

ステレオによる平面の直接的な再構成

金澤 靖† 金谷 健一‡

†群馬高等専門学校 電子情報工学科

‡群馬大学 工学部情報工学科

ステレオカメラの位置関係が与えられたとき、着目している空間中の特徴点がすべて同一平面上にあることが既知の場合に、その空間平面を推定する問題を考える。従来は、与えられた特徴点からその空間位置を推定し、その空間点に平面を最小二乗法等で当てはめるといような間接的な方法がよく用いられてきた。本稿では、観測した特徴点の幾何学的な制約を利用して、画像の誤差の統計的モデルに基づいた2段階最尤推定法により直接的に、かつ最適に平面を当てはめる方法について述べる。そしてシミュレーション実験により、その有効性を示す。

Direct Reconstruction of Planar Surface by Stereo

Yasushi Kanazawa† and Kenichi Kanatani‡

†Department of Information and Computer Engineering

Gunma College of Technology, Maebashi, Gunma, 371, Japan

‡Department of Computer Science

Gunma University, Kiryu, Gunma, 376, Japan

We consider the problem of reconstructing a planar surface by observing multiple feature points known to be coplanar. An indirect method often used is first reconstructing 3-D positions from correspondence pairs and then fitting a space plane to them. In this paper, we propose a direct method for reconstructing a planar surface by applying the principle of two-stage maximum likelihood estimation based on geometric constraints and a statistical model of image noise. We demonstrate the effectiveness of our method by doing numerical simulations.

1 はじめに

平面物体の認識は、ロボットの環境認識や人工物の認識などにとって極めて重要である。ステレオ画像を用いた場合、3次元空間内の平面は

- (1) 対応する画像点を求める、
- (2) 対応の取れた点より空間点を推定する、
- (3) 推定した空間点に平面を当てはめる、

等の処理により求まる。本稿では、このような間接的な手法ではなく、直接的かつロバストな平面の最適推定法について述べ、シミュレーションによって本手法の有効性を示す。

2 ステレオとカメラモデル

2台のカメラの中心をそれぞれ O, O' 、光軸をそれぞれ Z, Z' 軸とする右手系をとり、 Z 軸に垂直に焦点距離を f とする画像面($Z=f, Z'=f$)を想定する(図1参照)。2台のカメラの位置関係を回転 R (3×3 行列)と並進 h (3次元ベクトル)で表わし、それぞれ既知とする。この $\{R, h\}$ を運動パラメータと呼ぶ[1][2]。

注目する特徴点を $\{P_\alpha\}, \alpha = 1, \dots, N$ とし、第1、第2のカメラの画像面で画像座標をそれぞれ $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$ とする。以下ではこれを3次元ベクトル

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha/f \\ y_\alpha/f \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x'_\alpha = \begin{pmatrix} x'_\alpha/f \\ y'_\alpha/f \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

で表わす。

特徴点 $\{P_\alpha\}$ がすべて同一平面上にある場合を考える。その平面の単位法線ベクトルを n 、第1カメラ系の原点 O からの距離を d とすると、平面の方程式は $(n, r) = d$ と表わせる。

対応点 x_α, x'_α と運動パラメータ $\{R, h\}$ 、面のパラメータ $\{n, d\}$ の関係は次のように与えられる(導出省略)。

$$x'_\alpha \times A x_\alpha = 0, \quad A = \frac{R^T(hn^T - dI)}{\sqrt{1+d^2}} \quad (2)$$

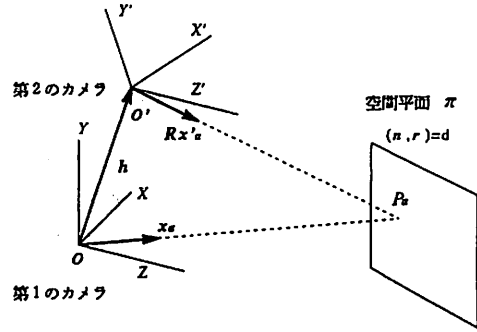


図1: カメラモデル

3×4 行列 B_α と4次元ベクトル ν を次のように定義する。

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} x'_\alpha \times R^T h x_\alpha^T & x'_\alpha \times R^T x_\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \begin{pmatrix} n \\ -d \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3)$$

