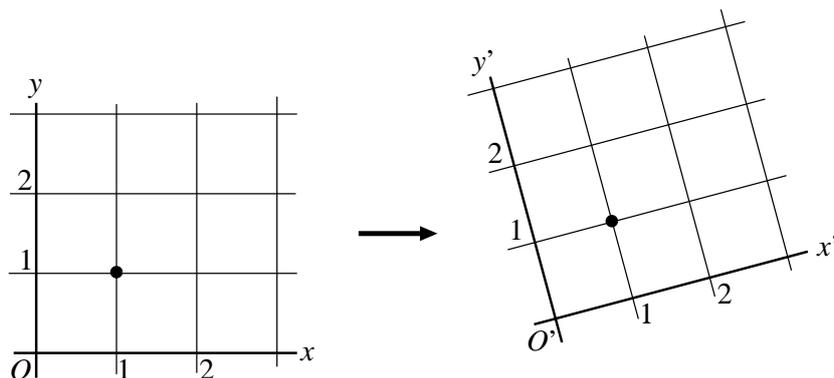


図 7.2: 座標系のユークリッド変換.

### 7.3 相似変換

**相似変換** 次の式で表される変換を**相似変換** (similar transformation) という.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0 \quad (7.3)$$

これは点  $(x, y)$  を原点  $O$  の周りに角度  $\theta$  だけ回転し、それを  $s$  倍に拡大・縮小してから  $(t_1, t_2)$  だけ平行移動することを表す. これによって、2点間の距離は変化するが、2直線間の角度も変化しない. したがって、例えば正方形は異なるサイズの正方形に写像される (図 7.3). 式 (7.3) は次のように書き直すこともできる.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & t_1 \\ s \sin \theta & s \cos \theta & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0 \quad (7.4)$$

**相似幾何学** 相似変換の逆変換も相似変換であり、恒等変換も相似変換であるから、相似変換全体は群を作り、**相似変換群** (group of similar transformations) と呼ばれる.  $s = 1$  の場合がユークリッド変換であるから、ユークリッド変換は相似変換の特殊な場合であり、ユークリッド変換群は相似変換群の部分群となっている. 二つの図形が相似変換で結ばれているとき、二つの図形は互いに**相似** (similar) であるという. 相似変換に不変な性質、すなわち、それと相似な図形のすべてについていえる性質を解析して体系化することを**相似幾何学** (similar geometry) と呼ぶ. 例えば三角形や四辺形の

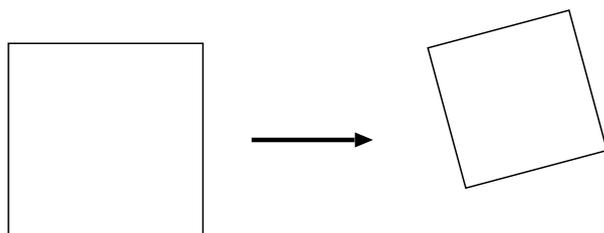


図 7.3: 相似変換によって、正方形はサイズの異なる正方形に写像される.

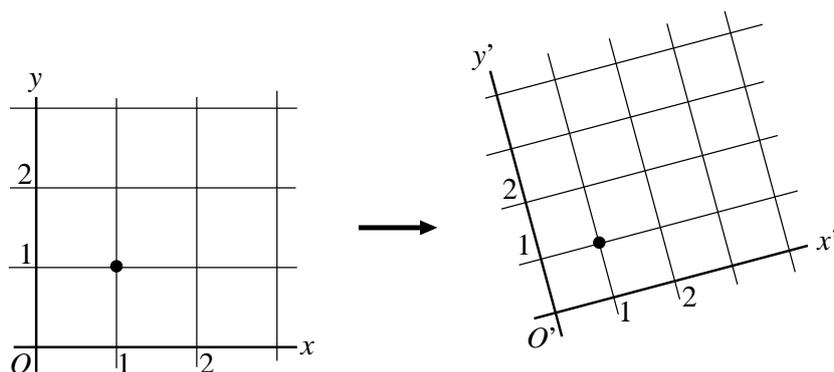


図 7.4: 座標系の相似変換.

面各辺の関係（二等辺三角形，正方形，など）や二つの辺の成す角度などは相似幾何学の対象である。

**座標系の相似変換** ユークリッド変換の場合と同様に，固定した座標系に対して図形が相似変換することは，固定した図形に対して座標系が相似変換すると考えるのと同様であり，式の上では互いに逆変換となる．具体的には， $xy$  座標系を  $s$  倍して原点の周りに角度  $\theta$  だけ回転して， $(t_1, t_2)$  だけ平行移動した  $x'y'$  座標系を考えると（図 7.4）， $xy$  座標系に関して位置  $(x, y)$  の点が，変換された  $x'y'$  座標系から見たとき位置  $(x', y')$  であるなら， $(x, y)$  から  $(x', y')$  への変換は式 (7.3) の**逆変換**になっている。

**(注 7.1)**

ユークリッド変換と相似変換の違いはスケールの変化のみであるから，便宜上ユークリッド変換と相似変換，ユークリッド幾何学と相似幾何学を区別しないことが多い．例えば，面積の比例関係も通常はユークリッド幾何学の一部とみなされる．また，例えば，画像からシーンや物体の 3 次元形状を計算すると，絶対的なスケールは不定である（遠くの大きい物体と近くの小さい物体が区別できないから）．しかし，角度や部分の比は正しいので，通常，**ユークリッド復元** (Euclidean reconstruction) と呼ばれる。

### 7.4 アフィン変換

**アフィン変換** 次の式で表される変換を**アフィン変換** (similar transformation) という（→式 (5.14), (6.6)）。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \quad (7.5)$$

これによって，2 点間の距離や 2 直線間の角度は変化するが，平行線は平行線に移る．したがって，例えば正方形は平行四辺形に写像される（図 7.5）．同一直線上の複数の点の間隔の比はアフィン変換によって変化しない．したがって，中点は中点に写像される。

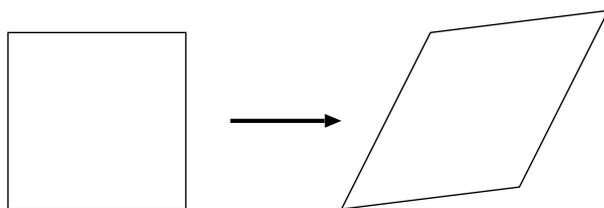


図 7.5: アフィン変換によって, 正方形は平行四辺形に写像される.

式 (7.5) は次のように書き直すこともできる.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \quad (7.6)$$

**アフィン幾何学** アフィン変換の逆変換もアフィン変換であり, 恒等変換もアフィン変換であるから, アフィン変換全体は群を作り, **アフィン変換群** (group of affine transformations) と呼ばれる. 式 (7.5) の右辺の行列が回転行列の  $s$  ( $\neq 0$ ) 倍のときが相似変換であり,  $s = 1$  のときがユークリッド変換であるから, ユークリッド変換も相似変換もアフィン変換の特殊な場合であり, ユークリッド変換群および相似変換群はアフィン変換群の部分群である. ユークリッド変換, 相似変換の場合と同様に, 図形のアフィン変換に不変な性質を解析して体系化することを**アフィン幾何学** (affine geometry) と呼ぶ. 例えば平行線や中点に関して成り立つ性質はアフィン幾何学の対象である.

**座標系のアフィン変換** ユークリッド変換や相似変換の場合と同様に, 固定した座標系に対して図形がアフィン変換することは, 固定した図形に対して座標系がアフィン変換すると考えるのと同様であり, 式の上では互いに逆変換となる. 具体的には,  $xy$  座標系をアフィン変換した  $x'y'$  座標系を考えると (図 7.6),  $xy$  座標系に関して位置  $(x, y)$  の点が, 変換された  $x'y'$  座標系から見たとき位置  $(x', y')$  であるなら,  $(x, y)$  から  $(x', y')$  への変換は式 (7.5) の**逆変換になっている**. アフィン変換された座標系は, **斜交座標系** (oblique coordinate system) と呼ばれる. それに対して, 通常の座標系は**直交座標系** (orthogonal coordinate system), あるいは**デカルト座標系** (Cartesian coordinate system) と呼ばれる.

