



構造異方性によりひずみを決定する ステレオロジーの理論

金 谷 健 一*

Stereological Determination of Strain from Structural Anisotropy

by

Ken-ichi Kanatani*

(Received on May 11, 1983)

It is shown that the strain of a material can be measured, without knowing the size of its undeformed state, by observing the anisotropy of its internal structure. The method makes use of the principle of so called "stereology". First, the line structure in the plane is considered. Its anisotropy is characterized by a distribution density, which is related to the number of intersections of the structure and a probe line randomly placed on the plane. The transformation of the distribution density due to a deformation of the material is given, so that the strain is determined from the number of intersections on the probe line. The same scheme is presented for the line structure and the interface structure in the space as well, and a procedure to determine the stress is given in terms of observations on probe lines or cutting planes.

1. はじめに

材料のひずみを知るにはその変形前と変形後の形状を測定する必要がある。しかし、ある1つの試料が与えられたとき、その材料のこれまでに受けたひずみを知りたいことがある。たとえば材料試験では試料に変形履歴があるかどうか調べる必要があり、もしあれば熱処理により取り除かなければならないし、その後どの程度取り除かれたかも調べなければならぬ。また、たとえば圧延を受けて成形された試料から圧延の程度を知りたい場合も生じる。ところが、ひずみはその定義が変形前後の寸法の差によって与えられる量であるから、試料の形状測定によってこれを知ることは不可能である。しかし、もし材料の内部組織に着目すればこれが可能となる。たとえば変形前の内部組織が等方的に分布していたとすれば変形後はもはや等方的ではないから、その異方性の程度

がわかればその材料の受けたひずみもわかるはずである〔注意：以下本文で「等方性」、「異方性」というとき、材料の「力学特性」、すなわち構成方程式（応力ひずみ関係式）が座標系の回転に対して変化しない形に書けるかどうか、を指しているのではない。ここでは内部組織が等方的に分布しているか、特定の方向のものが多くなっているか、ということを議論しているのであってそれと変形に必要な応力との関係を考えているのではない。また「変形」、「ひずみ」というときは塑性変形、塑性ひずみを考えている〕。

通常、多くの材料は内部組織をもっている。金属では結晶、粒界、析出物、含有物などがあり、場合によれば内部欠陥も内部組織とみなすことができる。また種々の有機材料、あるいは人工的に成形した複合材料など内部組織をもつ例は多い。これらの内部組織の形態としては大別して点状組織（球形粒子が分散したものなど）、線状組織（針状に分散するもの、網目構造をもつものなど）、面状組織（板状に分散するもの、セル構造をもつものなど）となるであろう。点状の場合は方向性をもた

1983年5月11日受付

* 群馬大学工学部・情報工学科：桐生市天神町1-5-1
Department of Computer Science, Gunma University
Kiryu-City, Gunma, 376 Japan.

ないからここでは除外する。線状や面状の場合に組織の線や面の向きの分布が測定できればそれが組織の異方性を特徴づけるから、したがって、受けたひずみもわかるはずである。ところが、実際問題として3次元的分布を直接測定することは容易でない。通常、われわれが観測できるのは材料の表面や、いろいろの方向から切断した断面に限られるといってもよい。

このような2次元断面上での観測から3次元的特性を知る問題はステレオロジーと呼ばれ、金属学や生物学、医学、地質学などで以前から研究されてきた^{1)~4)}。特に上記の点状組織に相当する球形粒子の個数、平均径、あるいは粒径分布などを2次元断面上に現われる切り口の分布から計算することはよく調べられており、金属材料の試験^{5),6)}、に応用されている。また粉体工学においても、この方法で粉体の粒径分布を求めようとする試みがあり⁷⁾、土の微視構造を知るために土質力学でも関心がもたれている⁸⁾。同じ手法が岩盤中のクラックの大きさの分布の推定にも応用されている⁹⁾。これらの問題の数値解法の比較検討も行なわれている^{10),11)}。

一方、線や面のような方向性のある対象に関するものはその起源が「Buffonの針の問題」にさかのぼる¹²⁾。これを具体的な解析手段として定式化したのはHilliard¹³⁾であり、金谷¹⁴⁾はテンソルによる一般理論にまとめた。これは針状、板状の粒子の配向特性を記述するものとして粉体工学に応用され¹⁵⁾、コンピュータによる画像認識にも用いられている^{16),17)}。本報告では、金谷の一般論¹⁴⁾を具体化して内部組織の異方性の測定から材料が受けたひずみを与える公式を導く。

2. 2次元線状組織の異方性

最初に平面上に線状組織がある場合を考える。これは短繊維強化複合材料のように線分とみなせるものが分散していてもよいし、繊維組織のように無限に長いとみなせるものでもよいし、あるいは金属の粒界の断面写真のように網目構造を作っているもよい。要するにどんな幾何学的構造であろうとも、とにかく線(直線でも曲線でもよい)から構成されていればよい。たとえばクラックを含む材料の切断面を考えて、割れ目の太さを無視することができればこれも線状組織とみなすことができる。

このような平面上の線状組織の方向特性は「分布密度」 $f(\theta)$ によって特徴づけることができる。これは数学的には次のように定義される。まず線状組織を長さ無限小の微小線素に分割する。1つの線素の向きは平面上に定められたある $x-y$ 座標系の x 軸からの角度 θ で指定される。ただし θ と $\theta + \pi$ とが同じ方向を表わすという2価性が生じるので、どちらを選ぶかをランダムに確率

