

直交性仮説による多面体の3次元形状復元

非会員 前原 一夫[†] 非会員 川島 孝夫^{††} 正員 金谷 健一^{††}

3D Recovery of Polyhedra by Rectangularity Heuristics

Kazuo MAEHARA[†], Takao KAWASHIMA^{††}, *Nonmembers and*
Ken-ichi KANATANI[†], *Member*

あらまし 多くの多面体物体には3辺が直交する頂点が多いことを利用し、カメラ画像からその3次元形状を復元する数学的手法を提案する。3辺が直交している頂点がわかれば、各辺の3次元方向は、カメラをレンズの中心の周りに回転し、その頂点を画像原点に移すのと同様な画像変換を適用することにより計算できる。これにより各面のこう配も計算できる。しかし、これは一般に誤差を含んでいるので面の不適合が生じ、多面体形状を復元できない可能性がある。そこで、各面のこう配の推定値を平均的に満たすような最適化を行うことにより、矛盾のない3次元形状を復元する。更に、3辺が直交する頂点を決定する発見の手順を示す。最後に、実際の画像から復元した例を示す。

1. ま え が き

人間は1枚の画像を見るだけで、そこに描かれている物体を3次元的に解釈することができる。これを計算機に行わせる代表的な研究の一つとして、多面体の線画解釈がある^{(1),(13)}。しかし、辺に凹凸を表すラベルを付けたり、3次元復元の可能性は調べることができても、3次元形状を一意的に復元することはできない。

一方、人間にはそれが可能であるから、知覚心理学に基づいた発見的仮説をあてはめることにより物体の一意的な3次元形状復元を可能にしようという研究がいろいろある。代表的な仮説としては、辺の平行性を仮定する「平行性仮説」^{(11),(17)}、面の形に関する「ひずみ対称性仮説」⁽⁴⁾、閉曲線に関する「閉曲線仮説」⁽³⁾などがある。本論文では、辺の直交性を仮定する「直交性仮説」^{(2),(5),(10),(12)}を用いた復元を行う。我々の周りの多くのものは直交する辺で構成されているので、この仮説は妥当であろう。

本論文では画像処理により既に必要な情報が得られているものとして、直交性仮説に基づき、単一画像か

ら多面体の3次元形状を復元する数学的手法を提案する。まず、カメラをレンズの中心の周りに回転すると同様な画像面の変換^{(6),(7)}を適用して、直交している3辺の3次元方向を計算する。その結果、各面のこう配が決まる。しかし、これは一般に誤差を含んでいるので、データ間に矛盾が生じる。そこで、全体的に矛盾のない多面体の形状を復元するための最適化^{(8),(9),(17)}を行う。

これは杉原^{(15),(16)}の提案した多面体の隣接構造の理論を適用したものであり、同様の考え方は文献⁽¹⁷⁾でも用いられている。ここでは平行辺を発見的に検出し、それらの消失点を推定することによって「辺の3次元方向」の推定値を計算し、辺の3次元方向がそのように推定した3次元方向に全体として近いように3次元形状復元を行っている。そして、変数変換によって問題を連立1次方程式に帰着させている。本論文では直交辺の解析により「面のこう配」の推定値を計算し、面のこう配がそのように推定したこう配に全体として近いように3次元形状復元を行う。そして、この場合も変数変換によって問題を連立1次方程式に帰着させることができることを示す。

最後に、3辺が直交する頂点を決定するための発見の手順を示す。更に、実際の画像を用いて復元した例を示す。

[†] 桐生市、東京都
TOSHIBA CORPORATION, Tokyo, 105 Japan
^{††} 群馬大学工学部情報工学科、桐生市
Department of Computer Science, Gunma University, Kiryu-shi,
376 Japan

2. カメラの回転による変換

空間中に XYZ 座標系をとり、Z 軸をカメラの光軸とする。XY 平面を画像面とし、Z 軸上の点 (0, 0, -f) を視点(レンズの中心)とする、焦点距離 f の中心投影を考える。空間中の点 (X, Y, Z) は XY 平面上の点 (x, y) に次のように投影される(図 1)。

$$x = \frac{fX}{f+Z}, \quad y = \frac{fY}{f+Z} \tag{1}$$

まず準備として、カメラを視点の周りに回転したときの画像の変換に関する数学的性質を文献(6)に従って整理する。

[定理 1] カメラの回転を回転行列 $R=(r_{ij})$ (行列式 1 の直交行列) で表すと、点 (x, y) は次のように、点 (x', y') に動く。

$$\begin{aligned} x' &= f \frac{r_{11}x + r_{21}y + r_{31}f}{r_{13}x + r_{23}y + r_{33}f}, \\ y' &= f \frac{r_{12}x + r_{22}y + r_{32}f}{r_{13}x + r_{23}y + r_{33}f} \end{aligned} \tag{2}$$

(証明) カメラの回転は、空間の逆方向の回転と同等である。空間が $R^{-1} (= R^T)$ だけ回転すれば、点 (X, Y, Z) は次のように、点 (X', Y', Z') に移る(図 2) (添字の T は、転置を表す)。

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ f+Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ f+Z \end{bmatrix} \tag{3}$$

