

あとがき Postface

まえがきで述べたように、本書は線形代数の基礎（ベクトルや行列や行列式の計算，固有値や固有ベクトルの計算，2次形式の標準化など）を既習であると仮定している。線形代数の長く読まれている標準的な教科書は齋藤 [16] であるが，数学的に厳密でややレベルが高い（特に最後の数章）。それに対して，甘利・金谷 [1] は工学部学生を対象として，力学や電気回路の例題を入れたり，2次形式をエネルギーと解釈するなど工夫して，線形代数をイメージ的に説明しようとしている。

本書のテーマである射影や特異値分解や一般逆行列を説明した教科書は，1970年代から出版されるようになった。Rao・Mittra [15] は我が国に一般逆行列を導入した草分けの文献である。一般逆行列は，射影や特異値分解と合わせて伊理・韓 [2] の教科書でも紹介されている。柳井・竹内 [18] はこれに特化した文献である。しかし，伊理・韓 [2] や柳井・竹内 [18] は内容が非常に繁雑で，今日の工学系の学生や研究者が読むのに適していない。おそらく大部分が挫折するに違いない。それには二つの理由がある。

一つは議論をあまりにも一般化していることである。一般には，線形空間に基底ベクトル（その個数 n が次元）を定義して議論するが，基底は線形独立なら何でもよい。しかし，本書では基底としては正規直交系しか考えていない。また，「射影」とは一般には n 次元空間からその部分空間への線形写像と定義されるが，本書でいう射影は“直交”射影（部分空間に“垂直”に“最短距離”で写像する写像）である。しかし，それ以外に，“斜め”に写像するいろいろな射影がありうる。また，一般逆行列は，一般には二つの線形空間の間のある条件を満たす写像として定義され（式 (4.8)），内部自由度を持ち，一意的ではない。しかし，本書では，一意的に定まるムーア・ペンローズ型のみを扱っている。このように，本書では，工学の応用で標準的に用いられているもの限定しているので，記述が簡潔になり，理解しやすい。それに対して，伊理・韓 [2] や柳井・竹内 [18] は，数学的に考えられるすべてを尽くそうとする高度に学究的な書物である。

しかし，もう一つ重要な相違がある。それは“時代の変化”である。伊理・韓 [2] や柳井・竹内 [18] では線形写像の一般論から一般逆行列を導出し，それに多大のページを割いている。それに対して，特異値分解は，その導出理論は紹介しているが，付随的な役割しか果たしていない。一方，本書では特異値分解から一般逆行列を定義している。その結果，一般逆行列のさまざまな性質はすべて特異値分解の性質から自動的に得られる。このように記述する理由は，本書では特異値分解の計算を，行列式や逆行列や固有値の計算と同等の「行列の基本演算」とみなすからである。すなわち，行列が与えられるということは，その行列式や逆行列や固有値や特異値分解が直ちに与えられることであり，そ

れを前提として議論が行われる。この背景には、今日では特異値分解のソフトウェアが充実しているからである。計算量的にも行列式や逆行列や固有値の計算とほぼ同等である。特異値分解の計算は、その開発者の Golub・Van Loan [3] が解説しているほか、そのコードが Press ら [14] によって提供されている。

Rao・Mitra [15] や伊理・韓 [2] や柳井・竹内 [18] が、特異値分解を行列の基本演算とはみなしていなかったのは、当時はこのようなソフトウェアがまだ普及していなかったためと思われる。現在では、工学の応用分野、特にコンピュータを背景とするパターン情報処理（音声・言語を含むパターン処理・認識、信号・画像処理、コンピュータビジョン、コンピュータグラフィクスなど）では本書のような立場が普通である。欧米の多くの教科書でもそのように扱われている。しかし、我が国の教科書では未だ伊理・韓 [2] や柳井・竹内 [18] を踏襲しているものが多いように見受けられる。一方、本書では、射影もスペクトル分解も特異値分解も、すべて冒頭の式 (1.1) から導いている。このような説明はこれまでになく、今後は本書のような記述が、我が国でも標準的になるとと思われる。