## 7.5 変換の計算

**複数の点の写像**  $N$  点  $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$  がユークリッド変換, あるいは相似変換, あるいはアフィン変換によって  $(x'_1, y'_1), \dots, (x'_N, y'_N)$  に写像されたとき, これらの写像前後の位置から変換を, すなわち, 変換式の係数を計算する問題を考える. ユークリッド変換も相似変換もアフィン変換の特別な場合であるから, アフィン変換が計算できればよい. 三角形から三角形の場合, すなわち  $N = 3$  の場合は前章で示した ( $\rightarrow$  問題 6.3). ここでは  $N$  点すべてを用いる方法を考える. これにより, 点

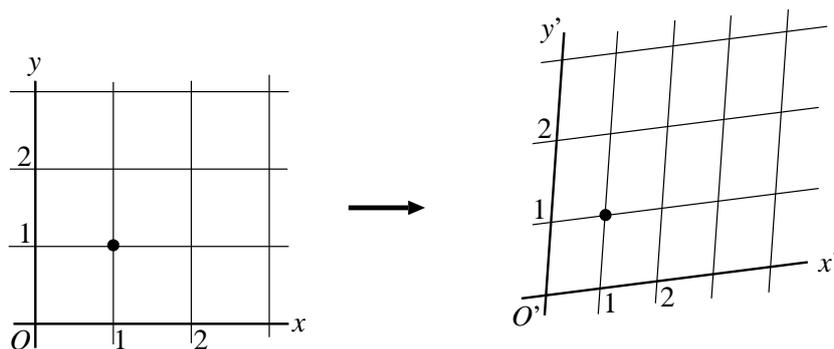


図 7.6: 座標系のアフィン変換.

の位置に誤差による多少のずれがあっても、全部の点の写像を近似する変換が計算されるという利点がある。アフィン変換に対して（したがって、ユークリッド変換，相似変換に対しても）成り立つ次の性質に注意する。

**【命題 7.1】** アフィン変換によって（したがって、ユークリッド変換，相似変換によっても），重心は重心に写像される。

(証明) 次のように置く。

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha}, \quad \bar{x}' = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}, \quad \bar{y}' = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha} \quad (7.7)$$

式 (7.5) の  $x, y, x', y'$  をそれぞれ  $x_{\alpha}, y_{\alpha}, x'_{\alpha}, y'_{\alpha}$  とした式に  $(1/N) \sum_{\alpha=1}^N$  とすると、

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} x'_{\alpha} \\ y'_{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha} \\ y_{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

であり、書き直すと、

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

となる。これは重心  $(\bar{x}, \bar{y})$  が重心  $(\bar{x}', \bar{y}')$  に写像されることを意味する。□

**変換係数の計算**  $x_{\alpha}, y_{\alpha}, x'_{\alpha}, y'_{\alpha}$  に対する式 (7.5) の両辺から式 (7.9) の両辺を引くと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x'_{\alpha} - \bar{x}' \\ y'_{\alpha} - \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha} - \bar{x} \\ y_{\alpha} - \bar{y} \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

これを  $\alpha = 1, \dots, N$  に対して並べると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x'_1 - \bar{x}' & \cdots & x'_N - \bar{x}' \\ y'_1 - \bar{y}' & \cdots & y'_N - \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & \cdots & x_N - \bar{x} \\ y_1 - \bar{y} & \cdots & y_N - \bar{y} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

右辺最後の行列の転置を両辺に右からに掛けると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} x'_1 - \bar{x}' & \cdots & x'_N - \bar{x}' \\ y'_1 - \bar{y}' & \cdots & y'_N - \bar{y}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} \\ \vdots & \vdots \\ x_N - \bar{x} & y_N - \bar{y} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & \cdots & x_N - \bar{x} \\ y_1 - \bar{y} & \cdots & y_N - \bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} \\ \vdots & \vdots \\ x_N - \bar{x} & y_N - \bar{y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.12)$$

両辺を  $N$  で割って書き直すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N (x'_\alpha - \bar{x}') (x_\alpha - \bar{x}) / N & \sum_{\alpha=1}^N (x'_\alpha - \bar{x}') (y_\alpha - \bar{y}) / N \\ \sum_{\alpha=1}^N (y'_\alpha - \bar{y}') (x_\alpha - \bar{x}) / N & \sum_{\alpha=1}^N (y'_\alpha - \bar{y}') (y_\alpha - \bar{y}) / N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x})^2 / N & \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x})(y_\alpha - \bar{y}) / N \\ \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \bar{y})(x_\alpha - \bar{x}) / N & \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \bar{y})^2 / N \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.13)$$

ゆえに、アフィン変換の係数行列が次のように定まる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N (x'_\alpha - \bar{x}') (x_\alpha - \bar{x}) / N & \sum_{\alpha=1}^N (x'_\alpha - \bar{x}') (y_\alpha - \bar{y}) / N \\ \sum_{\alpha=1}^N (y'_\alpha - \bar{y}') (x_\alpha - \bar{x}) / N & \sum_{\alpha=1}^N (y'_\alpha - \bar{y}') (y_\alpha - \bar{y}) / N \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x})^2 / N & \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x})(y_\alpha - \bar{y}) / N \\ \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \bar{y})(x_\alpha - \bar{x}) / N & \sum_{\alpha=1}^N (y_\alpha - \bar{y})^2 / N \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (7.14)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  が定まれば、 $a_{13}, a_{23}$  は式 (7.9) から

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

によって定まる。変換が相似変換であれば、式 (7.14) の左辺の行列は回転行列にある定数  $s$  を掛けたものであるから、各行、各列のノルムが  $s$  であることから、あるいは行列式が  $s^2$  であることから  $s$  が定まる。

**(注 7.2)**

上の計算は、変換による点の位置のずれの2乗和が最小になるように係数を定める最小2乗法を適用したことに相当する (→問題 7.1)。ここでは式 (7.5) を用いて行列部分とベクトル部分を別々に定めたが、式 (7.6) を用いてすべての要素を同時に計算することもできる (→問題 7.2)。しかし、実質的な計算は同じである。統計学の観点からは、位置のずれ2乗和を最小にすることは、各点の位置の誤差が、期待値 0、ある標準偏差  $\sigma$  の独立な正規分布に従うとき、**尤度** (likelihood) を最大にする**最尤推定** (maximum likelihood estimation) と解釈できる。そして、式 (7.13) の左辺の行列は、点集合  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$  の**共分散行列** (covariance matrix) と呼ばれている。それに対して、右辺最後の行列は点集合  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}, \{(x'_\alpha, y'_\alpha)\}$  の間の**相関行列** (correlation matrix) と呼ばれている。

**(注 7.3)**

相似変換の場合に、拡大・縮小の比  $s$  を定めるには、理論的にはどの列またはどの行のノルムを用いても、行列式を用いてもよいが、実際問題では全体から最小二乗の意味で次のように定めるとよい。

$$s = \sqrt{\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}{2}} \tag{7.16}$$

ユークリッド変換の場合は、理論的には式 (7.14) の左辺は回転行列であり、相似変換の場合は計算した  $s$  で割ったものが回転行列となるはずである。しかし、データの誤差があるときは厳密に回転行列になっているとは限らない。回転行列に近い行列  $A$  を厳密な回転行列  $R$  に補正するには、まず  $A$  を次のように**特異値分解** (singular value decomposition) する。

$$A = U \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} V^T \tag{7.17}$$

ここに  $U, V$  は直交行列であり、 $\sigma_1 \geq \sigma_2 (\geq 0)$  は**特異値** (singular value) である。そして、これを次のように変形する。

$$R = UV^T \tag{7.18}$$

すなわち、 $\sigma_1, \sigma_2$  ( $A$  が回転行列に近ければ  $\sigma_1 \approx 1, \sigma_2 \approx 1$ ) を 1 に置き換える。これによって  $R$  は厳密な回転行列となる。

式 (7.16)–(7.18) の計算は、誤差が独立な同一の正規分布であっても、もはや最尤推定の意味はない。しかし、変換が誤差のある点の純粋な (すなわち並進やスケール変化を含まない) 回転であるときは式 (7.17), (7.18) の解は最尤推定になっていることが示せる。並進やスケール変化がある場合を統計解析しようとする時、すべての変数間に相関が生じて、スケールのみ、回転のみを個別に扱うことができなくなる。

## 7.6 射影変換

**射影変換** 6.3 節で述べたように、**射影変換** (projective transformation, homography) は次の式で表される (→ 式 (6.9), (5.13))。

$$x' = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}, \quad y' = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}} \tag{7.19}$$

これによって線分は線分に写像されるが、長さや長さの比や角度は保たれない。したがって、例えば正方形は一般の四辺形に写像される (図 7.7)。

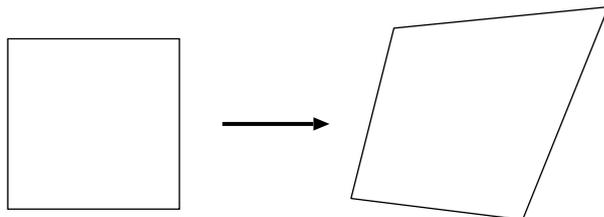


図 7.7: 射影変換によって、正方形は一般の四辺形に写像される。

同次座標を用いると、式 (7.19) は次のように書き直せる. (→式 (5.17), 問題 6.5).

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

ただし,  $k$  は任意の 0 でない数である.