$1/2$ で定めることとする。そして $f(\theta)$ を、方向が θ と $\theta + d\theta$ との間にあるような線素の総長が単位面積当たり $f(\theta)d\theta$ であるように定める。これは $0 \leq \theta < 2\pi$ で定義される関数で、定義より $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$ が単位面積当たりの組織の総長となる。また、これは「対称」、すなわち $f(\theta) = f(\theta + \pi)$ となっている。そして $f(\theta)$ の最大となる方向 θ が、最も多くの線素の並ぶ方向、すなわち巨視的にみた極性(異方性の軸方向)を表わす。組織が完全にランダムであれば $f(\theta)$ は定数、すなわち一様分布となる。

以上の定義は概念的なものであり、たとえば微小線素の向きをランダムに決めず、 $0 \leq \theta < \pi$ となるようにして同じように $f_1(\theta)$ を定めてから、 $0 \leq \theta < \pi$ で $f(\theta) = f_1(\theta)/2$ 、 $\pi \leq \theta < 2\pi$ で $f(\theta) = f_1(\theta - \pi)/2$ と定義しても同じことになる。いずれにしてもこれを定義に従って計測することは大変であり、実際的でない。定義通りにしようとするれば微小線素に分割して、方向ごとにその個数を数え上げてヒストグラムを作ることになる。しかし、ヒストグラムの区間を小さくとると観測のばらつきに影響されてしまう(有限長の線素を有限個数えることしかできないのだから)。ところがステレオロジーの考え方を利用すれば、これを極限操作を含まない形に表わすことができる。

いま、この平面上に方向 θ の直線をランダムに置くとする。この直線と線状組織との交点数を考えると、その期待値は直線の単位長さ当たり、

$$N(\theta) = \int_0^{2\pi} |\sin(\theta - \theta')| f(\theta') d\theta' \quad (1)$$

となる(これは方向 θ 、長さ dl の微小線素が交点をもつのはその中心が直線から距離 $|\sin(\theta - \theta')|dl/2$ 以内で落ちるときであることからわかる。Fig. 1 参照)。この $N(\theta)$ を知るには方向 θ の直線を多数、等間隔に平行

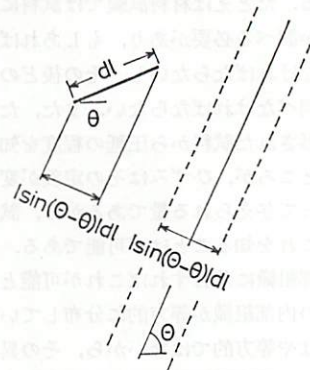


Fig. 1 A line element intersects the probe line when its center falls within the area of width $|\sin(\theta - \theta')|dl$ along the line.

に引いて, その交点数を数えればよい (「等間隔」と「ランダム」とが等価になるのは, 直線の方程式を $x \sin \theta - y \cos \theta = h$ と書いたとき, $d\theta \wedge dh$ が不変 Harr 測度であることから明らかである¹⁸⁾⁻²¹⁾). これはコンピュータによる画像処理装置を用いれば能率的であるが, 肉眼でも容易に実行できる. 式 (1) は $0 \leq \theta < 2\pi$ で定義された未知の関数 $f(\theta)$ を同じく $0 \leq \theta < 2\pi$ で定義された既知の関数 $N(\theta)$ に変換する公式であるから, これの逆変換を行えば $N(\theta)$ の測定によって $f(\theta)$ を知ることができる. 金谷¹⁴⁾ による結果を以下に述べる [文献 14) では式 (1) はほかの場合とともに一般化され, テンソル関係式で表わされ, Buffon 変換と呼ばれている. ここではその結果を極座標表示に直した具体的な形のものを示す. 付録 1 参照].

$N(\theta)$ は $0 \leq \theta < 2\pi$ で定義されているので, これを Fourier 級数によって,

$$N(\theta) = \frac{C}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \right] \quad (2)$$

$$C = \int_0^{2\pi} N(\theta) d\theta \quad (3)$$

$$A_n = 2 \int_0^{2\pi} N(\theta) \cos n\theta d\theta / C \quad (4)$$

$$B_n = 2 \int_0^{2\pi} N(\theta) \sin n\theta d\theta / C \quad (5)$$

と表わすことができる. ただし \sum' は偶数番目のみに関する和を表わす. これは $N(\theta)$ が「対称」すなわち $N(\theta) = N(\theta + \pi)$ であって奇数番目の周波数成分を含まないためである. このとき $f(\theta)$ は次のようになる¹⁴⁾.

$$f(\theta) = \frac{C/4}{2\pi} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \right] \quad (6)$$

