

# まえがき Preface

線形代数は、理学、工学、農学、経済学、医学などの広い分野の基礎であり、それらの学部の基礎科目としてほとんどすべての大学で教えられている。そして、市販の線形代数の教科書のほとんどすべては、そのような広範囲の学生を対象とし、主に数学者によって書かれている。それに対して、本書は主として、音声・言語を含むパターン処理・認識、信号・画像処理、コンピュータビジョン、コンピュータグラフィクスなどのパターン情報処理を学ぶ学生や、研究・開発を行う研究者を対象としている。そして、筆者自身もこの分野の研究者である。

このようなパターン情報処理では、大量のデータを扱う。それらは高次元のベクトルや行列の形をとる。しかし、そこにおける線形代数の役割は、単に大規模なベクトルや行列の数値的な計算処理だけではない。データの処理にはその“幾何学的な解釈”が伴う。例えば、あるデータ集合が別のデータ集合に“直交する”という概念や、データ集合間の“距離”や、データをある空間に“射影”するなどの幾何学的な関係が重要な意味を持つ。これは抽象的な高次元空間を直観的にイメージするのに役立つだけでなく、どのような目的のためにはどのような処理を行えばよいかという指針ともなる。

本書はこのような観点で、パターン情報処理を支える線形代数のテーマを説明する。まず、線形空間における射影という概念をとりあげ、それをを用いて、スペクトル分解、特異値分解、および一般逆行列を記述する。そして、応用として、連立1次方程式の最小2乗解、ベクトルの確率分布を指定する必ずしも正値でない共分散行列、点データに対する部分空間の当てはめ、および行列の因子分解とその動画像解析との関連を述べる。

これらのテーマすべての根幹となるのは、「射影」である。それは、射影が、「直交性」と「最短距離」という二つの概念を包含しているからである。そして、パターン情報処理はこの二つの概念を基盤としている。欧米のパターン情報処理の教科書では、本書のような記述がよく見受けられるが、我が国ではあまり見かけない。我が国の多くの線形代数の教科書では、線形代数を行列の操作および数値計算の側面から説明している。この意味で、本書は多くのパターン情報処理の学生や研究者が線形代数をより深く理解する助けになるであろう。

本書は、読者が学部低学年で学ぶ線形代数の基礎（ベクトルや行列や行列式の計算、固有値や固有ベクトルの計算、2次形式の標準化など）を既習であると仮定している。しかし、知識を整理するために、各章の末尾に、本文中に現れた線形代数やその応用に関連する基本的な用語をとりあげ、短い解説を加えている。また、本文のポイントを箇条書きの形でまとめた。さらに、巻末に「付録 線形代数の基礎」を付け、本文に関係する線形代数の基礎知識、および関連する数学的事項をまとめた。

それとともに、線形代数の必要な基礎事項のほとんどすべては、各章の問題、および巻末の解答としてとりあげられている（ややレベルの高い問題には\*印を付した）。これらの工夫により、本書は線形代数を復習する目的にも役立つと思われる。

本書の多くの部分は和文英文併記にしている。そして、巻末に各章の問題の英訳 (Q:) と英文による解答 (A:) を与えている。このようにしたのは、今日、留学生の数が増加し、政府もこれを推進し、英語による授業や教員の海外への国際発信を求めている背景がある。また、日本人学生への英語論文執筆の指導を支援する意味もある。

本書は、数学に興味のある一般読者や、企業や研究所において研究・開発を行っている研究者に広く読まれることを期待しているが、とりわけ、学部のパターン情報処理に関連する授業や演習の副教材として、また、大学院の授業や研究室セミナーのテキストとして利用されることを望んでいる。

本書に原稿段階で眼を通して、いろいろなご指摘を頂いた理化学研究所特別顧問の甘利俊一先生、米国テキサス大学アーリントン校の野村靖一教授、長崎県立大学の金谷一朗教授、広島大学の玉木徹准教授、豊橋技術科学大学の金澤靖准教授、菅谷保之准教授、群馬大学の松浦勉准教授、(株)朋栄の松永力氏に感謝します。最後に、本書の編集の労をとられた共立出版の大越隆道氏にお礼申し上げます。