**射影幾何学** 射影変換の逆変換も射影変換であり, 恒等変換も射影変換であるから, 射影変換全体は群を作り, **射影変換群** (group of projective transformations) と呼ばれる. 式 (7.19) の分母で  $h_{33} = h_{32} = 0, h_{33} \neq 0$  のときがアフィン変換であるから, アフィン変換は射影変換の特殊な場合であり, 射影変換群の部分群を作る. したがって, 相似変換群もユークリッド変換群も射影変換群の部分群である. ユークリッド変換, 相似変換, アフィン幾何学と同様に, 図形の射影変換に不変な性質を解析して体系化することが**射影幾何学** (projective geometry) である. 射影変換に不変な量の代表的なもの**は複比** (cross ratio) である (→5.1 節).

**座標系の射影変換** ユークリッド変換, 相似変換, アフィン変換と同様に, 固定した座標系に対して図形が射影換することは, 固定した図形に対して座標系が射影変換するのと同様であり, 式の上では互いに逆変換となる. 具体的には,  $xy$  座標系をアフィン変換した  $x'y'$  座標系を考えると (図 7.8),  $xy$  座標系に関して位置  $(x, y)$  の点  $P$  が, 変換された  $x'y'$  座標系から見たとき位置  $(x', y')$  であるなら,  $(x, y)$  から  $(x', y')$  への変換は式 (7.19) の**逆変換**になっている.

5.4 節で述べたように, 射影変換した  $x'y'$  座標系は「原点」(座標が  $(0,0)$  となる点), 「単位点」(座標が  $(1,1)$  となる点), 「無限点」(座標が  $(\infty, 0), (0, \infty)$  となる点), 「単位点」(座標が  $(1,1)$  となる点), の 4 点を指定すれば定まる. それ以外の点の座標は複比によって定まる. すなわち, 各点の  $x'$  座標は, 無限点  $(\infty, 0)$  とその点を結ぶ直線の  $x'$  軸との交点の,  $x'$  軸上での原点, 単位点, 無限点に関する複比で定まる. ただし,  $x'$  軸上の単位点は, 無限点  $(\infty, 0)$  と単位点  $(1, 1)$  を結ぶ直線と  $x'$  軸との交点である. 同様に, 各点の  $y'$  座標は, 無限点  $(0, \infty)$  とその点を結ぶ直線の  $y'$  軸との交点の,  $y'$  軸

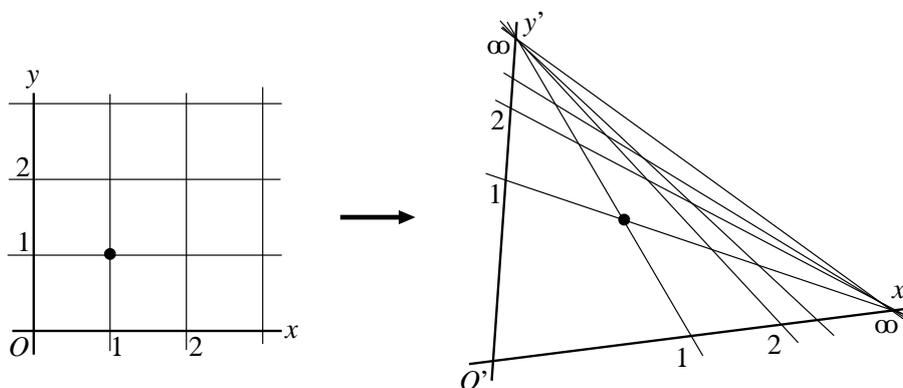


図 7.8: 座標系の射影変換. 座標系は原点  $(0, 0)$ , 単位点  $(1, 1)$ , 無限点  $(\infty, 0), (0, \infty)$  を指定して定まる. 無限点  $(\infty, 0), (0, \infty)$  をそれぞれの軸上の無限遠方に遠ざけるとアフィン座標系となる.

上での原点，単位点，無限遠点に関する複比で定まる．無限点  $(\infty, 0)$ ,  $(0, \infty)$  を，それぞれ  $x'$ ,  $y'$  軸上の無限遠方に遠ざけるとアフィン座標系となる．

**射影変換の計算**  $N$  点  $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$  が射影変換によって  $(x'_1, y'_1), \dots, (x'_N, y'_N)$  に写像されたとき，アフィン変換の場合と同様に，これらの写像前後の位置から射影変換を計算することができる． $N = 4$  の場合は 6.4 節で示した (→問題 6.3) ．一般の  $N$  に対しては，式 (7.19) を用いて問題 6.3 の方法を拡張して，最小 2 乗の意味で近似する  $N$  点全体の射影変換を計算することができる (→問題 7.3) ．

**(注 7.4)**

アフィン変換の場合と異なり，射影変換に対しては問題 7.3 のような最小 2 乗の方法は最尤推定の意味を持たない．これは，誤差が現実世界における長さや角度の “測定” に由来するものであり，ユークリッド幾何学的な概念だからである．したがって，射影幾何学を記述する射影空間の同次座標 (比のみが意味をもつ) の “誤差” は概念的に考えることができない．それでも，通常の座標 (非同次座標) で表したときの最尤推定 (位置ずれの 2 乗和の最小化) を計算することはできる．これにはやや複雑な反復計算が必要となる．

### 7.7 変換群の構造

**変換群の階層構造** 以上をまとめると，図 7.9 に示すような包含関係が得られる．すなわち，ユークリッド変換群は相似変換群の部分群であり，相似変換群はアフィン変換群の部分群であり，アフィン変換群は射影変換群の部分群である．そして，恒等変換それ自体で，これらすべてに含まれる部分群を作る．

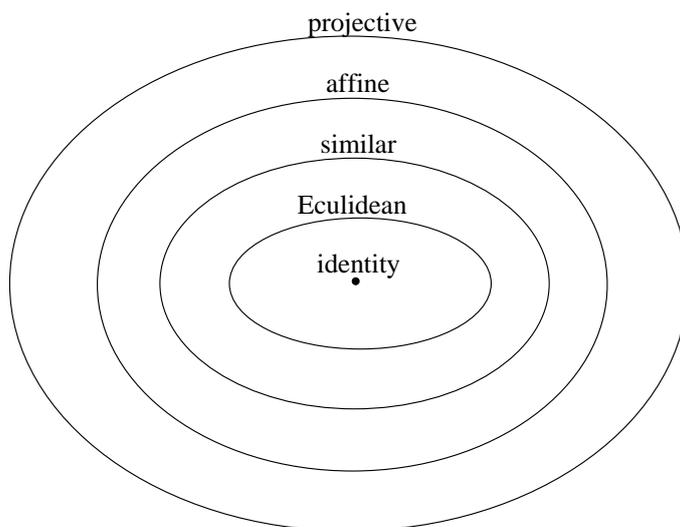


図 7.9: 射影変換群，アフィン変換群，相似変換群，ユークリッド変換群 の包含関係．恒等変換はそれ自体が，すべてに含まれる部分群である．

これ以外の部分群もいろいろ存在する。例えば、並進から成る**並進群** (group of translations) と回転から成る**回転群** (group of rotations) は共にユークリッド変換群の部分群である。両者の共通部分は恒等変換のみであり、両者が生成する部分群（すなわち、それらを含む最小の部分群）がユークリッド変換群である。一方、拡大・縮小全体も相似変換の部分群であり、それとユークリッド変換群が相似変換群を生成する。また、拡大縮小と並進の組み合わせ、および拡大縮小と回転の組み合わせもそれぞれ相似変換群の部分群を作る。

**不変量と不変性** 与えられた変換群に対して、不変な量、すなわち、変換前の図形で計算しても、変換後の図形で計算しても同じ値であるものを、その変換の**不変量** (invariant) という。また、変換前の図形がある性質を備えていれば、変換後でもそうであるとき、その性質はその変換に対する**不変性** (invariance) をもつという。各変換に対する代表的な不変量と不変性には次のようなものがある。

**射影変換** 4点の複比、点の共線性（同一直線上にあること）、直線の共点性（同一の点で交わること）

**アフィン変換** 3点の比、直線の平行性

**相似変換** 2直線の成す角度、直線の直交性

**ユークリッド変換** 2点間の距離、図形の面積

これらは変換群の階層構造に対応する階層構造をもつ。すなわち、射影変換の不変量や不変性は、それに含まれるすべての部分群の不変量や不変性でもある。例えば、射影変換、アフィン変換、相似変換の不変量はすべてユークリッド変換の不変量でもある。当然ながら、恒等変換に対しては、あらゆる量が不変量であり、あらゆる性質が不変性をもつ。

**エルランゲン目録** 5.7節の注5.18で述べたように、幾何学を変換群と対応づけて、幾何学は変換群に不変な性質の研究であるとみなしたのは、ドイツの数学者**クライン** (Felix Christian Klein: 1849–1925) であり、この考えは彼がエルランゲン大学就任講演で述べたことから、**エルランゲン目録** (Erlangen program) として知られている。

#### (注 7.5)

7.5, 7.6節では、誤差のある変換前後の点の位置から変換を計算する問題を考えた。そこに示したように、変換がユークリッド変換、相似変換、アフィン変換、あるいは射影変換であるとすれば、その変換係数が定まる。しかし、点の位置の誤差のために、どの変換もデータ点をその通りに写像するわけではない。このとき、“本当の変換”は何と考えるとよいのだろうか。単純に考えると、それらの変換候補の中から、位置ずれの2乗和（これを**残差** (residual) と呼ぶ）が最小になるものを選ばばよいように思える。しかし、それでは常に射影変換が選ばれてしまう。それは変換に図7.9のような包含関係があるからである。一般に、候補のクラス  $A$  と候補のクラス  $B$  が図7.10のような包含関係にあると、データとの合致の度合いをどのような距離尺度で測っても、

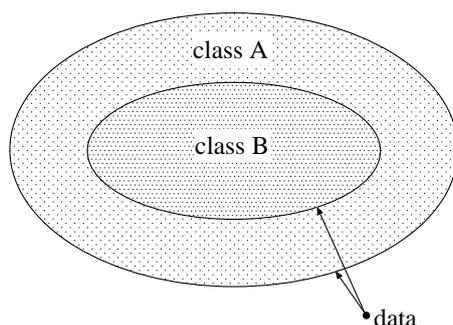


図 7.10: データとの合致の度合いをどのような距離尺度で測っても, クラス B のその距離を最小にする候補とクラス A のその距離を最小にする候補を比較すると, 前者が後者より小さくなることはない.