この結果を用いて, 式 (2) の $N(\theta)$ の値を多くの θ で測定しておいて, たとえば高速 Fourier 変換 (FFT)^{22), 23)} によって式 (6) を求めることも可能であるが, これは実際的ではない. というのは式 (6) からわかるようにこの変換は高周波成分ほど増幅率が大きく, 誤差に対して極めて不安定となっているからである. しかし実際には異方性を特徴づけるのに高次の周波数成分は不要であり, C, A_2, B_2 のみ計算すれば十分な場合がほとんどである. その理由は, Fourier 級数の 0 次の項が等方性 (一様分布) を表わす項であり (1 次の項はないから), 2 次の項が等方性からのずれを直交異方性として表わす項であり, 4 次以降の項は直交異方性からのずれを表わすものとなっているためである. 2 次の項が直交異方性を表わすことは A_2, B_2 が 2 階の対称偏差テンソル

$$\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & -A_2 \end{bmatrix}$$

を作っていることからわかる. この主軸が異方性の対称軸であり, その固有値が偏りの比率を表わしている. これは「ファブリックテンソル」と呼ばれている (一般論は金谷²⁵⁾ 参照). そこで 2 次の項で打ち切ることを「直交異方性近似」と呼ぶことにする. 現実の材料では, その異方性を直交異方性として扱って十分な場合が多いから直交異方性近似で充分実用的である. この手法で針状粒子の充填構造の異方性を計測することもできる¹⁵⁾.

3. 2次元線状組織の変形とひずみ

線状組織をもつ平面が次のような一次の変形を受けたとする.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r} \quad (7)$$

ただし \mathbf{r}, \mathbf{r}' はそれぞれ変形前後の 2 次元位置ベクトルである. \mathbf{n} を変形前の単位ベクトルとすると変形後にはもはや単位ベクトルではなく, その長さは次のようになる.

$$L(\mathbf{n}) = \sqrt{\mathbf{n}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{n}} \quad (8)$$

ここで T は転置を表わす. ゆえに単位ベクトル \mathbf{n} で表わされる方向は変形後に単位ベクトル,

$$\mathbf{n}' = \frac{1}{L(\mathbf{n})} \mathbf{A}\mathbf{n} \quad (9)$$

で表わされる方向に移る. 式 (9) は単位円周上 S^1 から単位円周上 S^1 への写像と考えることができる. これは微分可能な写像であり, そのヤコビアン dn'/dn は次のようになる¹⁴⁾ (dn は極座標では $d\theta$ と表わされる角度の微分を表わす).

$$\frac{dn'}{dn}(\mathbf{n}) = \det \frac{\mathbf{A}}{L(\mathbf{n})} \quad (10)$$

したがって, $f(\mathbf{n})$ を変形前の組織の分布密度とすれば, 変形後は次のようになる.

$$f(\mathbf{n}') = \frac{L(\mathbf{n})}{\det \mathbf{A}} f(\mathbf{n}) / \frac{dn'}{dn}(\mathbf{n}) \quad (11)$$

これを直接計算するのは複雑になるので変形が小さい場合を考える. すなわち,

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{F} \quad (12)$$

とし, (\mathbf{I} は単位行列, 「変形テンソル」 \mathbf{F} が小さいとする. これの対称部分と反対部分を次のようにおく.

$$\mathbf{F} = \mathbf{e} + \mathbf{r} \quad (13)$$

$$\mathbf{e} \equiv (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T)/2, \quad \mathbf{r} \equiv (\mathbf{F} - \mathbf{F}^T)/2 \quad (14)$$

\mathbf{e} が「ひずみテンソル」であり, \mathbf{r} が回転を表わすテンソルである. さらにひずみテンソル \mathbf{e} をスカラー部分と偏差部分とに分解する.

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\text{Tr } \mathbf{e}) \mathbf{I} + \mathbf{e} \quad (15)$$

$$\bar{\epsilon} \equiv e - \frac{1}{2}(\text{Tre})I \quad (16)$$

そして、変形前の分布密度が次のように直交異方性近似されているとする。

$$f(\theta) = \frac{c}{2\pi} [1 + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta] \quad (17)$$

これを用いて式 (11) を計算すると変形後の分布密度は次のようになる¹⁴⁾ (付録 2 参照)。

$$f(\theta) = \frac{c'}{2\pi} [1 + a_1' \cos 2\theta + b_1' \sin 2\theta + a_4' \cos 4\theta + b_4' \sin 4\theta] + O(F^2) \quad (18)$$

$$c' = c \left[1 - \frac{1}{2} \text{Tre} + \frac{1}{2} (a_2 \bar{\epsilon}_{11} + b_2 \bar{\epsilon}_{12}) \right] \quad (19)$$

$$a_1' = a_2 + 3 \bar{\epsilon}_{11} - \frac{1}{2} a_2 (a_2 \bar{\epsilon}_{11} + b_2 \bar{\epsilon}_{12}) + 2 b_2 r_{12} \quad (20)$$

$$b_1' = b_2 + 3 \bar{\epsilon}_{12} - \frac{1}{2} b_2 (a_2 \bar{\epsilon}_{11} + b_2 \bar{\epsilon}_{12}) - 2 a_2 r_{12} \quad (21)$$

$$a_4' = \frac{5}{2} (a_2 \bar{\epsilon}_{11} - b_2 \bar{\epsilon}_{12}) \quad (22)$$

$$b_4' = \frac{5}{2} (a_2 \bar{\epsilon}_{12} + b_2 \bar{\epsilon}_{11}) \quad (23)$$

特に初期に等方性であって $f(\theta) = c/2\pi$ であれば変形後に、

$$f(\theta) = \frac{c(1 - \text{Tre}/2)}{2\pi} [1 + 3 \bar{\epsilon}_{11} \cos 2\theta + 3 \bar{\epsilon}_{12} \sin 2\theta] \quad (24)$$