この点が投影される画像面上の点 (x', y') は、 $x' = fX'/(f+Z')$ 、 $y' = fY'/(f+Z')$ で与えられる。この結果と式(1)により式(2)を得る。(証明終)

[定理 2] 画像面上の点 (a, b) を画像の原点に移動するカメラの回転は次のように与えられる。

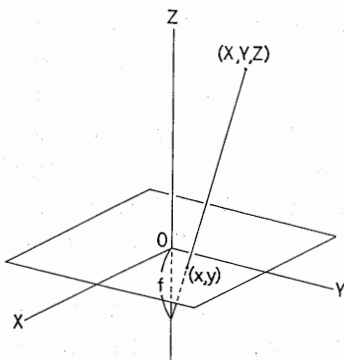


図 1 視点と画像面との関係
Fig. 1 Perspective projection onto the image plane.

$$R(a, b) \equiv \begin{bmatrix} E & F & l_1 \\ F & G & l_2 \\ -l_1 & -l_2 & l_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} l_1 &\equiv \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \quad l_2 \equiv \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \\ l_3 &\equiv \frac{f}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} E &\equiv \frac{a^2 l_3 + b^2}{a^2 + b^2}, \quad F \equiv \frac{ab(l_3 - 1)}{a^2 + b^2}, \\ G &\equiv \frac{b^2 l_3 + a^2}{a^2 + b^2} \end{aligned} \tag{6}$$

(証明) 視点から画像面上の点 (a, b) へ向かう 3 次元単位ベクトルは

$$l = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}}, \frac{f}{\sqrt{a^2+b^2+f^2}} \right) \tag{7}$$

となる(図 3)。このベクトルと Z 軸に沿う単位ベクトル $k=(0, 0, 1)$ とのなす角は次のようになる。

$$\Omega = \tan^{-1}(\sqrt{a^2+b^2}/f) \tag{8}$$

単位ベクトル l, k の両方に垂直な単位ベクトルは次の

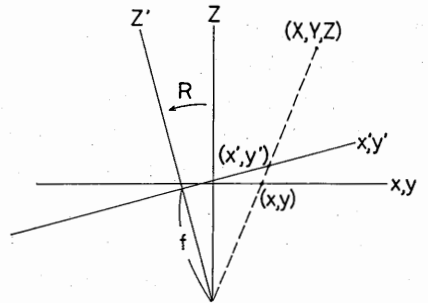


図 2 カメラの回転による画像面の変換
Fig. 2 Camera rotation transformation of the image plane.

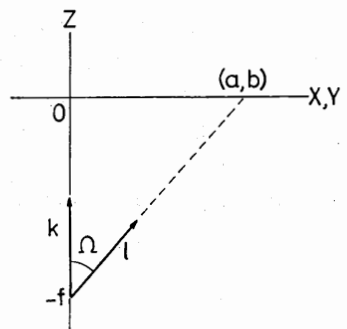


図 3 画像面上の点を指す単位ベクトル
Fig. 3 The unit vector pointing toward the point on the image plane.

ようになる。

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{l}}{\|\mathbf{k} \times \mathbf{l}\|} = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right) \quad (9)$$

もしカメラが単位ベクトル $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ の周りに右ねじ方向に角度 Ω だけ回転すれば、点 (a, b) は画像の原点に移動する。その回転行列 $\mathbf{R} = (r_{ij})$ は次のようになる。

$$r_{ij} = \delta_{ij} \cos \Omega + n_i n_j (1 - \cos \Omega) - n_{ij} \sin \Omega \quad (10)$$

但し、 δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、 $n_1 = n_{23} = -n_{32}$, $n_2 = n_{31} = -n_{13}$, $n_3 = n_{12} = -n_{21}$, とおいた。

これに式(8)と(9)を代入すれば、式(4)を得る。

(証明終)

式(4)の回転 $\mathbf{R}(a, b)$ を点 (a, b) に関する「標準変換」と呼ぶ。対応する式(2)の画像変換を $T_{(a,b)}$ と表し、点 (a, b) に関する「標準回転」と呼ぶことにする。

画像面上の直線は次のように表せる。

$$Ax + By + C = 0 \quad (11)$$

これに変換(2)を適用すると、直線(11)は別の直線

$$A'x + B'y + C' = 0 \quad (12)$$

に写像される。

[定理3] 係数の比 $A' : B' : C'$ は次のように与えられる。

$$r_{11}A + r_{21}B + r_{31}C/f : r_{12}A + r_{22}B + r_{32}C/f : f(r_{13}A + r_{23}B) + r_{33}C \quad (13)$$

(証明) 投影の関係式(1)を代入すると、式(11)は $A(fX/(f+Z)) + B(fY/(f+Z)) + C = 0$, すなわち

$$[ABC/f] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ f+Z \end{bmatrix} = 0 \quad (14)$$

と表せる。カメラを \mathbf{R} だけ回転すると、式(3)の関係から、 $A, B, C/f$ は次のように変換される。

$$\begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C'/f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C/f \end{bmatrix} \quad (15)$$

これから、式(13)が得られる。(証明終)

画像面上の点 (a, b) を始点とする半直線を考える。X 軸から測った角度を半直線の方向角とする。標準変換 $T_{(a,b)}$ を適用して、原点を始点とする半直線に写像したときの方向角 $\bar{\phi}$ をこの半直線の「標準角」と呼ぶことにする(図4)。