2018年5月

金谷健一

# 目次 Contents

まえがき Preface	ii
目次 Contents	iv
<b>第 1 章 線形空間と射影 Linear Space and Projection</b>	<b>1</b>
1.1 線形写像の表現 Expression of Linear Mapping	1
1.2 部分空間と射影, 反射影 Subspaces, Projection, and Rejection	3
1.3 射影行列 Projection Matrices	4
1.4 直線と平面への射影 Projection onto Lines and Planes	5
1.5 シュミットの直交化 Schmidt Orthogonalization	6
用語とまとめ Glossary and Summary	7
第 1 章の問題 Problems of Chapter 1	11
<b>第 2 章 固有値とスペクトル分解 Eigenvalues and Spectral Decomposition</b>	<b>12</b>
2.1 固有値と固有ベクトル Eigenvalues and Eigenvectors	12
2.2 スペクトル分解 Spectral Decomposition	12
2.3 ランク	13
2.4 対称行列の対角化 Diagonalization of Symmetric Matrices	14
2.5 逆行列とべき乗 Inverse and Powers	14
用語とまとめ Glossary and Summary	15
第 2 章の問題 Problems of Chapter 2	18
<b>第 3 章 特異値と特異値分解 Singular Values and Singular Decomposition</b>	<b>19</b>
3.1 特異値と特異ベクトル Singular Values and Singular Vectors	19
3.2 特異値分解 Singular Value Decomposition	20
3.3 列空間と行空間 Column Domain and Row Domain	20
3.4 行列による表現 Matrix Representation	21
用語とまとめ Glossary and Summary	22
第 3 章の問題 Problems of Chapter3	23

<b>第 4 章 一般逆行列 Pseudoinverse</b>	<b>25</b>
4.1 一般逆行列 Pseudoinverse . . . . .	25
4.2 列空間と行空間への射影 Projection onto the Column and Row Domains . . . . .	26
4.3 ベクトルの一般逆行列 Pseudoinverse of Vectors . . . . .	27
4.4 ランク拘束一般逆行列 Rank-constrained Pseudoinverse . . . . .	27
4.5 行列ノルムによる評価 Evaluation by Matrix Norm . . . . .	29
用語とまとめ Glossary and Summary . . . . .	29
第 4 章の問題 Problems of Chapter 4 . . . . .	31
<b>第 5 章 連立 1 次方程式の最小 2 乗解 Least-squares Solution of Linear Equations</b>	<b>32</b>
5.1 連立 1 次方程式と最小 2 乗法 Linear Equations and Least Squares . . . . .	32
5.2 最小 2 乗解の計算 Computing the Least-squares Solution . . . . .	33
5.3 1 変数多方程式 Multiple Equations of One Variable . . . . .	35
5.4 多変数 1 方程式 Single Multivariate Equation . . . . .	36
用語とまとめ Glossary and Summary . . . . .	36
第 5 章の問題 Problems of Chapter 5 . . . . .	37
<b>第 6 章 ベクトルの確率分布 Probability Distribution of Vectors</b>	<b>39</b>
6.1 誤差の共分散行列 Covariance Matrices of Errors . . . . .	39
6.2 ベクトルの正規分布 Normal Distribution of Vectors . . . . .	40
6.3 球面上の確率分布 Probability Distribution over a Sphere . . . . .	43
用語とまとめ Glossary and Summary . . . . .	46
第 6 章の問題 Problems of Chapter 6 . . . . .	49
<b>第 7 章 空間の当てはめ Fitting Spaces</b>	<b>51</b>
7.1 部分空間の当てはめ Fitting Subspaces . . . . .	51
7.2 階層的当てはめ Hierarchical Fitting . . . . .	52
7.3 特異値分解による当てはめ Fitting by Singular Value Decomposition . . . . .	54
7.4 アフィン空間の当てはめ Fitting Affine Spaces . . . . .	55
用語とまとめ Glossary and Summary . . . . .	58
第 7 章の問題 Problems of Chapter 7 . . . . .	60
<b>第 8 章 行列の因子分解 Matrix Factorization</b>	<b>62</b>
8.1 行列の因子分解 Matrix Factorization . . . . .	62
8.2 動画画像解析の因子分解法 Factorization for Motion Image Analysis . . . . .	64
用語とまとめ Glossary and Summary . . . . .	66