となる。これと式 (6) とを比較してみると、

$$\text{Tre} = 2(1 - C/4c) \quad (25)$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} -A_2 & -B_2 \\ -B_2 & A_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

となる。以上よりステレオロジーによるひずみ測定の手続きをまとめると次のようになる。

(1) 区間 $[0, \pi]$ を N 等分した方向 $\theta_k = \pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ に等間隔の平行線を引き、組織との交点数を単位長さ当り N_k とおく。

(2) C, A_2, B_2 を次のように計算する [式(3), (4), (5) に対応]。

$$C = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} N_k / N \quad (27)$$

$$A_2 = 2 \sum_{k=0}^{N-1} N_k \cos(2\pi k/N) / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad (28)$$

$$B_2 = 2 \sum_{k=0}^{N-1} N_k \sin(2\pi k/N) / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad (29)$$

(3) すると材料の受けたひずみは式 (25), (26) で与えられる。

式 (25) は材料の等方的拡大縮小を表わすもので、これを知るには変形前の組織の密度 c を知らなければならない。しかし式 (26) の偏差ひずみは交点数から直接

に決定される。これは初期に等方性を仮定した場合であるが、初期に等方性でなくてもその分布が既知であれば式 (18)~(23) を用いて同様のことができる^{16), 17)}。

例として Fig. 2 を考える。これは乱数を用いて作ったランダムなパターンを変形したものである。これに方向がそれぞれ $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 170^\circ$ の平行線を重ねて交点数を数えたデータが Fig. 3 である。ただし、 $N(\theta)/\int_0^{2\pi} N(\theta)d\theta$ を表わすように規格化してある。平行線の間隔は輪郭の直径の $1/27$ のものを用いた。このデータ

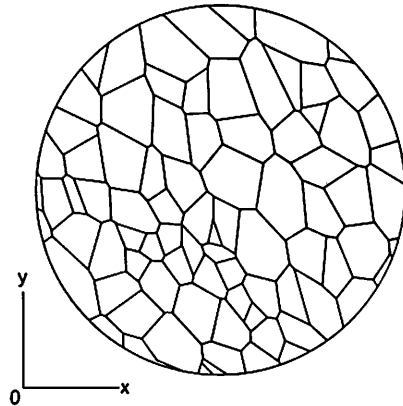


Fig. 2 An artificial pattern isotropically generated by random numbers and distorted afterwards.

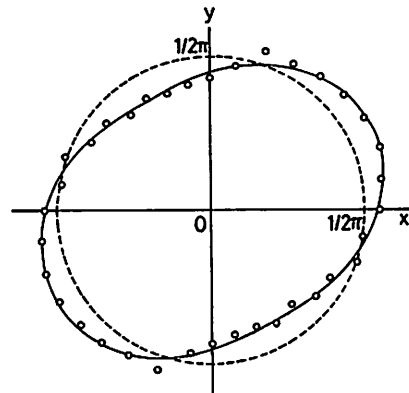


Fig. 3 Normalized data of intersection counting on Fig. 1 and the curve approximating thematerial by orthogonal anisotropy.

より式 (28), (29) の A_2, B_2 を計算すると $A_2 = 0.0987$, $B_2 = 0.1492$ となる。Fig. 2 の曲線はこれを用いた直交異方性としての (すなわち 2 次の Fourier 成分までの) 近似である。式 (6) の関係より分布密度に直したものが Fig. 4 である。ただし、曲線は $f(\theta)/\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$ に規格化してある。一方、式 (26) より、初期に等方性

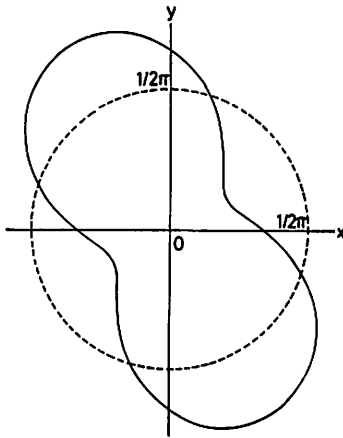


Fig. 4 The distribution density of line segments of Fig. 1 obtained by transforming the curve of Fig. 2.

を仮定した場合の受けた偏差ひずみテンソルは直ちに,

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} -0.0987 & -0.1492 \\ -0.1492 & 0.0987 \end{bmatrix} \quad (30)$$

となる。1つの主軸方向は 28.3° であるので x - y 座標を 28.3° だけ回転した新しい x' - y' 座標に関して,

$$\bar{e}' = \begin{bmatrix} -0.1789 & 0 \\ 0 & 0.1789 \end{bmatrix} \quad (31)$$

となる。すなわち 28.3° 方向に約 0.6 倍の圧縮 (または 118.3° 方向に約 1.4 倍の引張) を受けている。

4. 3次元線状組織の異方性

空間に線状組織が分布している場合もその異方性を特徴づけるのは分布密度である。 x - y - z 座標系が与えられているとし、線状組織を長さ無限小の微小線素に分割する。1つの線素の向きは x - y - z 座標系に関する球面座標 (θ, ϕ) で表わされる (Fig. 5 参照)。ただし (θ, ϕ) と $(\pi - \theta, \phi + \pi)$ は同じ方向なので前と同じようにラン

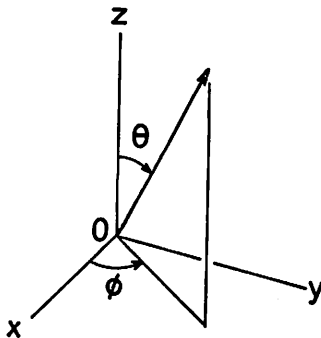


Fig. 5 The spherical coordinates associated with the xyz -coordinate system.