[定理4] 点 (a, b) を始点とする方向角 ϕ の半直線の標準角 $\bar{\phi}$ は次のように与えられる。

$$\bar{\phi} = -\tan^{-1} \frac{(fE + al_1)\tan\phi - (fF + bl_1)}{(fF + al_2)\tan\phi - (fG + bl_2)} \quad (16)$$

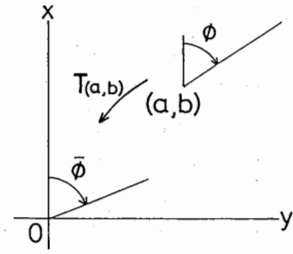


図4 標準変換 $T_{(a,b)}$ と標準角 $\bar{\phi}$

Fig. 4 Standard transformation $T_{(a,b)}$ and canonical angle $\bar{\phi}$.

但し、 l_1, l_2, E, F, G は式(5), (6)で定義したものである。また、 \tan^{-1} は2価関数であるので、二つの値のうち ϕ に近い方を選ぶ。

(証明) 点 (a, b) を通る直線は $A(x-a) + B(y-b) = 0$ と表せる。直線に標準変換 $T_{(a,b)}$ を適用すると、 $\bar{A}x + \bar{B}y = 0$ の形になる。但し、 \bar{A} と \bar{B} の比は、式(4)を式(13)に代入して次のように得られる。

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{(fE + al_1)A + (fF + bl_1)B}{(fF + al_2)A + (fG + bl_2)B} \quad (17)$$

もとの直線の方向角を ϕ , 標準角を $\bar{\phi}$ とすれば、 $A/B = -\tan\phi$, $\bar{A}/\bar{B} = -\tan\bar{\phi}$ が成立することから式(16)を得る。(証明終)

この結果として、頂点の3次元形状を解析するとき、画像自身に標準変換を適用して別の画像を生成する必要はない。なぜなら、標準角が計算のみによって得られるからである。

3. 直交辺の3次元復元

互いに直交する3辺の投影像を考える。頂点の画像座標を (a, b) とし、 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ($0 \leq \phi_1, \phi_2, \phi_3 < 2\pi$) を各辺の投影像の方向角とする。この3辺の3次元方向を計算するには、まず標準変換を適用して、頂点が画像原点にくるようにする。すると、投影関係が平行投影の場合と同じになる。この考え方に基づいた文献(5), (6)の結果より、以下で必要となるものを整理する。まず、3辺の標準角 $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3$ は式(16)により計算できる。これらの辺の空間中でZ軸となす角をそれぞれ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ($0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$) とする(図5)。すると、それぞれの辺に沿った単位ベクトルは次のように与えられる。

$$\bar{\mathbf{n}}_i = (\sin\theta_i \cos\bar{\phi}_i, \sin\theta_i \sin\bar{\phi}_i, \cos\theta_i), \quad i=1, 2, 3 \quad (18)$$

[定理5] 3辺すべてが頂点を始点として、画像面から遠ざかるように配置しているとき、すなわち $0 < \theta_1, \theta_2,$

$\theta_3 < \pi/2$ のとき、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \tan^{-1} \sqrt{-\frac{\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)}{\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1)}} \\ \theta_2 &= \tan^{-1} \sqrt{-\frac{\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1)}{\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}} \\ \theta_3 &= \tan^{-1} \sqrt{-\frac{\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)}{\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1)\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)}} \end{aligned} \quad (19)$$

もし辺 i が画像面に近づくように配置しているとき、すなわち、 $\pi/2 < \theta_i < \pi$ なら、 θ_i をその「鏡像」 $\pi - \theta_i$ に置き換える。

(証明) 3 辺が互いに直交しているという条件は $(n_i, n_j) = 0, i, j = 1, 2, 3, i \neq j$, すなわち

$$\begin{aligned} \sin\theta_i \sin\theta_j \cos(\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_j) + \cos\theta_i \cos\theta_j &= 0, \\ i, j = 1, 2, 3, i \neq j \end{aligned} \quad (20)$$

であり、次のように書き換えられる。

$$\tan\theta_i \tan\theta_j = -\frac{1}{\cos(\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_j)}, \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j \quad (21)$$

式(21)の三つの方程式の両辺をそれぞれ掛け合わせて、 $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi/2$ と仮定して両辺の平方根をとると次式を得る。

$$\begin{aligned} \tan\theta_1 \tan\theta_2 \tan\theta_3 &= \sqrt{-\frac{1}{\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1)}} \end{aligned} \quad (22)$$

式(21)と(22)から定理が得られる。(証明終)

各辺が画像面に近づくか遠ざかるかを判定するには、標準位置での 3 辺の投影像の配置を考慮する必要がある。どの 2 辺も $\pi/2$ より大きく π より小さい角をなすものを「フォーク」と呼び、ある 2 辺が π より大きく

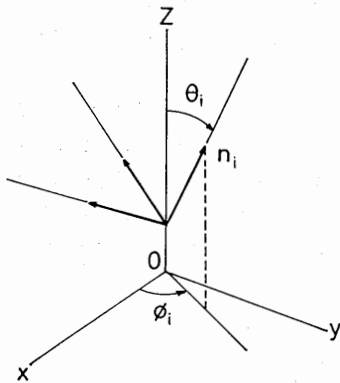


図5 頂点の投影は平行投影とみなせる

Fig. 5 Projection of the corner can be regarded as orthographic projection.