第 8 章の問題 Problems of Chapter 8 . . . . .	69
<b>付 録 A 線形代数の基礎 Fundamentals of Linear Algebra</b>	<b>70</b>
A.1 線形写像と行列 Linear Mappings and Matrices . . . . .	70
A.2 内積とノルム Inner Product and Norm . . . . .	71
A.3 1 次形式 Linear Forms . . . . .	72
A.4 2 次形式 Quadratic Forms . . . . .	73
A.5 双 1 次形式 Bilinear Forms . . . . .	74
A.6 基底による展開 Basis and Expansion . . . . .	74
A.7 最小 2 乗近似 Least-squares Approximation . . . . .	75
A.8 ラグランジュの未定乗数法 Lagrange's Method of Indeterminate Multipliers . . . . .	76
A.9 固有値と固有ベクトル Eigenvalues and Eigenvectors . . . . .	77
A.10 2 次形式の最大値, 最小値 Maximum and Minimum of a Quadratic Form . . . . .	79
<b>あとがき Postface</b>	<b>80</b>
<b>参考文献 References</b>	<b>83</b>
<b>Problems and Answers 問題と解答</b>	<b>85</b>

# 索引 Index

- affine camera, 63
- affine reconstruction, 64
- affine space, 53
- affine transformation, 63
- anisotropic, 39
- anti-symmetric part, 71
- basis, 72
- bias, 44
- bidiagonal matrix, 19
- bilinear form, 72
- camera matrix, 63
- canonical basis, 2
- characteristic equation, 11, 75
- characteristic polynomial, 11, 75
- column domain, 19
- confidence interval, 40
- covariance matrix, 38, 51
- diagonalization, 13
- dimension, 72
- direct sum decomposition, 3
- domain, 1
- eigenvalue, 11, 75
- eigenvalue decomposition, 12
- eigenvector, 11, 75
- empirical probability density, 44
- error ellipse, 40
- error ellipsoid, 40
- Euclid norm, 28
- Euclidean reconstruction, 64
- expansion, 73
- expectation, 38
- factorization, 60
- factorization method, 63
- Frobenius norm, 28
- fundamental matrix, 43
- Gauss, Karl (1777–1855), 32
- Gaussian distribution, 32
- Gaussian elimination, 31
- general position, 54
- generalized inverse, 24
- Golub-Reinsch method, 19
- gradient, 70
- Gram–Schmidt orthogonalization, 6
- homogeneous coordinate, 42, 59
- homography matrix, 43
- Householder method, 11
- hyperplane, 5
- idempotent, 4
- image, 1
- inner product, 69
- isotropic, 39
- Jacobi method, 11
- Karhunen-Loève expansion, 56