ただし3次元ベクトル a と 3×3 行列 A との外積 $a \times A$ は a と A の各列とのベクトル積から成る行列と約束する[1][2]。これらを用いると式(2)は次のように書ける。

$$B_\alpha \nu = 0 \quad (4)$$

行列 B_α のランクは1であり(証明省略)、式(4)の各行の中で独立な式は一つである。

3 平面の最適推定

3.1 画像の誤差の統計的モデル

式(4)は画像に誤差があると成立しない。そこで真の値をそれぞれ $\bar{x}_\alpha, \bar{x}'_\alpha$ とし、実際に観測されるのは

$$x_\alpha = \bar{x}_\alpha + \Delta x_\alpha, \quad x'_\alpha = \bar{x}'_\alpha + \Delta x'_\alpha \quad (5)$$

であるとする。そして $\Delta x_\alpha, \Delta x'_\alpha$ は期待値0の独立な確率変数とみなし、それぞれの共分散行列を $V[x_\alpha], V[x'_\alpha]$ とする[5]。これらを

$$V[x_\alpha] = \epsilon^2 V_0[x_\alpha], \quad V[x'_\alpha] = \epsilon^2 V_0[x'_\alpha] \quad (6)$$

と表わす。 $V_0[x_\alpha], V_0[x'_\alpha]$ をそれぞれ正規化共分散行列、 $\epsilon (= \sigma/f)$ をノイズレベルと呼ぶ。ここで σ は画像面上での誤差の標準偏差を表わす。以下では $V_0[x], V_0[x']$ は既知であるが、 ϵ は未知であると仮定する。

3.2 2段階最尤推定法

観測した x_α, x'_α は式 (2) の条件を満たすとは限らない。したがって面のパラメータ ν を仮定し、 x_α, x'_α を補正した $x_\alpha - \Delta x_\alpha, x'_\alpha - \Delta x'_\alpha$ が式 (2) を満たすようにする。すなわち

$$(x_\alpha - \Delta x_\alpha) \times A(x'_\alpha - \Delta x'_\alpha) = 0 \quad (7)$$

となるように $\Delta x_\alpha, \Delta x'_\alpha$ を定める。このような $\Delta x_\alpha, \Delta x'_\alpha$ は無数に存在するが、その中で確率的に最も可能性の高いものを選ぶ。誤差の分布が正規分布であれば、これは次のようなマハラノビス距離による最適化として定式化できる。

$$J_\alpha = (\Delta x_\alpha, V_0[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) + (\Delta x'_\alpha, V_0[x'_\alpha]^{-1} \Delta x'_\alpha) \rightarrow \min \quad (8)$$

ただし $V_0[x_\alpha]^{-1}, V_0[x'_\alpha]^{-1}$ はそれぞれ $V_0[x_\alpha], V_0[x'_\alpha]$ の一般逆行列である¹。

このようにして最適に選んだ $\Delta x_\alpha, \Delta x'_\alpha$ を式 (8) に代入した残差は、仮定した面のパラメータ ν の関数であるから、これを $J_\alpha[\nu]$ と書く。これは定数差を無視すると、パラメータ ν が真の値であると仮定したときの観測データ x_α, x'_α に含まれる誤差の対数尤度 (の符号を変えたもの) とみなすことができる。したがって、各点の誤差が独立であれば、 ν の最適な推定はその総和の最小化

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N J_\alpha[\nu] \rightarrow \min \quad (9)$$

によって得られる。これを2段階最尤推定法と呼ぶ。

具体的に計算すると、この最小化は次のように表わせる (導出省略)。

$$J[\nu] = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (B_\alpha \nu, W_\alpha(\nu) B_\alpha \nu) \rightarrow \min \quad (10)$$