本書の内容のかなりは、入門的教科書 [7, 8] でもとりあげていて、本書は両書の発展版であると言える。特に対称行列のスペクトル分解については [7] の説明が詳しい。本書で用いている「反射射」という概念と用語は、最近盛んになった「幾何学的代数」で用いられるようになったものである [11]。特異値分解の原理と計算法（固有値計算に帰着させる）は [7] に説明がある。最小 2 乗法と一般逆行列との関連は [8] で扱っているが、正規方程式に基づく伝統的な定式化である（本書では射影のみに基づき、正規方程式は用いない）。第 5 章で触れた、正則行列の場合のガウス消去法や LU 分解などの数値計算法は、教科書 [9] の説明が詳しい（ただし、固有値問題や特異値分解は扱っていない）。

一般逆行列は歴史的には、最小 2 乗法に関連して議論されてきたが、パターン情報処理に広く利用されてきたとは言えず、なじみの薄い研究者も多い、その一つの理由は、我が国の線形代数の教科書のほとんどで、数学者による伝統的な記述がなされてきたためと思われる。しかし、近年、いろいろなパターン情報処理の応用、特にコンピュータビジョンにおいて、制約のある問題を扱うことが多くなり、その重要性が認識されている。第 6 章で述べたような平面上に制約されたデータや、方向のみに意味があるために単位球面上へ正規化されたデータなど、制約がある場合は、データの不確定性による変動は制約を破る方向には生じない。このため、第 6 章で指摘したように、信頼性の解析や最適化計算では一般逆行列が重要な役割を果たす。

コンピュータビジョンの多くの問題は、いろいろな制約を持つ非線形最適化問題となる。その解法としては、非線形な関係を線形近似した連立 1 次方程式を反復的に解くのが普通である。反復が収束した時点ではすべての制約が満たされるが、パラメータを推定しながら行う反復途中では、必要な制約が満たされるとは限らない。しかし、これを無視すると、さまざまな計算上の問題が生じる。これを防ぐために、制約がすべて満たされた場合の行列の理論的なランクを用いて、第 4 章で述べたランクを拘束した一般逆行列によって連立 1 次方程式を反復的に解く。そのような応用は金谷・菅谷・金澤 [12] に示されている。

第7章で扱った空間の当てはめは、教科書 [7] では統計データの主成分分析による解析、および「固有空間法」と呼ばれる顔画像認識の手法に関連させて説明されている。本書では当てはめ計算に特異値分解を用いることを推奨しているが、[7] では伝統的な、共分散行列のスペクトル分解による方法を用いている。しかし、特異値分解による当てはめはコンピュータビジョンでは広く用いられている [5]。

第8章で紹介した、行列の因子分解に基づく動画画像解析（「因子分解法」）は、金谷・菅谷・金澤 [12] に具体的な計算手順が示されている。さらに、同書では画像からの3次元計算に関するさまざまな問題がとりあげられている。

本書の付録の内容は、教科書 [7, 8] に基づいている。

本書の多くの部分が和文英文併記になっているが、日本人のための科学技術英語の書き方については、兵藤 [6]、杉原 [17]、小野 [13]、原田 [4]、金谷 [10] 他、多くの書物が出版されている。多くは物理学や機械工学を想定しているが、杉原 [17] と金谷 [10] は数学、情報系を対象としている。本書の英文は金谷 [10] のスタイルに基づいている。