$3\pi/2$ より小さい角をなし、残りの角が $\pi/2$ より小さいものを「アロー」と呼ぶことにする(図6)(2辺のなす角がちょうど $\pi/2$ または π のものは考えないことにする)。

[定理6] 3 辺が直交していると解釈できる必要十分条件は、その投影像がフォークかアローであることである。

(証明) これは、式(19)と(22)と根号の中が正になる条件から得られる。すなわち

$$\cos(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\cos(\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_3)\cos(\bar{\phi}_3 - \bar{\phi}_1) < 0 \quad (23)$$

である。これを場合分けして調べれば定理が得られる。(証明終)

更に、式(21)をすべての場合について調べることにより次の定理を得る。

[定理7] 投影像がフォークなら、すべての辺が画像面に近づくか遠ざかるかのどちらかである。アローなら、両側の辺が画像面に近づき中央の辺が遠ざかるか、両側の辺が画像面から遠ざかり中央の辺が近づくかのいずれかである。

頂点の投影像が画像原点に位置するようにカメラ回転を施した 3 辺の位置を「標準位置」と呼ぶことにする。

[定理8] ある辺の標準位置での 3 次元方向の単位ベクトルが \bar{n} であれば、その頂点が点 (a, b) に投影される位置での 3 次元方向は次の単位ベクトルで与えられる。

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}(a, b)\bar{\mathbf{n}} \quad (24)$$

(証明) 標準変換 $T_{(a,b)}$ を適用することは、空間がカメラに相対的に $\mathbf{R}(a, b)^{-1}$ だけ回転することと同等である。従って、ベクトル $\bar{\mathbf{n}}$ に式(4)の $\mathbf{R}(a, b)$ を掛ければ、もとの位置に変換される。(証明終)

以上より、次の結論が得られる。

[定理9] 中心投影のもとでは、直交する 3 辺の 3 次元方向は、鏡像を除いて唯一に復元できる。

4. 最適化による 3 次元復元

多面体の形状は、それを構成する辺や面の 3 次元方

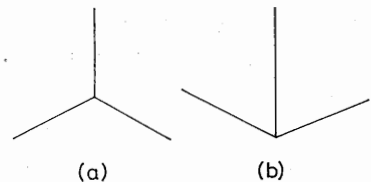


図6 (a) フォーク (b) アロー
Fig. 6 (a) Falk. (b) Arrow.

向が決まれば、絶対的なスケールを除いて唯一に決定される。例えば、すべての面のこう配が求まっていれば、それらの面がちょうどそれらの投影像に投影されるように、空間中でつぎ合わせることで形状が復元できるはずである。しかし、データに誤差があると、二つの隣接する面が一つの辺で交わらないという矛盾が起こる(図7)。矛盾のない3次元形状を復元するためには多面体の構造を考慮しなければならない。

そこで本論文でも文献(17)と同様に、多面体の「隣接構造」を次のように定義する。 $V_i, i=1, \dots, n$ を頂点, $F_\alpha, \alpha=1, \dots, m$ を面とする⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁶⁾。頂点 V_i が面 F_α の上にあることを (F_α, V_i) と書き, そのような対を「隣接対」と呼ぶ。 L を隣接対の数とする(3次元復元のためには隣接構造が「正則」である必要があるが, 常に正則であるように修正できる^{(14),(16)})。頂点 $V_i, i=1, \dots, n$ の3次元座標を (X_i, Y_i, Z_i) とし, $Z = p_\alpha X + q_\alpha Y + r_\alpha$ を面 $F_\alpha, \alpha=1, \dots, m$ の方程式とする。面 F_α のこう配は (p_α, q_α) で表され, 隣接条件 (F_α, V_i) は次式で表される。

$$Z_i = p_\alpha X_i + q_\alpha Y_i + r_\alpha \quad (25)$$

新しい変数 x_i, y_i, z_i を次のように定義する。

$$x_i = \frac{fX_i}{f+Z_i}, \quad y_i = \frac{fY_i}{f+Z_i}, \quad z_i = \frac{fZ_i}{f+Z_i} \quad (26)$$

すると (x_i, y_i) は式(2)より, ちょうど頂点 V_i の画像座標となっている。また, (X_i, Y_i, Z_i) が (x_i, y_i, z_i) と1対1対応し, 逆の関係は次のようになる。

$$X_i = \frac{fx_i}{f-z_i}, \quad Y_i = \frac{fy_i}{f-z_i}, \quad Z_i = \frac{fz_i}{f-z_i} \quad (27)$$

式(27)を式(25)に代入すれば次式が得られる。

$$z_i = \frac{fp_\alpha}{f+r_\alpha} x_i + \frac{fq_\alpha}{f+r_\alpha} y_i + \frac{fr_\alpha}{f+r_\alpha} \quad (28)$$

ここで, 新しいパラメータ $P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$ を次のように定義する。

$$P_\alpha \equiv \frac{fp_\alpha}{f+r_\alpha}, \quad Q_\alpha \equiv \frac{fq_\alpha}{f+r_\alpha}, \quad R_\alpha \equiv \frac{r_\alpha}{f+r_\alpha} \quad (29)$$