ただし $W_\alpha(\nu)$ は次のように定義される 3×3 行列である。

$$W_\alpha(\nu) = (V[B_\alpha \nu])_1^{-1} \quad (11)$$

ここで $(\cdot)_1^{-1}$ はランクを1に拘束した²一般化逆行列を表わす。また $V[B_\alpha \nu]$ は $B_\alpha \nu$ の共分散行列であ

¹ 誤差は画像面上に2次元に分布するので、行列 $V_0[x_\alpha], V_0[x'_\alpha]$ はともにランク2の特異行列である。

² スベクトル分解^[1]して、最大固有値以外の固有値を0と置く。

り、定義より $B_\alpha \nu = x'_\alpha \times A x_\alpha$ であるから次のように表わされる (導出省略)。

$$V[B_\alpha \nu] = \bar{x}'_\alpha \times A V[x_\alpha] A^T \times \bar{x}'_\alpha + (A \bar{x}_\alpha) \times V[x'_\alpha] \times (A \bar{x}_\alpha) + [V[x'_\alpha] \times A V[x_\alpha] A^T] \quad (12)$$

ただし 3×3 行列 A と3次元ベクトル a との外積 $A \times a$ と 3×3 行列 A, B の外積 $[A \times B]$ を次のように定義する。

$$A \times a = (a \times A^T)^T \quad (13)$$

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k,l,m,n=1}^3 \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} A_{km} B_{ln} \quad (14)$$

また ϵ_{ijk} はエディンガトンのイブシロン³である。

$\|\nu\| = 1$ の拘束条件の下で式 (10) を最小にする ν の共分散行列は次式で与えられる (証明省略)。

$$V[\nu] = \left(\sum_{\alpha=1}^N P_\nu B_\alpha^T W_\alpha(\nu) B_\alpha P_\nu \right)^{-1} \quad (15)$$

ただし $P_\nu = I - \nu \nu^T$ と定義する。

4 クリこみ法

式 (10) 中の行列 $W_\alpha(\nu)$ が定数行列 W_α であれば、式 (10) は次のように書き直せる。

$$J[\nu] = (\nu, M \nu) \rightarrow \min \quad (16)$$

ここで M は次のように定義した 4×4 次元モーメント行列である。

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (h, X_\alpha h) x_\alpha x_\alpha^T & \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha, X_\alpha h) x_\alpha^T \\ \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (h, X_\alpha x_\alpha) x_\alpha & \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha, X_\alpha x_\alpha) \end{pmatrix} \quad (17)$$

ただし 3×3 行列 X_α を次のように定義する。

$$X_\alpha = R(x'_\alpha \times W_\alpha \times x'_\alpha) R^T \quad (18)$$

式 (16) の右辺は ν の2次形式であるから、これを最小にする解はモーメント行列 M の最小固有値に対する4次元単位固有ベクトルによって与えられる。そこで、例えば ν の適当な初期値 ν_0 を仮定し、 $W_\alpha = W_\alpha(\nu_0)$ として得られる解を ν_1 とし、次に $W_\alpha =$

³ (ijk) が (123) の偶順列のとき1、奇順列のとき0をとる。

$W_\alpha(\nu_1)$ として得られる解を ν_2 とし、以下これを反復することが考えられる。しかし、このような反復では解に統計的な偏差が生じることが知られている [4]。これを防ぐには次のような (2 次) のくりこみ法 [3] を用いればよい (導出省略)。

- (1) $c = 0, W_\alpha = I, \alpha = 1, \dots, N$ とおく。
- (2) 式 (17) の 4×4 モーメント行列 M を計算する。
- (3) 次の 4×4 行列 $N^{(1)}, N^{(2)}$ を計算する。