- KL-expansion, 56
- Kronecker delta, 2, 72
- Lagrange multiplier, 74
- Lagrange's method of indeterminate multipliers, 74
- least-squares approximation, 73
- least-squares method, 32
- least-squares solution, 32
- left singular vector, 18
- linear form, 70
- linear mapping, 68
- linearity, 69
- LU-decomposition, 32
- machine epsilon, 27
- matrix norm, 28
- mean square, 38
- metric condition, 64
- moment matrix, 51
- Moore–Penrose type, 24
- motion matrix, 63
- nabla, 70
- natural basis, 2, 68
- nonsingular matrix, 13
- norm, 70
- normal distribution, 32, 39
- normal equation, 32
- observation matrix, 63
- orthogonal, 70
- orthogonal complement, 3
- orthogonal matrix, 13
- orthogonal projection, 3
- orthographic projection, 64
- orthonormal basis, 1, 72
- orthonormal system, 5, 72
- paraperspective projection, 64
- perspective projection, 63
- positive definite, 14
- positive semidefinite, 14
- positivity, 69, 70
- principal axis, 12, 39
- principal component analysis, 56
- probability distribution, 38
- projected length, 5
- projection, 3
- projection matrix, 4
- pseudo inverse, 24
- Pythagorean theorem, 70
- quadratic form, 71
- random variable, 38
- rank, 12
- rank-constrained generalized inverse, 27
- rank-constrained pseudoinverse, 27
- reflexive generalized inverse, 25
- reflexive pseudoinverse, 25
- rejection, 3
- residual, 32, 52
- residual sum of squares, 32, 52
- right singular vector, 18
- RMS error, 44
- root-mean-square error, 44
- row domain, 19
- sample covariance matrix, 44
- sample mean, 44
- scatter matrix, 51
- Schmidt orthogonalization, 6
- Schwarz inequality, 70

- shape matrix, 63
- similar reconstruction, 64
- singular decomposition, 19
- singular value, 18
- singular vector, 18
- skew-symmetric part, 71
- span, 2, 74
- spectral decomposition, 12
- spectrum, 12
- standard basis, 2
- subspace, 2, 74
- symmetric part, 71
- symmetry, 69
  
- triangle inequality, 70
  
- unbiased, 44
- unit vector, 70
  
- viewpoint, 40
  
- weak perspective projection, 64
  
- RMS 誤差, 44
- アフィンカメラ affine camera, 63
- アフィン空間 affine space, 53
- アフィン復元 affine reconstruction, 64
- アフィン変換 affine transformation, 63
  
- 1 次形式 linear form, 70
- 一般逆行列 pseudoinverse, generalized inverse, 24
- 一般の位置 general position, 54
- 異方性 anisotropic, 39
- 因子分解 factorization, 60
- 因子分解法 factorization method, 63
  
- 運動行列 motion matrix, 63
  
- LU 分解 LU-decomposition, 32
  
- ガウス分布 Gaussian distribution, 32
- ガウス Karl Gauss: 1777–1855, 32
- ガウス消去法 Gaussian elimination, 31
- 確率分布 probability distribution, 38
- 確率変数 random variable, 38
- カメラ行列 camera matrix, 63
- カルーネン・レーベ展開 Karhunen-Loève expansion, 56
- 観測行列 observation matrix, 63
  
- 疑似逆行列 pseudoinverse, generalized inverse, 24
- 疑似透視投影 paraperspective projection, 64
- 基礎行列 fundamental matrix, 43
- 期待値 expectation, 38
- 基底 basis, 72
- 行空間 row domain, 19
- 共分散行列 covariance matrix, 38, 51
- 行列ノルム matrix norm, 28
  
- グラム・シュミットの直交化 Gram-Schmidt orthogonalization, 6
- クロネッカのデルタ Kronecker delta, 2, 72
  
- 経験確率密度 empirical probability density, 44
- 形状行列 shape matrix, 63
- 計量条件 metric condition, 64
- KL 展開 KL-expansion, 56
  
- 勾配 gradient, 70
- 誤差楕円 error ellipse, 40
- 誤差楕円体 error ellipsoid, 40
- 固有多項式 characteristic polynomial, 11, 75
- 固有値 eigenvalue, 11, 75
- 固有値分解 eigenvalue decomposition, 12