逆の関係は次のようになる。

$$p_\alpha = \frac{P_\alpha}{1-R_\alpha}, \quad q_\alpha = \frac{Q_\alpha}{1-R_\alpha}, \quad r_\alpha = \frac{fR_\alpha}{1-R_\alpha} \quad (30)$$

これらの新しい変数を用いれば, 条件(25)は次の式と等価である。

$$z_i = P_\alpha x_i + Q_\alpha y_i + fR_\alpha \quad (31)$$

(x_i, y_i) は頂点の画像座標であるので既知である。 n 個の変数 $z_i, i=1, \dots, n$ と, 面に関する $3m$ 個のパラメータ $P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha, \alpha=1, \dots, m$ が未知数であり, 未知数に関して線形な方程式である。

各面のこう配の推定値を $(\hat{p}_\alpha, \hat{q}_\alpha), \alpha=1, \dots, m$ とし, 真のこう配 $(p_\alpha, q_\alpha), \alpha=1, \dots, m$ との差の2乗和を最小にする最小2乗法で推定することを考える(図8)。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m W_\alpha [(p_\alpha - \hat{p}_\alpha)^2 + (q_\alpha - \hat{q}_\alpha)^2] \quad (32)$$

ここで, W_α は面 F_α の重みである。式(30)をこれに代入すると, 次のように未知パラメータ $P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$ で表せる。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m W_\alpha \left(\frac{f+r_\alpha}{f} \right)^2 [(P_\alpha + \hat{p}_\alpha R_\alpha - \hat{p}_\alpha)^2 + (Q_\alpha + \hat{q}_\alpha R_\alpha - \hat{q}_\alpha)^2] \quad (33)$$

面 F_α の Z 軸に沿う距離 r_α やこう配が大きいと測定が不正確になりやすいので, 小さい重みを割り当てるのが妥当であろう。ここでは次のように選ぶ。

$$W_\alpha = \frac{1}{\hat{p}_\alpha^2 + \hat{q}_\alpha^2 + 1} \left(\frac{f}{f+r_\alpha} \right)^2 \quad (34)$$

以上より, 問題は式(33)を拘束条件とする最小化問題になる。但し, 物体の絶対的なスケールは決定できない。そこで, 任意の一つの頂点を選んで, z の値を与えたとする。その頂点を V_n とすると, 最小化問題は次の定理にまとめられる。

[定理10] 頂点 $V_i, i=1, \dots, n-1$ の各 z_i は, 次の n

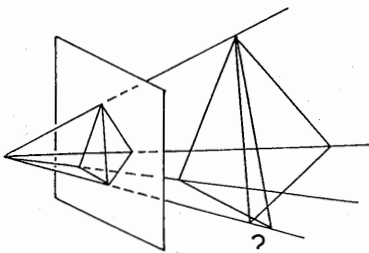


図7 面の接続の不適合
Fig. 7 Incompatibility of face adjacency.

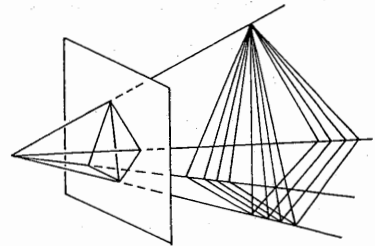


図8 無数の可能な解から最適化により解を選ぶ
Fig. 8 One solution is chosen from among infinitely many consistent polyhedron solutions by optimization.

+3m+L-1個の連立1次方程式を解くことで求まる。

$$P_a x_i + Q_a y_i + f R_a - z_i = 0 \quad (F_a, V_i) \quad (35)$$

$$P_a + \hat{p}_a R_a + \sum_i (\hat{p}_a^2 + \hat{q}_a^2 + 1) x_i \Lambda_{ai} = \hat{p}_a$$

$$\alpha = 1, \dots, m \quad (36)$$

$$Q_a + \hat{q}_a R_a + \sum_i (\hat{p}_a^2 + \hat{q}_a^2 + 1) y_i \Lambda_{ai} = \hat{q}_a$$

$$\alpha = 1, \dots, m \quad (37)$$

$$\sum_i (\hat{p}_a x_i + \hat{q}_a y_i - f) \Lambda_{ai} = 0 \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (38)$$

$$\sum_a \Lambda_{ai} = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (39)$$

但し総和は、存在する隣接対に対しとられる。

(証明) 式(31)に対応するラグランジュ乗数 Λ_{ai} を導入すれば、問題は次の制約なしの最小化問題となる。

$$\tilde{J} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^m \frac{1}{\hat{p}_a^2 + \hat{q}_a^2 + 1} [(P_a + \hat{p}_a R_a - \hat{p}_a)^2 + (Q_a + \hat{q}_a R_a - \hat{q}_a)^2] + \sum_{a,i} \Lambda_{ai} (P_a x_i + Q_a y_i + f R_a - z_i) \quad (40)$$

式(35)は、式(31)そのものである。式(36), (37), (39)はそれぞれ \tilde{J} を $P_a, Q_a, \alpha = 1, \dots, m, z_i, i = 1, \dots, n-1$ について微分して、0とおくことで得られる。式(38)は \tilde{J} を R_a について微分して0とおき、式(36), (37)を代入して得られる。(証明終)