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N ((h, X_\alpha h) V_0[x_\alpha] + (h, Y_\alpha h) x_\alpha x_\alpha^\top) \\ \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N ((V_0[x_\alpha] X_\alpha h)^\top + (x_\alpha, Y_\alpha h) x_\alpha^\top) \\ \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (V_0[x_\alpha] X_\alpha h + (x_\alpha, Y_\alpha h) x_\alpha) \\ \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N ((V_0[x_\alpha]; X_\alpha) + (x_\alpha, Y_\alpha x_\alpha)) \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$N^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (h, Y_\alpha h) V_0[x_\alpha] \\ \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (V_0[x_\alpha] Y_\alpha h)^\top \\ \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N V_0[x_\alpha] Y_\alpha h \\ \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (V_0[x_\alpha]; Y_\alpha) \end{pmatrix} \quad (20)$$

ただし 3×3 行列 Y_α と 3×3 行列 A, B の内積 $(A; B)$ を次のように定義する。

$$Y_\alpha = R[W_\alpha \times V_0[x'_\alpha]] R^\top \quad (21)$$

$$(A; B) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij} \quad (22)$$

- (4) 4×4 不偏モーメント行列

$$\hat{M} = M - cN^{(1)} + c^2 N^{(2)} \quad (23)$$

の最小固有値 λ と対応する 4 次元単位ベクトル ν を計算する。

- (5) $\lambda \approx 0$ であれば $\nu, c, \hat{M}$ を返す。そうでなければ c と W_α を次のように更新する。

$$D = \left((\nu, N^{(1)} \nu) - 2c(\nu, N^{(2)} \nu) \right)^2 - 4\lambda(\nu, N^{(2)} \nu) \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{if } D \geq 0, \\ c \leftarrow c + \frac{(\nu, N^{(1)} \nu) - 2c(\nu, N^{(2)} \nu) - \sqrt{D}}{2(\nu, N^{(2)} \nu)} \\ \text{if } D < 0, \\ c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\nu, N^{(1)} \nu)} \end{aligned} \quad (25)$$

$$n = N \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}, \quad d = -\frac{\nu_4}{\sqrt{1 - \nu_4^2}} \quad (26)$$

$$A = \frac{R^\top (h n^\top - d I)}{\sqrt{1 + d^2}} \quad (27)$$

$$W_\alpha \leftarrow \begin{pmatrix} x'_\alpha \times A V_0[x_\alpha] A^\top \times x'_\alpha \\ + (A x_\alpha) \times V_0[x_\alpha] \times (A x_\alpha) \\ + c[V_0[x'_\alpha] \times A V_0[x'_\alpha] A^\top] \end{pmatrix}_1^{-1} \quad (28)$$

- (6) ステップ 2 に戻る。

得られた ν より、面のパラメータ $\{n, d\}$ が次のように計算できる。

$$n = N \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}, \quad d = -\frac{\nu_4}{\sqrt{1 - \nu_4^2}} \quad (29)$$

5 3 次元復元

対応する点 x_α, x'_α が式 (2) を満たすように統計的に最適な補正を行なうと、それから計算される空間点 r_α は求めた平面上に載る。その最適な補正は以下のようなになる (導出省略)。

- (1) 対応する点 x_α, x'_α を次のように補正する。

$$\hat{x}_\alpha = x_\alpha - (V_0[x_\alpha] A^\top \times x'_\alpha) W_{0\alpha} (x'_\alpha \times A x_\alpha)$$

$$\hat{x}'_\alpha = x'_\alpha - (V_0[x'_\alpha] \times (A x_\alpha)) W_{0\alpha} (x'_\alpha \times A x_\alpha) \quad (30)$$

ただし 3×3 行列 $W_{0\alpha}$ を次のように定義する。

$$W_{0\alpha} = \begin{pmatrix} x'_\alpha \times A V_0[x_\alpha] A^\top x'_\alpha \\ + (A x_\alpha) \times V_0[x'_\alpha] \times (A x_\alpha) \end{pmatrix}_2^{-1} \quad (31)$$

ここで $(\cdot)_2^{-1}$ はランクを 2 に拘束した一般化逆行列である。

- (2) $\hat{x}'_\alpha \times A \hat{x}_\alpha \approx 0$ の条件が満たされていなければ、 $x_\alpha \leftarrow \hat{x}_\alpha, x'_\alpha \leftarrow \hat{x}'_\alpha$ としてステップ (1) に戻る。