参考文献 References

- [1] 甘利俊一・金谷健一, 『線形代数』, 講談社 (1987).
- [2] 伊理正夫・韓大舜, 『線形代数—行列とその標準形—』, 教育出版 (1977).
- [3] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, U.S., 3rd ed. (1996), 4th ed., (2012).
- [4] 原田豊太郎, 『間違いだらけの英語科学論文』, 講談社 (2004).
- [5] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd Ed., Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2003.
- [6] 兵藤甲一, 『科学英文技法』, 東京大学出版会 (1986).
- [7] 金谷健一, 『これなら分かる応用数学教室—最小二乗法からウェーブレットまで—』, 共立出版 (2003).
- [8] 金谷健一, 『これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—』, 共立出版 (2005).
- [9] 金谷健一, 『数値で学ぶ計算と解析』, 共立出版 (2010).
- [10] 金谷健一, 『理数系のための技術英語練習帳—さらなる上達を目指して—』, 共立出版 (2012).
- [11] 金谷健一, 『幾何学と代数系 Geometric Algebra: ハミルトン, グラスマン, クリフォード』, 森北出版 (2014).
- [12] 金谷健一・菅谷保之・金澤靖, 『3次元コンピュータビジョン計算ハンドブック』, 森北出版 (2016).
- [13] 小野義正, 『ポイントで学ぶ科学英語論文の書き方』 丸善 (2001).
- [14] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 3rd ed. (2007); 丹慶勝市・佐藤俊郎・奥村晴彦・小林誠 (訳), 『ニューメリカルレシピ・イン・シー日本語版—C言語による数値計算のレシピ』, 技術評論社 (1993)

- [15] C. R. Rao and S. K. Mitra, *Generalized inverse of matrices and its applications*, John Wiley. Hoboken, NJ, U.S. (1971); 渋谷正昭・田辺国土 (訳), 『一般逆行列とその応用』, 東京図書 (1973).
- [16] 齋藤正彦, 『線型代数入門』, 東京大学出版会 (1966).
- [17] 杉原厚吉, 『理科系のための英文作法』, 中央公論社 (1994).
- [18] 柳井晴夫・竹内啓, 『射影行列・一般逆行列・特異値分解』, 東京大学出版会 (1983).

索引 Index

- affine camera, 63
- affine reconstruction, 64
- affine space, 53
- affine transformation, 63
- anisotropic, 39
- anti-symmetric part, 71

- basis, 72
- bias, 44
- bidiagonal matrix, 19
- bilinear form, 72

- camera matrix, 63
- canonical basis, 2
- characteristic equation, 11, 75
- characteristic polynomial, 11, 75
- column domain, 19
- confidence interval, 40
- covariance matrix, 38, 51

- diagonalization, 13
- dimension, 72
- direct sum decomposition, 3
- domain, 1

- eigenvalue, 11, 75
- eigenvalue decomposition, 12
- eigenvector, 11, 75
- empirical probability density, 44
- error ellipse, 40
- error ellipsoid, 40

- Euclid norm, 28
- Euclidean reconstruction, 64
- expansion, 73
- expectation, 38

- factorization, 60
- factorization method, 63
- Frobenius norm, 28
- fundamental matrix, 43

- Gauss, Karl (1777–1855), 32
- Gaussian distribution, 32
- Gaussian elimination, 31
- general position, 54
- generalized inverse, 24
- Golub-Reinsch method, 19
- gradient, 70
- Gram–Schmidt orthogonalization, 6

- homogeneous coordinate, 42, 59
- homography matrix, 43
- Householder method, 11
- hyperplane, 5