すべての面 $F_a, \alpha = 1, \dots, m$ に対してこう配の推定値 (\hat{p}_a, \hat{q}_a) が与えられている必要はない。もし面 F_a のこう配の推定値が与えられていないときは、式(40)の右辺から対応する項を除くことにより、式(36), (37), (38)を次式に置き換えればよいことがわかる。

$$\sum_i x_i \Lambda_{ai} = 0, \sum_i y_i \Lambda_{ai} = 0, \sum_i \Lambda_{ai} = 0 \quad (41)$$

5. 直交辺発見法による最適化

1枚の画像からの多面体の3次元復元を考える。ある頂点において3辺が直交していることがわかれば、3辺の3次元方向は鏡像を除いて計算できる。各辺の方向は他の2辺で定義される面の法線を示すから、三つの面のこう配が決まる。互いに鏡像である二つの解の一つを選ばなければならないが、ここでは簡単のため、いつでも正しい解を選ぶことができるとする(例えば、Huffman-Clowesのエッジのラベル付け^{(1),(13)}や、直角多面体の解釈⁽⁶⁾による。もし、そのようにしても鏡像の解が除けなければ、両方の解を保持したまま、

以下の手続きを行う)。

もし一つの面がそのような頂点を二つ以上もっているなら、各頂点で計算したこう配の平均値をその面のこう配として割り当てる。また、そのような頂点をもたない面にはこう配の推定値は与えられないが、前節で指摘したように最適化には差し支えない。残る問題は、どのようにして3辺が直交する頂点を見つけるかである。

これは、1枚の画像を用いている限り、数学的には不可能な問題である。なぜなら、与えられた頂点の投影像に投影されるような頂点の3次元形状は無数にあり、辺が直交しているべきであるという情報はどこからも得られないからである。この困難を回避するために次の原理を導入する：「頂点で辺が直交していると仮定して矛盾が生じないならそう仮定する。」すなわち、仮説を立て、それを反ばくしようと試み、反ばくに失敗したときその仮説を受理するという方針である。これは人工知能における推論方式の典型的なものであり、文献(17)でも平行辺の発見手順に同様な考えが用いられている。この方針によれば、必要なのは矛盾を発見するための手続きである。これを次のように行う。

- (1) 直交性テスト 一つの手掛りは、定理6である。すなわち、標準角を計算して、標準位置での投影像がフォークにもアローにもならないものを除く。具体的に言えば、3辺の作る三つの角が次の条件の一つでも満たすならば、その3辺は直交し得ない(図9)。
- (a) 一つが鋭角であり、残りの二つが鈍角である。
 - (b) 一つが鋭角であり、もう一つが鈍角であり、もう一つが π より大きい。
 - (c) 二つが鋭角であり、もう一つが $3\pi/2$ より大きい。
- しかし、残った頂点すべてで3辺が必ずしも直交しているとは限らない。

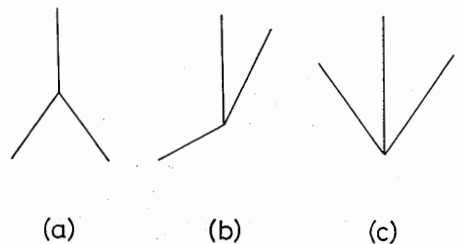


図9 直交する3辺の投影とみなせないもの
Fig. 9 None of these can be a projection of a rectangular corner.

(2) 適合性テスト 次の手掛りは、2 頂点についての適合性である。少なくとも一つの面を共有する二つの頂点を選び、どちらも3辺が直交すると仮定し、それぞれ共有する面のこう配を計算する。もしこの仮定が正しいなら、共有する面は一致したこう配をもつはずである(但し、ある程度の誤差は考慮しなければならない)。そうでないとき、2 頂点では同時には3辺が直交しないと判定する。

これらのテストを適用し、矛盾がない限り仮定を広げて、極大な適合集合を作る。各々の集合に属する頂点ではすべて3辺が直交していると仮定すると、これらの極大適合集合と同じ数だけの解が得られる。

6. 実行例

図 10 (a)は、多面体の画像である。図 10 (b)の線画が得られたとし、頂点と面に図のようにラベルを付ける。頂点 $V_1, V_3, V_4, V_6, V_{10}$ で3辺が交わっている(頂点 V_8 は面 F_2 だけに隣接する)。最初に、直交性テストにより頂点 V_3 が除かれる。残りを少なくとも一つの面を共有している組にまとめると、次のようになる。

$\{V_1, V_4\}, \{V_1, V_{10}\}, \{V_4, V_6\}, \{V_4, V_{10}\}, \{V_6, V_{10}\}$
これに対して適合性テストを行うと、どれも不適合が生じない。そこで、ただ一つの適合集合ができる。これらの頂点ではすべて3辺が直交すると仮定し、各面のこう配を計算し、最適化を行えば、図 10 (c)のような3次元形状が復元できる。上が上面図であり、下が側面図である。

図 11 (a)は別の画像である。図 11 (b)の線画が得られたとし、頂点と面に図のようにラベルを付ける。頂点 $V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_{10}$ で3辺が交わっている。今度は、直交性テストではどの頂点も除けない。これらを少なくとも一つの面を共有している組にまとめると、次のようになる。