クラス B のその距離を最小にする候補とクラス A のその距離を最小にする候補を比較すると, 前者が後者より小さくなることはない.

変換の包含関係が生じるのは, 各変換の**自由度** (degree of freedom), すなわちそれを指定するパラメータの数の違いのためである. 射影変換は 9 個の係数をもつが, その比のみに意味があるので, 自由度は 8 である. それに対して, アフィン変換, 相似変換, ユークリッド変換の自由度はそれぞれ 6, 4, 3 である. そして, それらのパラメータを調節して残差を最小にすると, パラメータが多いほど小さくできる. しかし, そうすると, 誤差によって大きくずれた点があると, それに引きずられて, それに合うようなパラメータ値が計算されてしまう. このような不都合な現象は**過当てはめ** (overfitting) と呼ばれている.

このため, 望ましい判定は, 残差と自由度をバランスする必要がある. 例えば, 変換前後の点の位置がほんのわずかしか違わないときは, 変換は恒等変換 (自由度 0) である (すなわち変化していない) と結論できることが望ましい (しかし, 残差を最小にする変換は射影変換である). このような問題は**幾何学的モデル選択** (geometric model selection) と呼ばれ, それを判定するさまざまな**モデル選択基準** (model selection criterion) が考えられている. これは次の形をしている.

$$J = (\text{残差}) + (\text{自由度を含む項}) \tag{7.21}$$

パラメータの多いモデルを仮定すると, 第 1 項は小さくなるが, 第 2 項が大きくなる. 第 2 項は**罰金項** (penalty term) (あるいは**ペナルティー項** (penalty term)) と呼ばれる. そこで残差と自由度のバランスを考えて,  $J$  が最小になるモデルを採用する. 代表的な基準として, **幾何学的 AIC** (geometric AIC), **幾何学的 BIC** (geometric BIC), **幾何学的 MDL** (geometric MDL) が提案されている.

### 練習問題

7.1. 式 (7.14), (7.15) の計算は, 変換後の位置のずれの 2 乗和が最小になるように, すなわち, 次式が最小になる  $a_{11}, \dots, a_{23}$  を定めることと等価であることを示せ.

$$J = \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left\| \begin{pmatrix} x'_\alpha \\ y'_\alpha \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \right) \right\|^2 \tag{7.22}$$

右辺冒頭の定数  $2/N$  は, 以降の計算を見やすくするためであり, 特別な意味はない.

7.2. 式 (7.11)–(7.14) にならって、式 (7.6) から  $a_{11}, \dots, a_{23}$  を計算する手順を導け.

7.3. 式 (7.19) を用いて問題 6.3 の方法を拡張し、最小 2 乗の意味で  $N$  点  $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$  を  $N$  点  $(x'_1, y'_1), \dots, (x'_N, y'_N)$  に写像する射影変換の計算手順を示せ.

## 第7章の要約

### 7.1 変換群

- 変換の集合が合成に関して閉じていて、恒等変換もその集合に含まれ、どの変換の逆変換もその集合に含まれるとき、その集合は「変換群」であるという.
- 代表的な変換群はユークリッド変換、相似変換、アフィン変換、射影変換である.
- 図形のその変換に対して不変な性質の研究が、その変換に対応する「幾何学」である.
  - ユークリッド変換、相似変換、アフィン変換、射影変換にはそれぞれ、ユークリッド幾何学、相似幾何学、アフィン幾何学、射影幾何学が対応する.

### 7.2 ユークリッド変換

- 「ユークリッド変換」(「剛体運動」、合同変換)ともいう)は原点  $O$  の周りに角度  $\theta$  だけ回転し、それを  $(t_1, t_2)$  だけ平行移動する変換である (式 (7.1)).
  - 2 点間の距離も 2 直線間の角度も変化しない.
  - 正方形は合同な正方形に写像される (図 7.1).
- ユークリッド変換全体は群を作り、「ユークリッド変換群」と呼ばれる.
  - ユークリッド変換群に不変な性質の研究が「ユークリッド幾何学」である.
- 図形をユークリッド変換することと、座標系をユークリッド変換することは等価である (図 7.2).
  - 式で表すと、互いの逆変換の関係にある.

### 7.3 相似変換

- 「相似変換」は原点  $O$  の周りに角度  $\theta$  だけ回転し、それを  $s$  ( $\neq 0$ ) 倍して  $(t_1, t_2)$  だけ平行移動することである (式 (7.3)).
  - 2 点間の角度は変化しない.

- 正方形はサイズの異なる正方形に写像される (図 7.3) .
- 相似変換全体は群を作り, 「相似変換群」と呼ばれる.
  - ユークリッド変換も相似変換であり, ユークリッド変換群は相似変換群の部分群である.
  - 相似変換群に不変な性質の研究が「相似幾何学」である.
- 図形を相似変換することと, 座標系を相似変換することは等価である (図 7.4) .
  - 式で表すと, 互いの逆変換の関係にある.

## 7.4 アフィン変換

- 「アフィン変換」は一般の1次式で表される変換である (式 (7.5)) .
  - 平行線は平行線に移り, 正方形は平行四辺形に写像される (図 7.5) .
  - 同一直線上の複数の点の間隔の比は変化せず, 中点は中点に写像される.
- アフィン変換全体は群を作り, 「アフィン変換群」と呼ばれる.
  - ユークリッド変換も相似変換もアフィン変換であり, ユークリッド変換群, 相似変換群はアフィン変換群の部分群である.
  - アフィン変換群に不変な性質の研究が「アフィン幾何学」である.
- 図形をアフィン変換することと, 座標系をアフィン変換することは等価である (図 7.6) .
  - 式で表すと, 互いの逆変換の関係にある.
  - アフィン変換した座標系を「斜交座標系」という.

## 7.5 変換の計算

- 変換前の点  $(x_\alpha, y_\alpha)$  とその変換後の位置  $(x'_\alpha, y'_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  から変換の係数を定めることができる.
  - ユークリッド変換も相似変換もアフィン変換であるから, アフィン変換に対して計算すればよい.
  - アフィン変換によって重心は重心に写像される.
- アフィン変換は3点 ( $N = 3$ ) の写像で定まるが,  $N > 3$  に各点の位置に誤差によるずれがあっても, 全体的によくあてはまる変換が計算できる (式 (7.14), (7.15)) .
  - 解は最小2乗 (ずれの2乗和の最小化) の意味をもつ ( $\rightarrow$  問題 7.1) .

## 7.6 射影変換

- 「射影変換」は1次分数式で表される変換である (式 (7.19)).
  - 同一直線上の4点の「複比」は変化しない.
  - 正方形は一般の四辺形に写像される (図 7.7).
- 射影変換全体は群を作り, 「射影変換群」と呼ばれる.
  - ユークリッド変換も相似変換もアフィン変換も射影変換であり, ユークリッド変換群, 相似変換群, アフィン変換群は射影変換群の部分群である.
  - 射影変換群に不変な性質の研究が「射影幾何学」である.
- 図形を射影変換することと, 座標系を射影変換することは等価である (図 7.8).
  - 式で表すと, 互いの逆変換の関係にある.
  - 射影座標系は4点 (「原点」, 「単位点」, 二つの「無限点」) を指定して定まる.
- 射影変換は4点の写像で定まるが (→6.4節, 問題 6.3), 位置に誤差によるずれがある  $N (> 4)$  点からでも, 全体的によくあてはまる変換が計算できる (→問題 7.3).

## 7.7 変換群の構造

- ユークリッド変換群, 相似変換群, アフィン変換群, 射影変換群は図 7.9 の包含関係がある.
- 各変換群は, その変換によって変化しない「不変量」と不変な性質 (「不変性」) をもつ.
- 各変換群の包含関係により, ある変換群の不変量と不変性は, そのすべての部分群の不変量と不変性でもある.
- 各変換群の不変量と不変性と幾何学との対応は, クラインの「エルランゲン目録」で提唱された.
- 変換群の包含関係により, 誤差のある変換前後の点の位置から変換を推定する問題は, 残差のみからは判定できず, 変換群の自由度も考慮した「幾何学的モデル選択」が必要となる.