- idempotent, 4
- image, 1
- inner product, 69
- isotropic, 39

- Jacobi method, 11

- Karhunen-Loève expansion, 56

- KL-expansion, 56
- Kronecker delta, 2, 72
- Lagrange multiplier, 74
- Lagrange's method of indeterminate multipliers, 74
- least-squares approximation, 73
- least-squares method, 32
- least-squares solution, 32
- left singular vector, 18
- linear form, 70
- linear mapping, 68
- linearity, 69
- LU-decomposition, 32
- machine epsilon, 27
- matrix norm, 28
- mean square, 38
- metric condition, 64
- moment matrix, 51
- Moore–Penrose type, 24
- motion matrix, 63
- nabla, 70
- natural basis, 2, 68
- nonsingular matrix, 13
- norm, 70
- normal distribution, 32, 39
- normal equation, 32
- observation matrix, 63
- orthogonal, 70
- orthogonal complement, 3
- orthogonal matrix, 13
- orthogonal projection, 3
- orthographic projection, 64
- orthonormal basis, 1, 72
- orthonormal system, 5, 72
- paraperspective projection, 64
- perspective projection, 63
- positive definite, 14
- positive semidefinite, 14
- positivity, 69, 70
- principal axis, 12, 39
- principal component analysis, 56
- probability distribution, 38
- projected length, 5
- projection, 3
- projection matrix, 4
- pseudo inverse, 24
- Pythagorean theorem, 70
- quadratic form, 71
- random variable, 38
- rank, 12
- rank-constrained generalized inverse, 27
- rank-constrained pseudoinverse, 27
- reflexive generalized inverse, 25
- reflexive pseudoinverse, 25
- rejection, 3
- residual, 32, 52
- residual sum of squares, 32, 52
- right singular vector, 18
- RMS error, 44
- root-mean-square error, 44
- row domain, 19
- sample covariance matrix, 44
- sample mean, 44
- scatter matrix, 51
- Schmidt orthogonalization, 6
- Schwarz inequality, 70

- shape matrix, 63
- similar reconstruction, 64
- singular decomposition, 19
- singular value, 18
- singular vector, 18
- skew-symmetric part, 71
- span, 2, 74
- spectral decomposition, 12
- spectrum, 12
- standard basis, 2
- subspace, 2, 74
- symmetric part, 71
- symmetry, 69
- triangle inequality, 70
- unbiased, 44
- unit vector, 70
- viewpoint, 40
- weak perspective projection, 64
- RMS 誤差, 44
- アフィンカメラ affine camera, 63
- アフィン空間 affine space, 53
- アフィン復元 affine reconstruction, 64
- アフィン変換 affine transformation, 63
- 1 次形式 linear form, 70
- 一般逆行列 pseudoinverse, generalized inverse, 24
- 一般の位置 general position, 54
- 異方性 anisotropic, 39
- 因子分解 factorization, 60
- 因子分解法 factorization method, 63
- 運動行列 motion matrix, 63
- LU 分解 LU-decomposition, 32
- ガウス分布 Gaussian distribution, 32
- ガウス Karl Gauss: 1777–1855, 32
- ガウス消去法 Gaussian elimination, 31
- 確率分布 probability distribution, 38
- 確率変数 random variable, 38
- カメラ行列 camera matrix, 63
- カルーネン・レーベ展開 Karhunen-Loève expansion, 56
- 観測行列 observation matrix, 63
- 疑似逆行列 pseudoinverse, generalized inverse, 24
- 疑似透視投影 paraperspective projection, 64
- 基礎行列 fundamental matrix, 43
- 期待値 expectation, 38
- 基底 basis, 72
- 行空間 row domain, 19
- 共分散行列 covariance matrix, 38, 51
- 行列ノルム matrix norm, 28
- グラム・シュミットの直交化 Gram-Schmidt orthogonalization, 6
- クロネッカのデルタ Kronecker delta, 2, 72
- 経験確率密度 empirical probability density, 44
- 形状行列 shape matrix, 63
- 計量条件 metric condition, 64
- KL 展開 KL-expansion, 56
- 勾配 gradient, 70
- 誤差楕円 error ellipse, 40
- 誤差楕円体 error ellipsoid, 40
- 固有多項式 characteristic polynomial, 11, 75
- 固有値 eigenvalue, 11, 75
- 固有値分解 eigenvalue decomposition, 12