- $\{V_2, V_3\}, \{V_2, V_4\}, \{V_2, V_6\}, \{V_2, V_7\},$
- $\{V_2, V_{10}\}, \{V_3, V_4\}, \{V_3, V_5\}, \{V_3, V_6\},$
- $\{V_3, V_7\}, \{V_3, V_{10}\}, \{V_4, V_5\}, \{V_4, V_6\},$
- $\{V_5, V_6\}, \{V_5, V_7\}, \{V_5, V_8\}, \{V_6, V_7\},$
- $\{V_6, V_8\}, \{V_6, V_{10}\}, \{V_7, V_8\}, \{V_7, V_{10}\},$
- $\{V_8, V_{10}\}$

適合性テストによって、これらは二つの極大適合集合 $\{V_2, V_7, V_8, V_{10}\}, \{V_3, V_4, V_5, V_6\}$ に分けられる。各々に属する頂点ですべて3辺が直交すると仮定し、各面のこう配を計算し、最適化を行えば、図 11 (c), (d)の二つの3次元形状が復元できる。

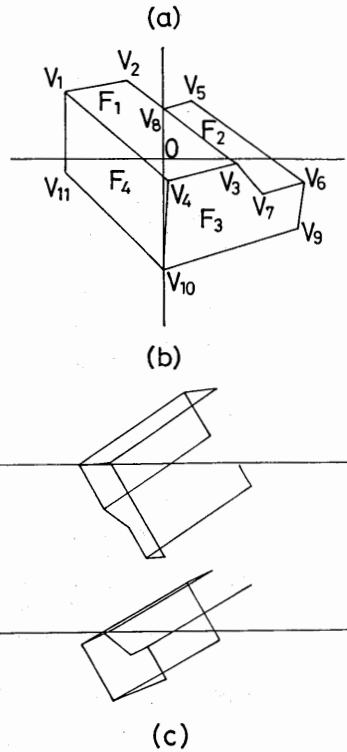
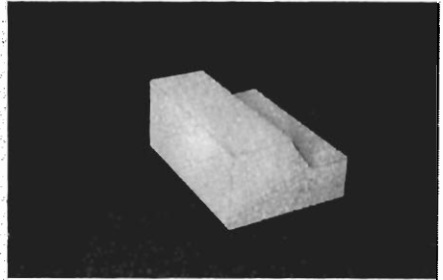
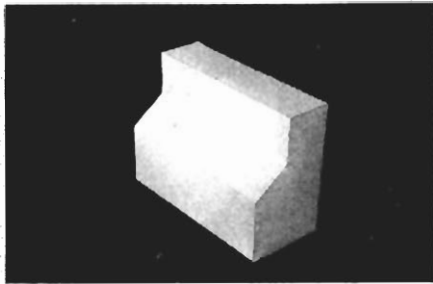


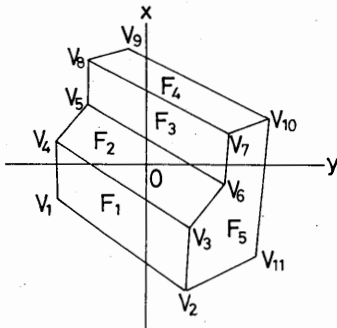
図 10 (a) 物体の画像 (b) 線画と隣接構造 (c) 復元した3次元形状の上面図と側面図
Fig. 10 (a) A polyhedron image. (b) Labeling of its line drawing. (c) The top view and the side view of the reconstructed shape.

図 10 (a)と図 11 (a)の物体は実際には同じ物体であり、正しい形状が復元できている。このことから、もし違った角度から撮られた同じ物体の二つの画像があれば、正しい解は同一の形状をもたなければならないことから偽の解は取り除くことができる。

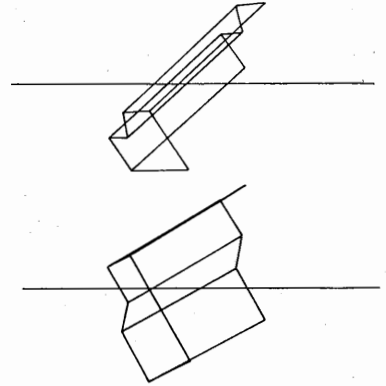
また、偽の解は真の解とは形状がはなはだしく異なることが多いので、真の形状に関する何らかの拘束、例えばアスペクト比(最大径とそれに直交する最大径との比)の上限がわかっているならば、偽の解を取り除くのは容易である。あるいは、物体のもつ平行辺を推定し、



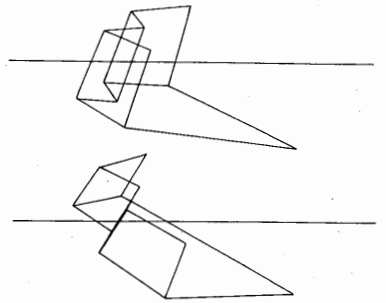
(a)



(b)



(c)



(d)

図 11 (a) 物体の画像 (b) 線画と隣接構造 (c) 復元した 3 次元形状の上面図と側面図(解 1) (d) 復元した 3 次元形状の上面図と側面図(解 2)

Fig. 11 (a) A polyhedron image. (b) Labeling of its line drawing. (c) The top view and the side view of one 3D reconstruction. (d) The top view and the side view of the other reconstruction.