ダムに確率 1/2 で一方を選ぶことにする。そして分布密度 $f(\theta, \phi)$ を方向が θ と $\theta + d\theta$, ϕ と $\phi + d\phi$ との間にあるような線素の総長が単位体積当り $f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$ であるように定める。これは単位球面上で定義される関数であり、「対称」すなわち $f(\theta, \phi) = f(\pi - \theta, \phi + \pi)$ である (前と同じように $0 \leq \theta < \pi$ のみで考えてから対称に拡張するという定義でもよい)。

$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$ が単位体積中の組織の総長である。前と同様に $f(\theta, \phi)$ の最大となる方向が巨視的にみた極性 (異方性の軸方向) を表わす。組織が完全にランダムであれば $f(\theta, \phi)$ は定数, すなわち一様分布となる。

空間的に分布する組織を直接計測することは困難であるから、断面上の観察からこれを測定する必要がある。断面上には組織との交点が現われるからこれを数えればよい。これを定式化するために、この空間内に法線方向が (Θ, Φ) である平面をランダムに置くことを考える。するとその交点数の期待値は単位面積当り,

$$N(\Theta, \Phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \gamma| f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (32)$$

となる。ただし γ は 2 方向 (θ, ϕ) , (Θ, Φ) のなす角であり,

$$\cos \gamma = \sin \theta \sin \Theta \cos(\phi - \Phi) + \cos \theta \cos \Theta \quad (33)$$

である [これも方向 (θ, ϕ) , 長さ dl の微小線素が交点をもつのはその中心が平面から距離 $|\cos \gamma| dl / 2$ 以内に落ちるときであることからわかる。 Fig. 6 参照]。式 (32) は球面上 S^2 の関数を同じく球面上 S^2 の関数に変換する式であり、やはり Buffon 変換と呼ばれ、テンソルによる一般論、その逆変換が調べられている¹⁴⁾。その結果を具体的な形で書けば次のようになる (付録 1 参照)。

$N(\Theta, \Phi)$ は球面調和関数展開によって、次のように

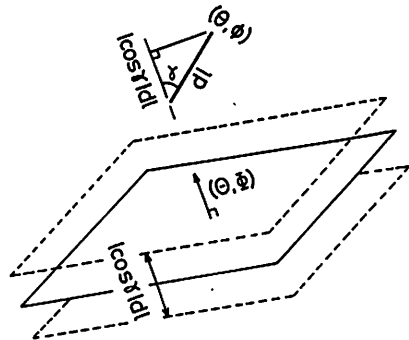


Fig. 6 A line element intersects the probe plane when its center falls within the part of thickness $|\cos \gamma| dl$ along the plane.

表わすことができる。

$$N(\theta, \phi) = \frac{C}{4\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{A_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi) \right\} \right] \quad (34)$$

$$C = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} N(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (35)$$

$$A_{nm} = \frac{2(2n+1)}{C} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} N(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \sin \theta d\theta d\phi \quad (36)$$

$$B_{nm} = \frac{2(2n+1)}{C} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} N(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \sin \theta d\theta d\phi \quad (37)$$

ただし、 P_n は Legendre の多項式、 P_n^m は Legendre の陪関数である。このとき分布密度 $f(\theta, \phi)$ は次のようになる。

$$f(\theta, \phi) = \frac{C/2\pi}{4\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (-1)^{n/2-1} 2^{n-1} (n-1) (n+2) / \binom{n}{n/2} \left\{ \frac{A_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi) \right\} \right\} \right] \quad (38)$$

5. 3次元線状組織の変形とひずみ

線状組織をもつ空間が式(7)の一次変形を受けたとする。ただし、 r, A 等を3次元のベクトル、テンソルと解釈する。単位ベクトル n は変形後その長さが式(8)となるから変形による方向の変換(単位球面上 S^2 から単位球面上 S^2 への写像)は式(9)で表わされ、そのヤコビアンも式(10)となる。ただし、 dn は球面座標で $\sin \theta d\theta d\phi$ で表わされる微分立体角と解釈する。分布密度の変換は式(11)となる。以下、式(12), (13), (14)のようにおく。ただし、式(15), (16)は次のように改める。

$$e = \frac{1}{3} (\text{Tre}) I + \bar{e} \quad (39)$$

$$\bar{e} \equiv e - \frac{1}{3} (\text{Tre}) I \quad (40)$$

変形前の分布密度が直交異方性近似により表わされるとすればそれは次の形になる。

$$f(\theta, \phi) = \frac{c}{4\pi} \left[1 + \frac{1}{8} a_{20} (1 + 3 \cos 2\theta) + \frac{3}{2} \{ \sin 2\theta (a_{21} \cos \phi + b_{21} \sin \phi) + (1 - \cos 2\theta) (a_{22} \cos 2\phi) \right]$$

$$+ b_{22} \sin 2\phi \} \quad (41)$$

このとき、変形後の分布関数を計算することができる。その形はテンソルによる一般式で求められているが¹⁴⁾、これを球面座標により具体的に書き下すのは極めて煩雑になる(付録3参照)。以下、ひずみを決定する手順のみを示す。