- (3) 補正した $\hat{x}_\alpha, \hat{x}'_\alpha$ に対して、距離 Z_α を次のように計算する。

$$Z_\alpha = \frac{\|h \times R \hat{x}'_\alpha\|}{\|\hat{x} \times R \hat{x}'_\alpha\|} \quad (32)$$

- (4) 復元した空間点 $r_\alpha = Z_\alpha \hat{x}_\alpha$ を計算する。

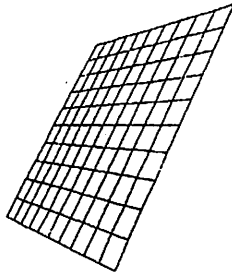


図 2: 平面 (真の値)

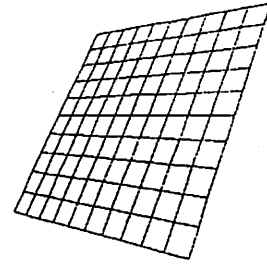


図 3: 真の平面 (実験例 2)

表 1: シミュレーションデータ

面の大きさ	500 × 500 画素	カメラの回転軸	$(1.0 \ 0.0 \ 0.0)^T$
法線ベクトル	$(-0.500000 \ 0.750000 \ 0.433013)^T$	カメラの回転角	20 度
原点からの距離	433.012702 画素	並進ベクトル	$(0.0 \ 350.0 \ 0.0)^T$
X 軸に対する角度	30.0 度	焦点距離	600 画素
Y 軸に対する角度	60.0 度	特徴点数	121 個
誤差の標準偏差	2 画素		

6 実験

6.1 シミュレーション

空間中に平面を置き、その平面上に特徴点を格子状に 11×11 個配置する (図 2 および表 1 参照)。第 1 のカメラを原点 O に固定し、第 2 のカメラを表 1 に示すように配置する。両カメラとも画像面を焦点距離 $f = 600$ 画素とし、各 x, y 画像座標に独立に標準偏差 2 画素の正規乱数を誤差として加える (図 4 および図 5 参照)。したがって正規化共分散行列 $V_0[x_0]$, $V_0[x'_0]$ はともに $\text{diag}(1, 1, 0)$ (対角要素が 1, 1, 0 の対角行列) であり、ノイズレベル $\epsilon = 2/600 = 1/300$ となる。ただし、計算ではノイズレベル ϵ は未知とみなす。

本手法により再構成した結果を図 6 に、また通常の方法により空間点を求め、最小二乗法により平面を当てはめた結果⁴を図 7 に示す。それぞれ図中の破線は真の特徴点位置からなる格子である。ひとつの計算結果を表 2 に示す。これらの図を比較してみると、本手法のほうがより望ましい結果が得られてい

ることがわかる。なお、くりこみ法における繰り返しはおよそ 3～4 回程度である。

また誤差のレベルを変えて (標準偏差 5 画素)、平面を復元した結果を図 3 および図 10～13 に示す。

6.2 誤差解析

面のパラメータ $\{n, d\}$ の誤差ベクトル Δu を次のように定義する。

$$\Delta u = P_{\bar{n}}(n - \bar{n}) + \frac{d - \bar{d}}{\bar{d}} \bar{n} \quad (33)$$

ここで $P_{\bar{n}} = I - \bar{n}\bar{n}^T$ であり、 $\{\bar{n}, \bar{d}\}$ は面のパラメータ $\{n, d\}$ の真の値である。式 (15) から計算した 4 次元ベクトル ν の理論共分散行列 $V[\nu]$ により、誤差ベクトルの共分散行列 $V[u]$ は次のようになる (導出省略)。

$$V[u] = V[n] + \frac{1}{d}(V[n, d]\bar{n}^T + \bar{n}V[n, d]^T) + \frac{1}{d^2}V[d]\bar{n}\bar{n}^T \quad (34)$$