その消失点の与える拘束を利用すれば⁽¹⁷⁾, 解は除かれる。

7. むすび

本論文では, 中心投影された画像から多面体の 3 次元形状を復元する手法を示した. 3 辺が直交している頂点がわかれば, 各辺の 3 次元方向が計算できる. これに関してはいろいろな方法があるが^{(2),(17)}, 本論文では, 画像原点では角度情報に関して中心投影と平行投影との差がないことを利用したカメラの回転による変換⁽⁶⁾を用いた. このようにして面のこう配の推定値が得られたのち, 画像処理で生じる誤差を多面体の構造を考慮した最適化^{(15),(16)}を用いて克服することにより, 矛盾のない 3 次元形状が復元できる.

本論文でも文献(17)と同様に, 特殊な変数変換により問題を連立 1 次方程式に帰着させているので, 出発値の推定や探索の反復を必要としない. また, 3 辺が直

交する頂点を決定する発見の手順を示した. そして, これらの手法を実際の画像に適用した.

謝辞 本研究に関して討論頂いた NTT ヒューマンインタフェース研究所の尺長健氏, 東大工学部計数工学科の杉原厚吉助教授に感謝する. 本研究の一部は, カシオ科学研究財団, 矢崎科学技術振興記念財団, 稲盛財団, および文部省科学研究費一般研究(C) (No. 63550268) による.

文 献

- (1) D. H. Ballard and C. M. Brown: "Computer Vision", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NY (1982), 福村晃夫ほか訳: "コンピュータ・ビジョン", 日本コンピュータ協会(昭 62).
- (2) S. T. Barnard: "Choosing a basis for perceptual space", Comput. Vision Graphics Image Process., **29**, pp. 87-99 (1985).
- (3) M. Brady and A. Yuille: "An extremum principle for shape from contour", IEEE Trans. Pattern Anal.

Machine Intell., **PAMI-6**, pp. 288-301 (1984).

- (4) T. Kanade: "Recovery of the three-dimensional shape of an object from a single view", *Artif. Intell.*, **17**, pp. 409-460 (1981).
 - (5) K. Kanatani: "The constraints on images of rectangular polyhedra", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, **PAMI-8**, pp. 456-463 (1986).
 - (6) K. Kanatani: "Constraints on length and angle", *Comput. Vision Graphics Image Process.*, **41**, pp. 28-42 (1988).
 - (7) K. Kanatani: "Camera rotation invariance of image characteristics", *Comput. Vision Graphics Image Process.*, **39**, pp. 328-354 (1987).
 - (8) 金谷健一, 田中俊江, 前原一夫, 川島孝夫: "最適化による多面体の3次元形状復元", 昭63情処学全大, SV-4, pp. 1643-1644.
 - (9) 金谷健一, 吉田淳一郎: "ノイズに強いオブティカルフローからの3次元復元", 情処学CV研資, 87-CV-48 (昭62-05).
 - (10) A. K. Mackworth: "Model-driven interpretation in intelligent vision systems", *Perception*, **5**, pp. 349-370 (1976).
 - (11) P. G. Mulgaonkar, L. G. Shapiro and R. M. Hanalick: "Shape from perspective: A rule-based approach", *Comput. Vision Graphics Image Process.*, **36**, pp. 298-320 (1986).
 - (12) 尺長 健, 金子 博: "透視角度変換—角度情報からの形状情報復元", 信学論(D), **J70-D**, 10, pp. 1931-1940 (昭62-10).
 - (13) 白井良明: "コンピュータビジョン", 昭晃堂(昭55).
 - (14) 杉原厚吉: "多面体線画の数理的構造—線画を介した計算機との対話をめざして", 情報処理, **22**, 3, pp. 209-217 (昭56-03).
 - (15) 杉原厚吉: "線画の代数構造を利用した単眼画像からの立体復元法", 信学論(D), **J66-D**, 5, pp. 541-548 (昭58-05).
 - (16) K. Sugihara: "Machine Interpretation of Line Drawings", MIT Press, Cambridge, MA (1986).
 - (17) 田中俊江, 川島孝夫, 金谷健一: "平行性仮説による多面体の3次元復元", 信学論(D-II), **J72-D-II**, 4, pp. 517-525 (平1-04).
- (昭和63年10月31日受付, 平成元年2月2日再受付)

川島 孝夫



昭63群馬大・工・情報卒。同年同大大学院修士課程進学。画像処理および画像データの計算の問題の研究を行っている。

金谷 健一



昭47東大・工・計数(数理工学)卒。昭44~45米ケースウェスタンリザーブ大学留学。昭54東大大学院・計数(博士)了。工博。同年群馬大・工・情報助手。昭58同助教授。昭63同教授。昭60~61米メリーランド大学客員研究員。昭63デンマーク・コペンハーゲン大学客員教授。61年度情報処理学会論文賞。情報処理学会, 日本ロボット学会, IEEE各会員。

前原 一夫



昭63群馬大・工・情報卒。同年嶺東芝入社。情報処理・制御システム事業本部所属。分散処理コンピュータ用ディスクコントローラのファームウェアの設計・開発に従事。