(1) 単位球面上にランダムに点を N 個選び、その方向を (θ_k, ϕ_k) , $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ とする。これは $\sin \theta$ で重みづけした乱数によって $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ を選べばよい。

(2) 法線方向 (θ_k, ϕ_k) の平面で切って単位面積当りの交点数を数えて、それを N_k とする。実際にはその方向の面を等間隔に次々と削って、現われる交点数の平均をとるのがよい。これを $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ とする。そのためには、あらかじめ内部組織が統計的に同じとみなされる試料を N 個用意しておけばよい。

(3) 得られたデータ N_k , $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ より次の $C, A_{20}, A_{21}, A_{22}, B_{21}, B_{22}$ を計算する[式(35)~(37)に対応]。

$$C = 4\pi \sum_{k=0}^{N-1} N_k / N \quad (42)$$

$$A_{20} = \frac{5}{4} \sum_{k=0}^{N-1} N_k (1 + 3 \cos 2\theta_k) / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad (43)$$

$$A_{21} = \frac{5}{2} \sum_{k=0}^{N-1} N_k \sin 2\theta_k \cos \phi_k / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad (44)$$

$$A_{22} = \frac{5}{8} \sum_{k=0}^{N-1} N_k (1 - \cos 2\theta_k) \cos 2\phi_k / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad (45)$$

$$B_{21} = \frac{5}{2} \sum_{k=0}^{N-1} N_k \sin 2\theta_k \sin \phi_k / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad (46)$$

$$B_{22} = \frac{5}{8} \sum_{k=0}^{N-1} N_k (1 - \cos 2\theta_k) \sin 2\phi_k / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad (47)$$

(4) もし初期分布が等方性で $f(\theta, \phi) = c/4\pi$ であれば、受けたひずみは次の通りである。

$$\text{Tre} = \frac{3}{2} (1 - C/2\pi c) \quad (48)$$

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} A_{20} + 3 A_{22} & 3 B_{22} & \frac{3}{2} A_{21} \\ 3 B_{22} & -\frac{1}{4} A_{20} - 3 A_{22} & \frac{3}{2} B_{21} \\ \frac{3}{2} A_{21} & \frac{3}{2} B_{21} & \frac{1}{2} A_{20} \end{bmatrix} \quad (49)$$

6. 3次元面状組織の異方性

空間に面状組織が分布している場合を考える。線状組織と同様に離散的に分散していても連続的につながって

いてもよい。たとえば板状介在物が分散していてもよいし、全体をおおうセル状構造を作ってもよい。またクラックなども割れ目の厚さが無視できるなら面状組織とみなせる。このような面状組織の異方性構造も分布密度によって特徴づけられる。やはり $x-y-z$ 座標系を固定し、面状組織を面積無限小の微小面素に分割する。1つの面素の向きはその法線方向を $x-y-z$ 座標系に関する球面座標 (θ, ϕ) で表わすことによって指定される。ただし、どちら側の面の法線を考えるかによって2価となるのでランダムに確率 1/2 でどちらかを選ぶとする。そして分布密度 $f(\theta, \phi)$ を法線方向が θ と $\theta+d\theta$ 、 ϕ と $\phi+d\phi$ との間にあるような面素の総面積が単位体積当り $f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$ であるように定める。これも単位球面上で定義される関数であり、「対称」すなわち $f(\theta, \phi) = f(\pi-\theta, \phi+\pi)$ である (前と同じように $0 \leq \theta < \pi$ のみ考えてから対称に拡張するという定義でもよい)。 $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$ が単位体積中の組織の総面積である。 $f(\theta, \phi)$ の最大となる方向が巨視的にみた極性 (異方性の軸方向) を表わす。組織が完全にランダムであれば $f(\theta, \phi)$ は定数、すなわち一様分布である。

線状組織と同様に面状組織も空間的分布を直接計測することは困難である。より低い次元に還元して測定する必要があるが、ここで二通り考えられる。1つは空間中に直線を置き、組織との交点を数える方法であり、他は空間中に面を置き組織との交線の長さを測る方法である。後者の場合は材料を切断して断面上に現われる線状組織の長さを測ればよいが、前者の場合、置こうとする直線を含む面で切断してから、その断面上に直線を引くことになる。どちらも場合によって有効であるので両方の場合を考える。まず直線を置く場合を考える。方向が (θ, ϕ) の法線をランダムに置いたとき、組織との交点の数の期待値は単位長さ当り、

$$N(\theta, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos \gamma| f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \tag{50}$$

となる。ただし γ は2方向 (θ, ϕ) 、 (θ, ϕ) のなす角である [これも法線方向 (θ, ϕ) 、面素 dS の微小面素が交点をもつのはその中心が、直線を中心軸とし断面が $|\cos \gamma| dS$ の柱状領域に落ちるときであることからわかる。Fig. 7 参照]。式 (50) は式 (32) とまったく同一である。したがって、線状組織の方向を面状組織の法線方向と、これを切る面の法線方向をこれを通る直線の方にそれぞれ読み換えれば同じ関係が成立する。すなわち、 $N(\theta, \phi)$ に式 (34)~(37) の球面調和関数展開を行なえば $f(\theta, \phi)$ は式 (38) で与えられる。

一方、法線方向が (θ, ϕ) の平面をランダムに置いた

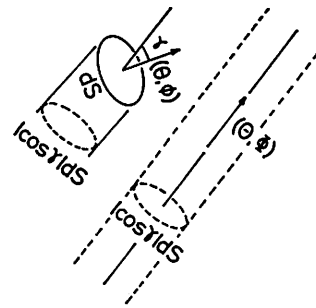


Fig. 7 A surface element intersects the probe line when its center falls within the cylinder of base area $|\cos \gamma| dS$ along the line.