⁴再構成法を付録に示す。

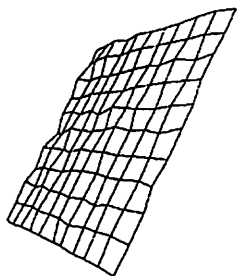


図 4: シミュレーション入力左画像

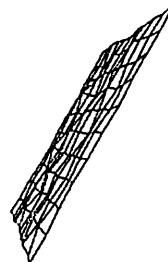


図 5: シミュレーション入力右画像

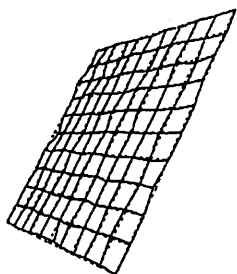


図 6: 本手法による再構成結果

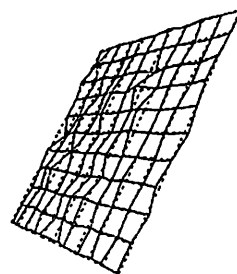


図 7: 通常の方法による再構成結果

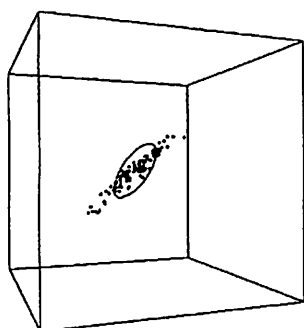


図 8: 本手法による誤差ベクトルと共分散行列

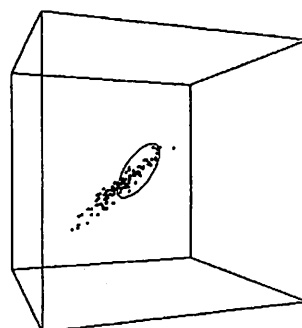


図 9: 通常の方法による誤差ベクトルと共分散行列

表 2: 計算結果の比較

		真の値	本手法	通常の方法
実験 1	n	$\begin{pmatrix} -0.500000 \\ -0.750000 \\ 0.433013 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.503096 \\ -0.749174 \\ 0.430852 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.503788 \\ -0.749605 \\ 0.429289 \end{pmatrix}$
	d	433.013	431.049	429.441
実験 2	n	$\begin{pmatrix} -0.500000 \\ 0.612372 \\ 0.612372 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.486038 \\ 0.620847 \\ 0.615074 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.499130 \\ 0.636890 \\ 0.587571 \end{pmatrix}$
	d	612.372	615.833	588.925

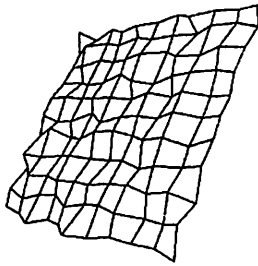


図 10: シミュレーション入力左画像 (実験例 2)

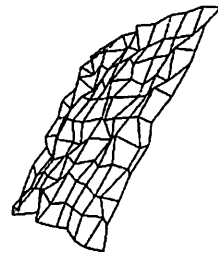


図 11: シミュレーション入力右画像 (実験例 2)

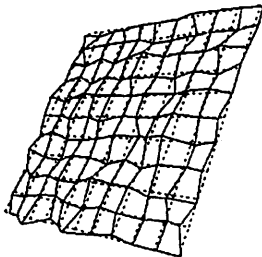


図 12: 本手法による再構成結果 (実験例 2)



図 13: 通常の方法による再構成結果 (実験例 2)

ここで $V[n]$, $V[n, d]$, $V[d]$ は以下の通りである。

$$V[n] = (1 + d^2) \times P_{\bar{n}} \begin{pmatrix} V[\nu]_{11} & V[\nu]_{12} & V[\nu]_{13} \\ V[\nu]_{21} & V[\nu]_{22} & V[\nu]_{23} \\ V[\nu]_{31} & V[\nu]_{32} & V[\nu]_{33} \end{pmatrix} P_{\bar{n}} \quad (35)$$

$$V[n, d] = -(1 + d^2)^2 P_{\bar{n}} \begin{pmatrix} V[\nu]_{14} \\ V[\nu]_{24} \\ V[\nu]_{34} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$V[d] = (1 + d^2)^3 V[\nu]_{44} \quad (37)$$