## 雑談

変換が誤差のある点の純粋な (すなわち並進やスケール変化を含まない) 回転であるとき, 特異値分解を用いた式 (7.17), (7.18) の解が最尤推定になっていることの証明は文献 [23] にある. 特異値分解, 特異値については教科書 [61] が, 誤差のある図形の最尤推定については教科書 [63] がわかりや

すい。誤差のある変換前後の点の位置から射影変換を最尤推定の意味で最適に計算する方法については、文献 [67] を参照するとよい。

幾何学的データをよく説明するモデルを残差から判定することは古くから行われていたが、図 7.9 に示すような包含関係のあるクラスに対しては、データとの適合性が残差のみでは判定できない。このことは文献 [58, 59] で初めて指摘された。このような幾何学的モデル選択のための「幾何学的 AIC」, 「幾何学的 BIC」, 「幾何学的 MDL」はそれぞれ文献 [60], 文献 [64], 文献 [62] で提案されている。Triono ら [72] はこれを手動入力した図形の判定に応用している。

同一シーンを撮影した 2 画像は射影変換によって張り合わせることができる（「モザイク生成」→6.4 節）。しかし、単に 2 画像の位置がずれているだけなら、平行移動で張り合わせることができる。それに、射影変換を用いると、かえって歪みが増大することがある。金澤ら [68] は、どういう変換で張り合わせればよいかを、幾何学的モデル選択によって決定することを提唱している。文献 [66] では、幾何学的モデル選択を 3 次元点の移動へ応用し、東日本大地震における GPS 測定データから地盤の変形を解釈している。

## 追加参考文献

- [56] M. A. Fischler and R. C. Bolles: Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography, *Communications of the ACM*, 24-6(1981), pp. 381–395.
- [57] C. Harris and M. Stephens: A combined corner and edge detector, *Proceedings of the 4th Alvey Vision Conference*, August 1988, Manchester, U.K., pp. 147–151.
- [58] K. Kanatani: Comments on “Symmetry as a Continuous Feature”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19-3 (1997), pp. 246–247.
- [59] K. Kanatani: Comments on “Nonparametric Segmentation of Curves into Various Representations”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19-12 (1997), pp. 1391–1392.
- [60] K. Kanatani: Geometric information criterion for model selection, *International Journal of Computer Vision*, 26-2 (1998), pp. 171–189.
- [61] 金谷健一：「これなら分かる応用数学教室—最小二乗法からウェーブレットまで—」共立出版 (2003).
- [62] K. Kanatani: Uncertainty modeling and model selection for geometric inference, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26-10 (2004), pp. 1307–1319.
- [63] 金谷健一：「これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—」共立出版 (2005).
- [64] K. Kanatani: Geometric BIC, *IEICE Transaction on Information & Systems*, E93-D-1 (2010), pp. 141–151.
- [65] 金谷健一：「幾何学と代数系 Geometric Algebra: ハミルトン, グラスマン, クリフォード」, 森北出版 (2014).
- [66] K. Kanatani and C. Matsunaga: Computing internally constrained motion of 3-D sensor data for motion interpretation, *Pattern Recognition*, 46-6 (2013), pp. 1700–1709.
- [67] 金谷健一, 菅谷保之, 金澤靖：「3次元コンピュータビジョン計算ハンドブック」, 森北出版 (2016).

- [68] 金澤 靖, 金谷 健一: 幾何学的 AIC による画像モザイク生成の安定化, 電子情報通信学会論文誌 A, Vol. J83-A-6 (2000), pp. 686–693.
- [69] 金澤 靖, 金谷 健一: パノラマ画像の作り方—イメージモザイクのための射影変換—, 電子情報通信学会誌, Vol. J83-12 (2000), pp. 944–946.
- [70] D. Lowe: Distinctive image features from scale-invariant keypoints, *International Journal of Computer Vision*, 60-2 (2004), pp. 91–110.
- [71] M. Sakamoto, Y. Sugaya, and K. Kanatani: Homography optimization for consistent circular panorama generation, *Proceedings of the 2000 IEEE Pacific-Rim Symposium on Image and Video Technology*, December 2006, Hsinchu, Taiwan, pp. 1195-1205.
- [72] I. Triono, N. Ohta and K. Kanatani: Automatic recognition of regular figures by geometric AIC, *IEICE Transactions on Information and Systems*, E81-D-2 (1998), pp. 246–248.

# 練習問題解答

## 第6章

7.1. 式 (6.3) の  $\alpha$  は次のように書き直せる.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x & x_B - x & x_C - x \\ y & y_B - y & y_C - y \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_B - x & x_C - x \\ y_B - y & y_C - y \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \left| \begin{pmatrix} x_B - x \\ y_B - y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_C - x \\ y_C - y \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{D} |\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}| \end{aligned}$$

ただし、まず行列式の第1列を第2, 3列から引き、次に (3,3) 要素に関して余因子展開した。そして、式 (1.8) の外積の定義を用いた。1.1 節で述べたように、この外積は  $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$  の作る平行四辺形の符号付き面積である。したがって、 $\alpha$  は三角形  $\triangle PBC$  の符号付き面積の  $2/D$  倍である。同様に  $\beta$  は  $\triangle PCA$  の符号付き面積の  $2/D$  倍であり、 $\gamma$  は  $\triangle PAB$  の符号付き面積の  $2/D$  倍である。1.1 節で述べた外積の符号付き面積との対応から、点  $P$  が  $\triangle ABC$  の外にあると、図 6.1(b) のように対応する重心座標が負になることがわかる。

7.2. 式 (6.3) の座標  $(x, y)$  から重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  への変換は  $(x, y)$  の1次式である。そして、式 (6.1) の重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  から座標  $(x, y)$  への変換も  $(\alpha, \beta, \gamma)$  の1次式である。したがって、 $(\bar{x}, \bar{y})$  から  $(\alpha, \beta, \gamma)$  を計算して  $(x, y)$  を計算すると、 $(x, y)$  は式 (6.6) のような  $(\bar{x}, \bar{y})$  の1次式となっている。

7.3. 点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  が点  $A, B, C$  に写像されるから、式 (6.6) から次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}x_A &= a_{11}x_{\bar{A}} + a_{12}y_{\bar{A}} + a_{13}, & y_A &= a_{21}x_{\bar{A}} + a_{22}y_{\bar{A}} + a_{23}, \\ x_B &= a_{11}x_{\bar{B}} + a_{12}y_{\bar{B}} + a_{13}, & y_B &= a_{21}x_{\bar{B}} + a_{22}y_{\bar{B}} + a_{23}, \\ x_C &= a_{11}x_{\bar{C}} + a_{12}y_{\bar{C}} + a_{13}, & y_C &= a_{21}x_{\bar{C}} + a_{22}y_{\bar{C}} + a_{23} \end{aligned}$$

これらは次のように書き直せる。

$$\begin{pmatrix} x_{\bar{A}} & y_{\bar{A}} & 1 \\ x_{\bar{B}} & y_{\bar{B}} & 1 \\ x_{\bar{C}} & y_{\bar{C}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{\bar{A}} & y_{\bar{A}} & 1 \\ x_{\bar{B}} & y_{\bar{B}} & 1 \\ x_{\bar{C}} & y_{\bar{C}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \\ y_C \end{pmatrix}$$

これらの連立1次方程式を解いて、 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{23}$  が定まる。なお、この係数行列の行列式は三角形  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  の面積の2倍であり ( $\rightarrow$  問題 6.1), 0 ではない。

7.4. 図 6.5 に示すように、 $I(i, j)$  と  $I(i, j+1)$  を  $\eta : 1 - \eta$  に内分し、 $I(i+1, j)$  と  $I(i+1, j+1)$  を  $\eta : 1 - \eta$

に内分し、それらを  $\xi : 1 - \xi$  に内分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} I(\bar{x}, \bar{y}) &= (1 - \xi) \left( (1 - \eta)I(i, j) + \eta I(i, j + 1) \right) + \xi \left( (1 - \eta)I(i + 1, j) + \eta I(i + 1, j + 1) \right) \\ &= 1 - \xi(1 - \eta)I(i, j) + \xi(1 - \eta)I(i + 1, j) + (1 - \xi)\eta I(i, j + 1) + \xi\eta I(i + 1, j + 1) \end{aligned}$$