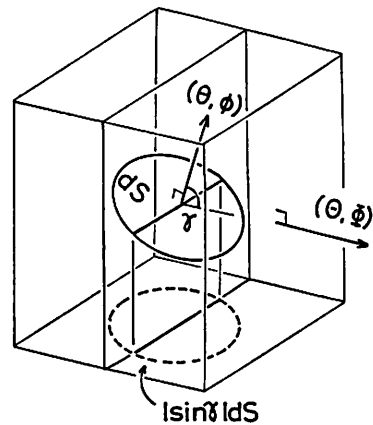


Fig. 8 The expected intersection length over the probe of unit volume is equal to the projected area of the surface element onto the plane parallel to the intersection line and normal to the probe plane.

とき、組織との交線の長さは単位面積当り、

$$L(\theta, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\sin \gamma| f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \tag{51}$$

となる (切断面の法線と交線とに平行な面へ射影してみれば交線長の期待値は射影された面素の面積 $|\sin \gamma| dS$ に等しいことがわかる。Fig. 8 参照)。この逆変換を行なうには $L(\theta, \phi)$ に式 (34)~(37) の球面調和関数展開を行なう (N を L に読み換える)。結果は次のようになる。

$$f(\theta, \phi) = \frac{C/\pi^2}{4\pi} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(2^{2n-1} (n-1) / n \binom{n}{n/2} \right) \left\{ \frac{A_{n0}}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (A_n^m \cos m\phi + B_n^m \sin m\phi) \right\} \right] \tag{52}$$

7. 3次元面状組織の変形とひずみ

面状組織をもつ空間が式(7)の一次変形を受けたとする。ただし、ここでも r, A 等は3次元のベクトル、テンソルと解釈する。単位ベクトル n を法線とする単位面積の平面は変形後はもはや単位面積ではなく、その面積が、

$$S(n) = \sqrt{\epsilon_{ijkl} \epsilon_{jmn} A_{pk} A_{ql} A_{pm} A_{qn} n_i n_j} / 2 \quad (53)$$

となる¹⁴⁾。ただし ϵ_{ijk} は Eddington のイブシロンであり、指標の総和規約を用いている。変形後の面の単位法線ベクトルは次のようになる。

$$n'_i = \frac{1}{2S(n)} \epsilon_{ijkl} \epsilon_{jmn} A_{km} A_{ln} n_j \quad (54)$$

これは単位球面上から単位球面上への写像である。この変換の引き起こす分布密度の変換もテンソル式によって得られているが¹⁴⁾、具体的な球面座標で書き下すのは極めて煩雑となる(付録4参照)。以下、ひずみを求める手順のみを示す。

〔直線との交点による方法〕

(1) 単位球面上にランダムに点を N 個選ぶ、その方向を (θ_k, ϕ_k) , $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ とする。

(2) (θ_k, ϕ_k) 方向の直線を含む面で切って、断面上の (θ_k, ϕ_k) 方向の直線と組織との交点の数を単位長さ当り N_k とする。実際には断面上に方向 (θ_k, ϕ_k) の間隔一定の平行線を引いて交点を調べ、次にその平行線の間隔と同じ間隔となるよう面を次々と削って各断面上で同じことを行ない平均をとるのがよい。これを $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ とする。そのためには内部組織が統計的に同じとみなされる試料をあらかじめ N 個用意しておけばよい。

(3) 得られた N_k , $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ に対し式(39)~(44)の $C, A_{20}, A_{21}, A_{22}, B_{21}, B_{22}$ を計算する。

(4) もし初期分布が等方性で $f(\theta, \phi) = c/4\pi$ であれば、受けたひずみは次の通りである。

$$\text{Tre} = 3(1 - C/2\pi c) \quad (55)$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}A_{20} - 3A_{22} & -3B_{22} & -\frac{3}{2}A_{21} \\ -3B_{22} & \frac{1}{4}A_{20} + 3A_{22} & -\frac{3}{2}B_{21} \\ -\frac{3}{2}A_{21} & -\frac{3}{2}B_{21} & -\frac{1}{2}A_{20} \end{bmatrix} \quad (56)$$

〔平面との交線による方法〕

(1) 単位球面上にランダムに点を N 個選ぶ。その方向を (θ_k, ϕ_k) , $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ とする。

(2) 法線方向が (θ_k, ϕ_k) の面で切って断面上の組織の長さを単位面積当り L_k とする。実際にはその方向

の面を等間隔に次々と削って、現われる組織の長さの平均をとるのがよい。これを $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ とする。そのためには内部組織が統計的に同じとみなされる試料をあらかじめ N 個用意しておけばよい。

(3) 得られた L_k , $k=0, 1, 2, \dots, N-1$ に対して式(42)~(47)の $C, A_{20}, A_{21}, A_{22}, B_{21}, B_{22}$ を計算する (N を L と読み換える)。