異なる誤差により 100 回実験を行なったときの誤差ベクトル Δu とその共分散行列を同時に表示したものを図 8 と図 9 に示す。図中の楕円は式 (34) の共分散行列 $V[u]$ を図示したものである (各方向の標準偏差の下限を表わす) これらを見ると、通常の方法では統計的偏差が生じていることがわかる。本手法では偏差が生じていない。また理論共分散行列は誤差の分布の下限を与えるものであるが、本手法の計算結果はほぼその下限を達成していることがわかる。

7 まとめ

本稿では、画像の誤差モデルに基づく平面の直接的な再構成法を示した。そしてシミュレーションにより、通常の方法と比較して誤差に対してロバストであり、統計的にも不偏であることが示された。また、くりこみ法を用いているため、一般の数値探索法のような局所解に陥いることなく、常に最適解を求めることができる。

ロボットへの応用等を考えたとき、室内の環境を考慮すると、この平面上の物体の認識は極めて重要であり、本手法は精度や誤差に対するロバスト性において、十分実用に耐えうる手法と思われる。

参考文献

- [1] 金谷健一: 「画像理解 / 3 次元認識の数理」, 森北出版, 1990.
- [2] K. Kanatani: *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford Univ. Press, Oxford, U.K., 1993.
- [3] 金谷健一: “くりこみ法による 3 次元運動解析: 統計的に最適なアルゴリズム”, 情報処理学会研究報告, Vol. 94, No. 27, 94-CV-88, 1994.

[4] 金谷健一: “コンピュータビジョンのためのくりこみ法”, 情報処理学会論文誌, Vol. 35, No. 2, pp. 201-209, 1993.

[5] 金谷健一: “画像の 3 次元解釈の統計的信頼性”, 情報処理学会論文誌, Vol. 34, No. 10, pp. 2062-2070, 1993.

付録 A. 通常の方法による再構成法

対応する点を x_α, x'_α とする。それぞれのカメラ系の原点を O, O' とするとき、 O を始点とし x_α を通る視線と、 O' を始点とし x'_α を通る視線の交点を求めればよい。しかし、 x_α, x'_α は誤差を含んでいるため、この 2 つの視線が交差するとは限らない。そこでこれらの視線の両方に最も近い点を復元点 r_α とする。この r_α はつぎのように計算できる。

$$m_\alpha = N[x_\alpha], \quad m'_\alpha = N[x'_\alpha] \quad (38)$$

$$\hat{r}_\alpha = \frac{(h, m_\alpha) - (m_\alpha, Rm'_\alpha)(h, Rm'_\alpha)}{1 - (m_\alpha, Rm'_\alpha)^2} \quad (39)$$

$$\hat{r}'_\alpha = \frac{(m_\alpha, Rm'_\alpha)(h, m_\alpha) - (h, Rm'_\alpha)}{1 - (m_\alpha, Rm'_\alpha)^2} \quad (40)$$

$$r_\alpha = \frac{1}{2}(\hat{r}_\alpha m_\alpha + (h + \hat{r}'_\alpha m'_\alpha)) \quad (41)$$

計算した復元点 $\{r_\alpha\}$ に最小二乗法で平面を当てはめるには次のようにする。

- (1) 復元点 $\{r_\alpha\}$ の重心 r_G を次のように計算する。

$$r_G = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N r_\alpha \quad (42)$$

- (2) モーメント行列

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (r_\alpha - r_G)(r_\alpha - r_G)^T \quad (43)$$

の最小固有値に対する単位固有ベクトルを平面の法線ベクトル n とする。

- (3) 平面までの距離 d を次のように計算する。

$$d = (n, r_G) \quad (44)$$

各復元点 $\{r_\alpha\}$ を求めた平面に載せる補正は次のように行なう。

$$\hat{r}_\alpha = r_G + P_n(r_\alpha - r_G) \quad (45)$$

ただし $P_n = I - nn^T$ である。