先に  $\xi : 1 - \xi$  に内分してから  $\eta : 1 - \eta$  に内分しても同じ結果になる。

7.5. 同次座標を用いると、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \bar{X} : \bar{Y} : \bar{Z} = \bar{x} : \bar{y} : 1 &= \frac{h_{11}X/Z + h_{12}Y/Z + h_{13}}{h_{31}X/Z + h_{32}Y/Z + h_{33}} : \frac{h_{21}X/Z + h_{22}Y/Z + h_{23}}{h_{31}X/Z + h_{32}Y/Z + h_{33}} : 1 \\ &= h_{11} \frac{X}{Z} + h_{12} \frac{Y}{Z} + h_{13} : h_{21} \frac{X}{Z} + h_{22} \frac{Y}{Z} + h_{23} : h_{31} \frac{X}{Z} + h_{32} \frac{Y}{Z} + h_{33} \\ &= h_{11}X + h_{12}Y + h_{13}Z : h_{21}X + h_{22}Y + h_{23}Z : h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}Z \end{aligned}$$

ゆえに、ある 0 でない定数  $k$  があって、

$$\bar{X} = k(h_{11}X + h_{12}Y + h_{13}Z), \quad \bar{Y} = k(h_{21}X + h_{22}Y + h_{23}Z), \quad \bar{Z} = k(h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}Z)$$

である。すなわち、式 (6.10) のように書ける。

7.6. 逆行列の定義式  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$  の両辺を転置すると次のようになる。

$$(\mathbf{A}^{-1})^\top \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}$$

これは  $(\mathbf{A}^{-1})^\top$  が  $\mathbf{A}^\top$  の逆行列に等しいこと、すなわち  $(\mathbf{A}^{-1})^\top = (\mathbf{A}^\top)^{-1}$  であることを意味している。

7.7. 相反系の定義より、点  $A$  の同次座標は次のように変換される。

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} &= \left( \alpha \begin{pmatrix} X_{\bar{A}} \\ Y_{\bar{A}} \\ Z_{\bar{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_A \\ \tilde{Y}_A \\ \tilde{Z}_A \end{pmatrix}^\top + \beta \begin{pmatrix} X_{\bar{B}} \\ Y_{\bar{B}} \\ Z_{\bar{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_B \\ \tilde{Y}_B \\ \tilde{Z}_B \end{pmatrix}^\top + \gamma \begin{pmatrix} X_{\bar{C}} \\ Y_{\bar{C}} \\ Z_{\bar{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_C \\ \tilde{Y}_C \\ \tilde{Z}_C \end{pmatrix}^\top \right) \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} X_{\bar{A}} \\ Y_{\bar{A}} \\ Z_{\bar{A}} \end{pmatrix} \cdot 1 + \beta \begin{pmatrix} X_{\bar{B}} \\ Y_{\bar{B}} \\ Z_{\bar{B}} \end{pmatrix} \cdot 0 + \gamma \begin{pmatrix} X_{\bar{C}} \\ Y_{\bar{C}} \\ Z_{\bar{C}} \end{pmatrix} \cdot 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

同次座標は比のみに意味があるから、これは点  $\bar{A}$  の同次座標に等しい。同様に、点  $B, C$  の同次座標は、それぞれ点  $\bar{B}, \bar{C}$  の同次座標に変換される。

7.8. 式 (6.14) の行列  $\mathbf{H}$  は定数倍の不定性があり、 $\alpha\beta\gamma \neq 0$  であるから、 $\alpha, \beta, \gamma$  は  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  と正規化してもよい。同次座標は比のみに意味があるから、 $(X_A, Y_A, Z_A) = (x_A, y_A, 1)$ ,  $(X_B, Y_B, Z_B) = (x_B, y_B, 1)$ ,  $(X_C, Y_C, Z_C) = (x_C, y_C, 1)$ , および  $(X_{\bar{A}}, Y_{\bar{A}}, Z_{\bar{A}}) = (x_{\bar{A}}, y_{\bar{A}}, 1)$ ,  $(X_{\bar{B}}, Y_{\bar{B}}, Z_{\bar{B}}) = (x_{\bar{B}}, y_{\bar{B}}, 1)$ ,  $(X_{\bar{C}}, Y_{\bar{C}}, Z_{\bar{C}}) = (x_{\bar{C}}, y_{\bar{C}}, 1)$  としてよい。このとき、前問の結果から、

$$\mathbf{H} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_{\bar{A}} \\ y_{\bar{A}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} x_{\bar{B}} \\ y_{\bar{B}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} x_{\bar{C}} \\ y_{\bar{C}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となっている. 三角形  $\triangle ABC$  の重心を  $G : (x_G, y_G)$  とし, それを  $\mathbf{H}$  によって写像される点を  $\bar{G} : (x_{\bar{G}}, y_{\bar{G}})$  とすると,  $k$  はある 0 でない定数として, 次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{\bar{G}} \\ y_{\bar{G}} \\ 1 \end{pmatrix} &= k\mathbf{H} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ 1 \end{pmatrix} = k\mathbf{H} \begin{pmatrix} (x_A + x_B + x_C)/3 \\ (y_A + y_B + y_C)/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{k}{3}\mathbf{H} \left( \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{k}{3} \left( \alpha \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

両辺の第 3 成分を比較すると,  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  と正規化してあれば  $k = 3$  であることがわかる. ゆえに

$$\begin{pmatrix} x_{\bar{G}} \\ y_{\bar{G}} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$$

である. これは式 (6.1) より,  $\alpha, \beta, \gamma$  が点  $\bar{G}$  の三角形  $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$  の重心座標であることを示している.

- 7.9.  $\mathbf{H}$  の表す射影変換がアフィン変換であれば, 重心は重心に写像されるから, 前問より, 写像後の点  $\bar{G}$  の重心座標  $(\alpha, \beta, \gamma)$  は  $(1, 1, 1)$  である. 逆に  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1)$  であれば, 重心  $G$  が重心  $\bar{G}$  に写像される. 点  $A, B, C, G$  が  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{G}$  に写像されるような射影変換は一意的に定まるから ( $A, B, C$  が同一直線上にない限り,  $A, B, C, G$  は一般に位置にあり,  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{G}$  も同様である), この射影変換は  $A, B, C, G$  を  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{G}$  に写像するアフィン変換と一致する. ゆえに,  $\mathbf{H}$  がアフィン変換である条件は  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1)$  である. 前問では  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  と正規化したが,  $\alpha, \beta, \gamma$  には定数倍の不定性があるから, 一般にはこれは  $\alpha = \beta = \gamma$  と書ける.

- 7.10. 射影変換行列  $\mathbf{H}$  によって点  $D$  が点  $\bar{D}$  に写像されるということは

$$\begin{pmatrix} X_{\bar{D}} \\ Y_{\bar{D}} \\ Z_{\bar{D}} \end{pmatrix} = k\mathbf{H} \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{pmatrix}$$

が成り立つことである. ここに,  $k$  はある 0 でない定数である. しかし,  $\mathbf{H}$  には定数倍の不定性があり, 式 (6.14) の  $\alpha, \beta, \gamma$  にも定数倍の不定性があるから, 定数  $k$  は考慮しなくてよい. このとき, 式 (6.14) から次式を得る.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{\bar{D}} \\ Y_{\bar{D}} \\ Z_{\bar{D}} \end{pmatrix} &= \left( \alpha \begin{pmatrix} X_{\bar{A}} \\ Y_{\bar{A}} \\ Z_{\bar{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_A \\ \tilde{Y}_A \\ \tilde{Z}_A \end{pmatrix}^\top + \beta \begin{pmatrix} X_{\bar{B}} \\ Y_{\bar{B}} \\ Z_{\bar{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_B \\ \tilde{Y}_B \\ \tilde{Z}_B \end{pmatrix}^\top + \gamma \begin{pmatrix} X_{\bar{C}} \\ Y_{\bar{C}} \\ Z_{\bar{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_C \\ \tilde{Y}_C \\ \tilde{Z}_C \end{pmatrix}^\top \right) \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} X_{\bar{A}} \\ Y_{\bar{A}} \\ Z_{\bar{A}} \end{pmatrix} W_A + \beta \begin{pmatrix} X_{\bar{B}} \\ Y_{\bar{B}} \\ Z_{\bar{B}} \end{pmatrix} W_B + \gamma \begin{pmatrix} X_{\bar{C}} \\ Y_{\bar{C}} \\ Z_{\bar{C}} \end{pmatrix} W_C \end{aligned}$$

ただし, 式 (6.15) を用いた. 各成分を等値すると, 式 (6.16) を得る.

