

まえがき

本書は岡山大学工学部情報工学科の2年生のための「応用数学」の授業のための講義ノートとして作成したものが基となっている。岡山大学では1年生には線形代数や解析学の授業が開講されているが必修ではないため、どちらも履修しない学生も多い。そこでこの講義では信号処理、画像処理を含めたあらゆるデータ解析に必要な線形計算の基礎技術を“重ね合わせの原理”という切り口で紹介することによって線形代数や解析学の理解を深めることを目的としている。

本書は「最小二乗法」、「直交関数展開」、「フーリエ解析」、「離散フーリエ解析」、「固有値問題と2次形式」、「主軸変換とその応用」、「ウェーブレット解析」の各章からなる。それぞれが独立した教科書にもなるほど多くの範囲をカバーしているが、本書では基礎概念と原理のみに絞っている。

本書の最大の特徴は、頻繁に「先生」と「学生」との「ディスカッション」を挿入していることである。対話形式は珍しくないが、普通に出てくるのは優等生で「はい、わかりました」で終るのが多いのに対して、本書に登場する「学生」はそれほど理解がよくはなく、しつこく「先生」を追求する。この「学生」の質問には私自身が学生時代に疑問に思ったことのほか、私の授業で実際に遭遇した質問や感想なども採り入れている。

経験によれば、わからない学生にわからせるには初歩的なことをやさしく教えるより、やや高度な話をしたほうがかえって効果的だと思われる。ただ、それらを混ぜると、学生はどうしても高度な部分に抵抗を感じて意欲を失いがちになる。そこで本書では本文は徹底的にやさしく記述し、「ディスカッション」でやや高度な話や他の科目と関連する話題を説明することで、両者を区別した。また「ディスカッション」には本書の前提となる線形代数や解析学の基礎事項の復習も含めた。

ii まえがき

さらに本書では他書によくある理論や定理の詳しい説明（これは読者にわかりやすくするためのサービスであろうが）をなるべく避け、例題を中心にした。これは主に数値例や証明や導出であるが、それ自体で完了するように簡潔に述べた。これは、定義や補題や定理や系の長い連鎖を経ないと結論が得られないということを守るためである。そのような長い連鎖は学生の意欲を失わせる原因の一つと思われる。

もちろんどの部分もそれ以前に示したことに基づいているが、以前の部分は忘れがちなので、頻繁に「チェック」項目を挿入し、基本的なことを何度も思い起こさせるとともに、着眼点や覚え方のコツまで指示した。

本書は大学に入学した1年次に、大学の勉強が高校とあまりに違って何も身につかずに落ちこぼれそうになった2年生を想定し、「ディスカッション」を通して学問のあり方や勉強の仕方にまで踏み込んでいる。ここまで徹底したものはわが国で最初ではないかと考えている。

例題の作成に協力頂いた岡山大学工学部の尺長健教授、菅谷保之助手、大学院生の坂上文彦氏、および（株）朋栄の松永力氏に感謝します。また編集の労をとられた共立出版（株）の小山透氏、大越隆道氏にお礼申し上げます。

2003年5月

金谷健一

目 次

第 1 章	最小二乗法	1
1.1	データの表現	1
1.1.1	直線の当てはめ	1
1.1.2	多項式の当てはめ	8
1.1.3	一般の関数による近似	13
1.1.4	選点直交関数系	16
1.2	関数の表現	17
1.2.1	関数の最小二乗近似	17
1.2.2	直交関数系	19
1.2.3	重みつき最小二乗近似	19
1.2.4	重みつき直交関数系	22
1.3	列ベクトルの表現	23
1.3.1	列ベクトルの最小二乗近似	23
1.3.2	列ベクトルの直交系	26
第 2 章	直交関数展開	31
2.1	関数の近似	31
2.1.1	直交関数系	31
2.1.2	最小二乗近似	33
2.1.3	重みつき直交関数系	37
2.1.4	重みつき最小二乗近似	41
2.1.5	選点直交関数系	45
2.1.6	選点最小二乗近似	47
2.2	計量空間	49

iv 目 次

2.2.1	内積とノルム	49
2.2.2	直交展開	57
2.2.3	直交射影	59
2.2.4	直交基底	60
2.2.5	シュミットの直交化	64
第 3 章	フーリエ解析	73
3.1	フーリエ級数	73
3.2	複素数の指数関数	78
3.3	フーリエ級数の複素表示	81
3.4	フーリエ変換	83
3.5	たたみこみ積分	92
3.6	フィルター	95
3.7	パワースペクトル	97
3.8	自己相関関数	102
3.9	サンプリング定理	106
第 4 章	離散フーリエ解析	113
4.1	離散フーリエ変換	113
4.2	周期関数のサンプリング定理	118
4.3	たたみこみ和定理	120
4.4	パワースペクトル	123
4.5	自己相関係数	126
4.6	1 の原始 N 乗根による表現	129
4.7	高速フーリエ変換	132
4.8	離散コサイン変換	139
第 5 章	固有値問題と 2 次形式	143
5.1	線形代数のまとめ	143
5.1.1	連立 1 次方程式と行列式	143
5.1.2	余因子展開と逆行列	146
5.1.3	線形結合, 線形独立, ランク	153
5.1.4	固有値と固有ベクトル	157

5.2	2次形式とその標準形	165
5.2.1	2次形式	165
5.2.2	転置行列	168
5.2.3	直交行列	171
5.2.4	対称行列の固有値と固有ベクトル	175
5.2.5	対称行列の対角化とスペクトル分解	177
5.2.6	2次形式の標準形	178
5.2.7	正值対称行列と正值2次形式	185
第6章	主軸変換とその応用	193
6.1	主成分分析	193
6.1.1	主軸変換	193
6.1.2	主成分	203
6.2	画像の表現	208
6.2.1	画像の展開	208
6.2.2	画像の基底	210
6.2.3	画像の固有空間	214
6.3	特異値分解	219
6.3.1	計算の効率化	219
6.3.2	特異値分解	226
第7章	ウェーブレット解析	231
7.1	信号の階層的近似	231
7.2	多重解像度分解	234
7.3	スケーリング関数	237
7.4	ウェーブレット	240
7.5	ウェーブレット変換	245
7.6	下降サンプリングと上昇サンプリング	249
7.7	一般のウェーブレット	252
	おわりに	259
	索引	263