- 固有ベクトル eigenvector, 11, 75  
固有方程式 characteristic equation, 11, 75  
ゴラブ・ラインシュ法 Golub-Reinsch method,  
19  
最小 2 乗解 least-squares solution, 32  
最小 2 乗近似 least-squares approximation, 73  
最小 2 乗法 least-squares method, 32  
三角不等式 triangle inequality, 70  
残差 residual, 32, 52  
残差平方和 residual sum of squares, 32, 52  
サンプル共分散行列 sample covariance matrix,  
44  
サンプル平均 sample mean, 44  
三平方の定理 Pythagorean theorem, 70  
散乱行列 scatter matrix, 51  
次元 dimension, 72  
自然基底 natural basis, 2, 68  
視点 viewpoint, 40  
射影 projection, 3  
射影行列 projection matrix, 4  
射影長 projected length, 5  
射影変換行列 homography matrix, 43  
弱透視投影 weak perspective projection, 64  
主軸 principal axis, 12, 39  
主成分分析 principal component analysis, 56  
シュミットの直交化 Schmidt orthogonaliza-  
tion, 6  
シュワルツの不等式 Schwarz inequality, 70  
信頼区間 confidence interval, 40  
スペクトル spectrum, 12  
スペクトル分解 spectral decomposition, 12  
正規直交基底 orthonormal basis, 1, 72  
正規直交系 orthonormal system, 5, 72  
正規分布 normal distribution, 32, 39  
正規方程式 normal equation, 32  
正則行列 nonsingular matrix, 13  
正值 positive definite, 14  
正值性 positivity, 69, 70  
線形写像 linear mapping, 68  
線形性 linearity, 69  
像 image, 1  
双 1 次形式 bilinear form, 72  
相似復元 similar reconstruction, 64  
対角化 diagonalization, 13  
対称性 symmetry, 69  
対称部分 symmetric part, 71  
単位ベクトル unit vector, 70  
超平面 hyperplane, 5  
直和分解 direct sum decomposition, 3  
直交 orthogonal, 70  
直交行列 orthogonal matrix, 13  
直交射影 orthogonal projection, 3  
直交補空間 orthogonal complement, 3  
定義域 domain, 1  
展開 expansion, 73  
同次座標 homogeneous coordinate, 42, 59  
透視投影 perspective projection, 63  
等方性 isotropic, 39  
特異値 singular value, 18  
特異値分解 singular decomposition, 19  
特異ベクトル singular vector, 18  
内積 inner product, 69  
ナブラ nabla, 70  
2 次形式 quadratic form, 71

- 二重対角行列 bidiagonal matrix, 19
- 2乗平均平方根誤差 root-mean-square error, 44
- ノルム norm, 70
- ハウスホルダー法 Householder method, 11
- 張る span, 2
- 張る span, 74
- 反射影 rejection, 3
- 反射型一般逆行列 reflexive pseudoinverse (generalized inverse), 25
- 半正値 positive semidefinite, 14
- 反対称部分 anti-symmetric part, skew-symmetric part, 71
- ピタゴラスの定理 Pythagorean theorem, 70
- 左特異ベクトル left singular vector, 18
- 標準基底 standard basis, canonical basis, 2
- 部分空間 subspace, 2
- 部分空間 subspace, 74
- 不偏 unbiased, 44
- フロベニウスノルム Frobenius norm, 28
- 平均2乗 mean square, 38
- 平均2乗平方根誤差 root-mean-square error, 44
- 平行投影 orthographic projection, 64
- 平方(根)平均2乗誤差 root-mean-square error, 44
- べき等 idempotent, 4
- 偏差 bias, 44
- マシンイプシロン machine epsilon, 27
- 右特異ベクトル right singular vector, 18
- ムーア・ペンローズ型 Moore–Penrose type, 24
- モーメント行列 moment matrix, 51
- ヤコビ法 Jacobi method, 11
- ユークリッドノルム Euclid norm, 28
- ユークリッド復元 Euclidean reconstruction, 64
- ラグランジュ乗数 Lagrange multiplier, 74
- ラグランジュの未定乗数法 Lagrange’s method of indeterminate multipliers, 74
- ランク rank, 12
- ランク拘束一般逆行列 rank-constrained pseudoinverse (generalized inverse), 27
- ランク拘束疑似逆行列 rank-constrained pseudoinverse (generalized inverse), 27
- 列空間 column domain, 19