- 7.11. 式 (6.9) の第 1 式の分母を払うと, 次式となる.

$$h_{11}x + h_{12}y + h_{13} = h_{31}\bar{x} + h_{32}\bar{x}y + h_{33}\bar{x}$$

点  $A, B, C, D$  が点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  に写像されるから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} h_{11}x_A + h_{12}y_A + h_{13} &= h_{31}\bar{x}_Ax_A + h_{32}\bar{x}_Ay_A + h_{33}\bar{x}_A \\ h_{11}x_B + h_{12}y_B + h_{13} &= h_{31}\bar{x}_Bx_B + h_{32}\bar{x}_By_B + h_{33}\bar{x}_B \\ h_{11}x_C + h_{12}y_C + h_{13} &= h_{31}\bar{x}_Cx_C + h_{32}\bar{x}_Cy_C + h_{33}\bar{x}_C \\ h_{11}x_D + h_{12}y_D + h_{13} &= h_{31}\bar{x}_Dx_D + h_{32}\bar{x}_Dy_D + h_{33}\bar{x}_D \end{aligned}$$

同様に、式 (6.9) の第 2 式の分母を払うと、

$$h_{21}x + h_{22}y + h_{23} = h_{31}\bar{y}x + h_{32}\bar{y}y + h_{33}\bar{y}$$

となり、点  $A, B, C, D$  が点  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$  に写像されるから、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} h_{21}x_A + h_{22}y_A + h_{23} &= h_{31}\bar{y}_Ax_A + h_{32}\bar{y}_Ay_A + h_{33}\bar{y}_A \\ h_{21}x_B + h_{22}y_B + h_{23} &= h_{31}\bar{y}_Bx_B + h_{32}\bar{y}_By_B + h_{33}\bar{y}_B \\ h_{21}x_C + h_{22}y_C + h_{23} &= h_{31}\bar{y}_Cx_C + h_{32}\bar{y}_Cy_C + h_{33}\bar{y}_C \\ h_{21}x_D + h_{22}y_D + h_{23} &= h_{31}\bar{y}_Dx_D + h_{32}\bar{y}_Dy_D + h_{33}\bar{y}_D \end{aligned}$$

以上から、次の連立 1 次方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 & 0 & 0 & 0 & -\bar{x}_Ax_A & -\bar{x}_Ay_A \\ x_B & y_B & 1 & 0 & 0 & 0 & -\bar{x}_Bx_B & -\bar{x}_By_B \\ x_C & y_C & 1 & 0 & 0 & 0 & -\bar{x}_Cx_C & -\bar{x}_Cy_C \\ x_D & y_D & 1 & 0 & 0 & 0 & -\bar{x}_Dx_D & -\bar{x}_Dy_D \\ 0 & 0 & 0 & x_A & y_A & 1 & -\bar{y}_Ax_A & -\bar{y}_Ay_A \\ 0 & 0 & 0 & x_B & y_B & 1 & -\bar{y}_Bx_B & -\bar{y}_By_B \\ 0 & 0 & 0 & x_C & y_C & 1 & -\bar{y}_Cx_C & -\bar{y}_Cy_C \\ 0 & 0 & 0 & x_D & y_D & 1 & -\bar{y}_Dx_D & -\bar{y}_Dy_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{pmatrix} = h_{33} \begin{pmatrix} \bar{x}_A \\ \bar{x}_B \\ \bar{x}_C \\ \bar{x}_D \\ \bar{y}_A \\ \bar{y}_B \\ \bar{y}_C \\ \bar{y}_D \end{pmatrix}$$

係数行列の行列式が 0 でなければ、 $h_{11}, h_{12}, \dots, h_{33}$  には定数倍の不定性があるから、 $h_{33} = 1$  として一組の解が定まる。行列式が 0 であれば、 $h_{33} = 0$  と置いて、少なくとも一組のすべてが 0 ではない  $h_{11}, h_{12}, \dots, h_{32}$  が定数倍を除いて定まる。

## 第 7 章

7.1. 式 (7.22) は次のように書き直せる。

$$J = \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha} \\ y_{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_{\alpha} \\ y'_{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha} \\ y_{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_{\alpha} \\ y'_{\alpha} \end{pmatrix} \right)$$

これを  $a_{13}$  で微分すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_{13}} &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha} \\ y_{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_{\alpha} \\ y'_{\alpha} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (a_{11}x_{\alpha} + a_{12}y_{\alpha} + a_{13} - x'_{\alpha}) \end{aligned}$$

同様に,  $a_{23}$  で微分すると, 次のようになる.

$$\frac{\partial J}{\partial a_{23}} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (a_{21}x_{\alpha} + a_{22}y_{\alpha} + a_{23} - y'_{\alpha})$$

これらを 0 と置いてまとめると, 次のように書ける.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これから式 (7.9) が得られる. 式 (7.9) を代入すると,  $J$  は次のように書き直せる.

$$J = \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha} - \bar{x} \\ y_{\alpha} - \bar{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_{\alpha} - \bar{x}' \\ y'_{\alpha} - \bar{y}' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha} - \bar{x} \\ y_{\alpha} - \bar{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_{\alpha} - \bar{x}' \\ y'_{\alpha} - \bar{y}' \end{pmatrix} \right)$$

これを  $a_{11}$  で微分すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_{11}} &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha} - \bar{x} \\ y_{\alpha} - \bar{y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x'_{\alpha} - \bar{x}' \\ y'_{\alpha} - \bar{y}' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\alpha} - \bar{x} \\ y_{\alpha} - \bar{y} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (a_{11}(x_{\alpha} - \bar{x})^2 + a_{12}(x_{\alpha} - \bar{x})(y_{\alpha} - \bar{y}) - (x'_{\alpha} - \bar{x}')(x_{\alpha} - \bar{x})) \end{aligned}$$

同様に  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  で微分すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_{12}} &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (a_{11}(x_{\alpha} - \bar{x})(y_{\alpha} - \bar{y}) + a_{12}(y_{\alpha} - \bar{y})^2 - (x'_{\alpha} - \bar{x}')(y_{\alpha} - \bar{y})) \\ \frac{\partial J}{\partial a_{21}} &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (a_{21}(x_{\alpha} - \bar{x})^2 + a_{22}(x_{\alpha} - \bar{x})(y_{\alpha} - \bar{y}) - (y'_{\alpha} - \bar{y}')(x_{\alpha} - \bar{x})) \\ \frac{\partial J}{\partial a_{22}} &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (a_{21}(x_{\alpha} - \bar{x})(y_{\alpha} - \bar{y}) + a_{22}(y_{\alpha} - \bar{y})^2 - (y'_{\alpha} - \bar{y}')(y_{\alpha} - \bar{y})) \end{aligned}$$

これらを 0 と置いてまとめると, 次のように書ける.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^2 / N}{\sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})(y_{\alpha} - \bar{y}) / N} & \frac{\sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})(y_{\alpha} - \bar{y}) / N}{\sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^2 / N} \\ \frac{\sum_{\alpha=1}^N (x'_{\alpha} - \bar{x}')(x_{\alpha} - \bar{x}) / N}{\sum_{\alpha=1}^N (y'_{\alpha} - \bar{y}')(x_{\alpha} - \bar{x}) / N} & \frac{\sum_{\alpha=1}^N (x'_{\alpha} - \bar{x}')(y_{\alpha} - \bar{y}) / N}{\sum_{\alpha=1}^N (y'_{\alpha} - \bar{y}')(y_{\alpha} - \bar{y}) / N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに, 式 (7.13) が得られる.

7.2.  $(x_{\alpha}, y_{\alpha}), (x'_{\alpha}, y'_{\alpha}), \alpha = 1, \dots, N$  に対する式 (7.6) を行列の形に並べると, 次のように書ける.

$$\begin{pmatrix} x'_1 & \cdots & x'_N \\ y'_1 & \cdots & y'_N \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_N \\ y_1 & \cdots & y_N \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

右辺最後の行列の転置を両辺に右から掛け割ると, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix} x'_1 & \cdots & x'_N \\ y'_1 & \cdots & y'_N \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_N \\ y_1 & \cdots & y_N \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & 1 \end{pmatrix}$$

両辺を  $N$  で割って書き直すと, 次のようになる.

$$\begin{pmatrix} \frac{\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha} x_{\alpha} / N}{\bar{x}} & \frac{\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha} y_{\alpha} / N}{\bar{y}} & \bar{x}' \\ \frac{\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha} x_{\alpha} / N}{\bar{x}} & \frac{\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha} y_{\alpha} / N}{\bar{y}} & \bar{y}' \\ \bar{x} & \bar{y} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha}^2 / N}{\bar{x}} & \frac{\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha} y_{\alpha} / N}{\bar{y}} & \bar{x} \\ \frac{\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha} y_{\alpha} / N}{\bar{x}} & \frac{\sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha}^2 / N}{\bar{y}} & \bar{y} \\ \bar{x} & \bar{y} & 1 \end{pmatrix}$$

ゆえに係数の行列が次のように計算される。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N x'_\alpha x_\alpha / N & \sum_{\alpha=1}^N x'_\alpha y_\alpha / N & \bar{x}' \\ \sum_{\alpha=1}^N y'_\alpha x_\alpha / N & \sum_{\alpha=1}^N y'_\alpha y_\alpha / N & \bar{y}' \\ \bar{x} & \bar{y} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha^2 / N & \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha y_\alpha / N & \bar{x} \\ \sum_{\alpha=1}^N x_\alpha y_\alpha / N & \sum_{\alpha=1}^N y_\alpha^2 / N & \bar{y} \\ \bar{x} & \bar{y} & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

これは次式を最小化する計算と同等であることが、問題 7.1 と同様にして確かめられる。

$$J = \frac{2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left\| \begin{pmatrix} x'_\alpha \\ y'_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2$$