- 固有ベクトル eigenvector, 11, 75
固有方程式 characteristic equation, 11, 75
ゴラブ・ラインシュ法 Golub-Reinsch method,
19
最小 2 乗解 least-squares solution, 32
最小 2 乗近似 least-squares approximation, 73
最小 2 乗法 least-squares method, 32
三角不等式 triangle inequality, 70
残差 residual, 32, 52
残差平方和 residual sum of squares, 32, 52
サンプル共分散行列 sample covariance matrix,
44
サンプル平均 sample mean, 44
三平方の定理 Pythagorean theorem, 70
散乱行列 scatter matrix, 51
次元 dimension, 72
自然基底 natural basis, 2, 68
視点 viewpoint, 40
射影 projection, 3
射影行列 projection matrix, 4
射影長 projected length, 5
射影変換行列 homography matrix, 43
弱透視投影 weak perspective projection, 64
主軸 principal axis, 12, 39
主成分分析 principal component analysis, 56
シュミットの直交化 Schmidt orthogonaliza-
tion, 6
シュワルツの不等式 Schwarz inequality, 70
信頼区間 confidence interval, 40
スペクトル spectrum, 12
スペクトル分解 spectral decomposition, 12
正規直交基底 orthonormal basis, 1, 72
正規直交系 orthonormal system, 5, 72
正規分布 normal distribution, 32, 39
正規方程式 normal equation, 32
正則行列 nonsingular matrix, 13
正值 positive definite, 14
正值性 positivity, 69, 70
線形写像 linear mapping, 68
線形性 linearity, 69
像 image, 1
双 1 次形式 bilinear form, 72
相似復元 similar reconstruction, 64
対角化 diagonalization, 13
対称性 symmetry, 69
対称部分 symmetric part, 71
単位ベクトル unit vector, 70
超平面 hyperplane, 5
直和分解 direct sum decomposition, 3
直交 orthogonal, 70
直交行列 orthogonal matrix, 13
直交射影 orthogonal projection, 3
直交補空間 orthogonal complement, 3
定義域 domain, 1
展開 expansion, 73
同次座標 homogeneous coordinate, 42, 59
透視投影 perspective projection, 63
等方性 isotropic, 39
特異値 singular value, 18
特異値分解 singular decomposition, 19
特異ベクトル singular vector, 18
内積 inner product, 69
ナブラ nabla, 70
2 次形式 quadratic form, 71

- 二重対角行列 bidiagonal matrix, 19
- 2乗平均平方根誤差 root-mean-square error, 44
- ノルム norm, 70
- ハウスホルダー法 Householder method, 11
- 張る span, 2
- 張る span, 74
- 反射影 rejection, 3
- 反射型一般逆行列 reflexive pseudoinverse
(generalized inverse), 25
- 半正値 positive semidefinite, 14
- 反対称部分 anti-symmetric part, skew-symmetric part, 71
- ピタゴラスの定理 Pythagorean theorem, 70
- 左特異ベクトル left singular vector, 18
- 標準基底 standard basis, canonical basis, 2
- 部分空間 subspace, 2
- 部分空間 subspace, 74
- 不偏 unbiased, 44
- フロベニウスノルム Frobenius norm, 28
- 平均2乗 mean square, 38
- 平均2乗平方根誤差 root-mean-square error,
44
- 平行投影 orthographic projection, 64
- 平方(根)平均2乗誤差 root-mean-square error, 44
- べき等 idempotent, 4
- 偏差 bias, 44
- マシンイプシロン machine epsilon, 27
- 右特異ベクトル right singular vector, 18
- ムーア・ペンローズ型 Moore–Penrose type, 24
- モーメント行列 moment matrix, 51
- ヤコビ法 Jacobi method, 11
- ユークリッドノルム Euclid norm, 28
- ユークリッド復元 Euclidean reconstruction, 64
- ラグランジュ乗数 Lagrange multiplier, 74
- ラグランジュの未定乗数法 Lagrange’s method
of indeterminate multipliers, 74
- ランク rank, 12
- ランク拘束一般逆行列 rank-constrained pseudoinverse (generalized inverse), 27
- ランク拘束疑似逆行列 rank-constrained pseudoinverse (generalized inverse), 27
- 列空間 column domain, 19