7.3.  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  に対する式 (7.19) の分母を払うと次のようになる。

$$h_{11}x_\alpha + h_{12}y_\alpha + h_{13} = h_{31}x'_\alpha x_\alpha + h_{32}x_\alpha y_\alpha + h_{33}x'_\alpha, \quad h_{21}x_\alpha + h_{22}y_\alpha + h_{23} = h_{31}y'_\alpha x_\alpha + h_{32}y'_\alpha y_\alpha + h_{33}y'_\alpha$$

これらを  $\alpha = 1, \dots, N$  に並べると、次の連立 1 次方程式を得る。

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1 x_1 & -x'_1 y_1 & -x'_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_N x_N & -x'_N y_N & -x'_N \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -y'_1 x_1 & -y'_1 y_1 & -y'_1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & x_N & y_N & 1 & -y'_N x_N & -y'_N y_N & -y'_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

左辺の各式の 2 乗和を  $N$  で割ったものは次のように書ける。

$$\frac{1}{N} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_N & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & \cdots & y_N & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & x_1 & \cdots & x_N \\ 0 & \cdots & 0 & y_1 & \cdots & y_N \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -x'_1 x_1 & \cdots & -x'_N x_N & -y'_1 x_1 & \cdots & -y'_N x_N \\ -x'_1 y_1 & \cdots & -x'_N y_N & -y'_1 y_1 & \cdots & -y'_N y_N \\ -x'_1 & \cdots & -x'_N & -y'_1 & \cdots & -y'_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{pmatrix}$$

これは次の 2 次形式の形に書ける

$$\left( \begin{pmatrix} h_{11} \\ \vdots \\ h_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{M} \begin{pmatrix} h_{11} \\ \vdots \\ h_{33} \end{pmatrix} \right) \quad (*)$$

ただし、行列  $M$  は次の形をしている。

$$M = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha}^2/N & \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha}y_{\alpha}/N & \bar{x} \\ \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha}y_{\alpha}/N & \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha}^2/N & \bar{y} \\ \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}^2/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}/N \\ -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}y_{\alpha}^2/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}y_{\alpha}/N \\ -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\bar{x}' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha}^2/N & \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha}y_{\alpha}/N & \bar{x} \\ \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha}y_{\alpha}/N & \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha}^2/N & \bar{y} \\ \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}^2/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}/N \\ -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}y_{\alpha}^2/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}y_{\alpha}/N \\ -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\bar{y}' \\ -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}^2/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}/N \\ -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}y_{\alpha}^2/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}y_{\alpha}/N \\ -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}x_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N x'_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\bar{x}' \\ -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}^2/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}/N \\ -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}y_{\alpha}^2/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}y_{\alpha}/N \\ -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}x_{\alpha}/N & -\sum_{\alpha=1}^N y'_{\alpha}y_{\alpha}/N & -\bar{y}' \\ \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)x_{\alpha}^2/N & \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)x_{\alpha}y_{\alpha}/N & \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)x_{\alpha}/N \\ \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)x_{\alpha}y_{\alpha}/N & \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)y_{\alpha}^2/N & \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)y_{\alpha}/N \\ \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)x_{\alpha}/N & \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)y_{\alpha}/N & \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha}'^2 + y_{\alpha}'^2)/N \end{pmatrix}$$

式 (7.19) からわかるように、係数  $\{h_{ij}\}$  には定数倍の不定性があるので、 $h_{11}^2 + \dots + h_{33}^2 = 1$  と正規化する。線形代数でよく知られているように、2次形式 (\*) を最小にする  $\{h_{ij}\}$  は、行列  $M$  の最小固有値に対する単位固有ベクトルで与えられる。

# 索引

- アインシュタイン Albert Einstein, 22
- アフィン幾何学 affine geometry, 53
- アフィン空間 affine space, 36
- アフィン結合 affine combination, 36
- アフィン変換 affine transformation, 37, 52
- アフィン変換群 group of affine transformations, 53
- 甘利俊一, 22
- 位相幾何学 topology, 32
- 一般の位置 general position, 36
- 移動座標系 moving frame, 19
- 運動 motion, 50
- エルランゲン目録 Erlangen program, 59
- 過当てはめ overfitting, 60
- 外積 outer product, 18
- 回転群 group of rotations, 59
- ガウス曲率 Gaussian curvature, 22
- 仮想現実感 virtual reality, 48
- 画像モザイク生成 image mosaicing, 45
- カタストロフィ catastorophy, 25
- 幾何学的 AIC geometric AIC, 60
- 幾何学的 MDL geometric MDL, 60
- 幾何学的代数 geometric algebra, 15, 19
- 幾何学的 BIC geometric BIC, 60
- 幾何学的モデル選択 geometric model selection, 60
- 記述子 descriptor, 48
- ギブス Josiah Willard Gibbs, 19
- 共分散行列 covariance matrix, 55
- クライン Felix Christian Klein: 1849–1925, 59
- グラスマン Hermann Günter Grassmann, 18
- グラスマン代数 Grassmann algebra, 18
- クラメールの公式 Cramer's formula, 34
- 結合 join, 19
- ケンデリンク Jan Johan Koenderink, 22, 25
- 交差 meet, 19
- 校正 calibration, 44
- 剛体運動 rigid motion, 50
- 合同 congruent, 50
- 合同変換 congruence transformation, 50
- コンピュータビジョン computer vision, 40
- 最尤推定 maximum likelihood estimation, 55
- 残差 residual, 59
- 3次元テクスチャ 3D texture, 47
- 3次元復元 3D reconstruction, 40
- 四元数 quaternion, 18
- SIFT 演算子 SIFT operator, 48
- 射影幾何学 projective geometry, 57
- 射影空間 projective space, 32
- 射影変換 projective transformation, homography, 40, 56
- 射影変換行列 projection transformation matrix, homography matrix, 40
- 射影変換群 group of projective transformations, 57

- 斜交座標系 oblique coordinate system, 53  
 重心座標 barycentric coordinates, 34  
 自由度 degree of freedom, 60  
 従法線 binormal, 19  
 スムーズシェーディング smooth shading, 40  
 全曲率 total curvature, 22  
 双1次補間 bilinear interpolation, 39  
 相関行列 correlation matrix, 55  
 相似 similar, 51  
 相似幾何学 similar geometry, 51  
 相似変換 similar transformation, 51  
 相似変換群 group of similar transformations,  
     51  
 双対直線 dual line, 19  
 双対定理 duality theorem, 19  
 双対点 dual point, 19  
 双対平面 dual plane, 19  
 相反系 reciprocal system, 40  
 ソリッドテクスチャ solid texture, 47  
 単体 simplex, 36  
 超平面 hyperplane, 36  
 直交座標系 orthogonal coordinate system, 53  
 デカルト座標系 Cartesian coordinate system,  
     53  
 テクスチャマッピング texture mapping, 38  
 テンソル解析 tensor calculus, 22  
 統計幾何学 statistical geometry, 22  
 同次座標 homogeneous coordinate, 32  
 動標構 moving frame, 19  
 特異値 singular value, 56  
 特異値分解 singular value decomposition, 56  
 特徴点 feature point, 48  
 凸結合 convex combination, 36  
 凸集合 convex set, 36  
 凸包 convex hull, 36  
 トム René Frédéric Thom, 25  
 陪法線 binormal, 19  
 罰金項 penalty term, 60  
 ハミルトン Sir William Rowan Hamilton, 18  
 ハリス演算子 Harris operator, 48  
 ビデオマッピング video mapping, 48  
 微分幾何学 differential geometry, 22  
 複比 cross ratio, 57  
 部分空間 subspace, 36  
 不変性 invariance, 59  
 不変量 invariant, 59  
 フラット flat, 36  
 プロジェクションマッピング projection map-  
     ping, 44  
 並進群 group of translations, 59  
 ベクトル解析 vector calculus, 19  
 ベクトル作用素 versor, 15  
 ヘステネス David Orlin Hestenes, 19  
 ペナルティ項 penalty term, 60  
 変換 transformation, 49  
 変換群 group of transformation, 49  
 ボクセル voxel, 47  
 ボリュームデータ volume data, 47  
 無限遠直線 line at infinity, 32  
 無限遠点 point at infinity, 32  
 無限遠平面 plane at infinity, 32  
 面積座標 area coordinates, 35

モザイク生成 mosaicing, 45

モデル選択基準 model selection criterion, 60

ユークリッド幾何学 Euclidean geometry, 50

ユークリッド復元 Euclidean reconstruction, 52

ユークリッド変換 Euclidean transformation,  
49

ユークリッド変換群 group of Euclidean trans-  
formations, 50

尤度 likelihood, 55

RANSAC, 48

レンダリング rendering, 39

ロドリゲ Benjamin Olinde Rodrigues, 19

ロドリゲの公式 Rodrigues' formula, 19

ロドリゲスの公式 Rodrigues' formula, 19