(4) もし初期分布が等方性で $f(\theta, \phi) = c/2\pi$ であれば、受けたひずみは次の通りである。

$$\text{Tre} = 3(1 - C/\pi^2 c) \quad (57)$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16}A_{20} + \frac{3}{4}A_{22} & \frac{3}{4}B_{22} & \frac{3}{8}A_{21} \\ \frac{3}{4}B_{22} & -\frac{1}{16}A_{20} - \frac{3}{4}A_{22} & \frac{3}{8}B_{21} \\ \frac{3}{8}A_{21} & \frac{3}{8}B_{21} & \frac{1}{8}A_{20} \end{bmatrix} \quad (58)$$

8. まとめ

本論文では、内部組織の分布の変化から材料のひずみを求める方法を理論的に研究した。内部組織の分布を調べるには直線や平面との交点数、交線長を利用するステレオロジーの手法を用い、それを直接にひずみに結びつける公式を導いた。この理論によって実際に測定を行なうにはいろいろ工夫の余地がある。たとえば内部組織としてどれを数えてどれを無視するか、組織が太さ、厚さをもっているときには、その中心線、中心面を想定して数えるか、あるいは2つの境界線、境界面を別々に考えるか(理論的には等価)などである。これらは試料の性質や測定装置の特性を考慮して定めるべきことである。また、画像処理装置も進歩が著しく、閾値処理等の技法も進歩している。本論文ではどの場合にも共通する普遍的な原理のみを定式化した。例題として人工的なパターンを用いたのもそのためである。個々の具体的な例については今後いろいろな工夫が加えられ、手法が発展することを期待している。

〔謝辞〕本研究の一部に実吉奨学会の援助をいただいたことを感謝します。

文 献

- 1) R. T. DeHoff and F. N. Rhines: *Qualitative Microscopy* (McGraw-Hill, New York, 1968) (牧島邦夫監訳: 計量形態学, 内田老鶴圃新社, 1972).
- 2) E. E. Underwood: *Qualitative Stereology* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970).
- 3) 諏訪紀夫: 定量形態学(岩波書店, 1977).
- 4) E. R. Weibel: *Stereological Methods*, Vols. 1, 2 (Academic Press, New York, 1979, 1980).
- 5) 佐久間健一, 西沢泰二: 日本金属学会会報, 10 (1971) 279.

6) 日本金属学会編: 材料試験法 (講座・現代の金属学, 実験技術集7, 日本金属学会, 1978).

7) K. Okaya and T. Inoue: *Proc. Int. Symp. Powder Technology '81* (粉体工学会, 1983) p. 72.

8) 佐武正雄: 土と基礎, 128-5 (1980) 55.

9) M. Oda, *Mech. Materials*, 2(1983) 163.

10) K. Kanatani and O. Ishikawa: Technical Report CS-83-4, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.

11) 金谷健一, 石川 修: 粉体工学会誌, 21(1984) (予定).

12) G. Buffon: *Supplement a l'Historie Naturelle* 4 (1777).

13) J. E. Hilliard: *Stereology-Proc. 2nd Int. Congress for Stereology* (eds. H. Elias, Springer, Berlin, 1967) p. 219.

14) K. Kanatani, *Int. J. Engng Sci.*, 22(1984) (予定).

15) 金谷健一: 粉体工学会誌, 21-1 (1984) 3.

16) K. Kanatani: *Artificial Intelligence*, 23 (1984) (予定).

17) K. Kanatani: Technical Report CS-83-5, Department of Computer Science, Gunma University, 1983.

18) L. A. Santaló: *Introduction to Integral Geometry* (Herman, Paris, 1953).

19) 栗田 稔: 積分幾何学 (共立出版, 1956).

20) M. G. Kendall and P. A. Moran: *Geometrical Probability* (Charles Griffin, London, 1963).

21) L. A. Santaló: *Integral Geometry and Geometric Probability* (Addison-Wesley, London, 1976).

22) 金谷健一: 粉体工学会誌, 18-10 (1981) 838.

23) K. Kanatani: *Modern Methodes of Fine Particle Characterization* (ed. J. F. Beddow, CRC Press, Boca Raton, Fl., 1984) (予定).

24) K. Kanatani: *Int. J. Engng Sci.*, 22-2 (1984) 149.

25) 金谷健一: 土質工学会論文報告集, 23-4 (1983) 171.

付録1 逆 Buffon 変換¹⁴⁾

分布密度は方向の関数であるから, 極座標や球面座標によらず単位ベクトル n を用いて $f(n)$ と表わすこともできる. 同様に交点数, 交線長もその直線の方角, 面の法線などを表わす単位ベクトル n によって $N(n)$ 等と表わせる. 両者の関係を演算子 B (Buffon 変換) で表わせば $N(n) = Bf(n)$ となり, これは線形写像である.

重要なことは B が回転群と可換な「不変演算子」であるということである. すなわち, R を回転を表わす直交行列とし, $Rf(n) = f(R^{-1}n)$ によって関数の回転演算子を定義すれば $RBf(n) = N(R^{-1}n) = Bf(R^{-1}n) = BRf(n)$, すなわち, $RB = BR$ または $B = R^{-1}BR$ であることが B の定義式から確かめられる.

したがって, 単位円周 S^1 または単位球面 S^2 上の関数空間における回転群の既約表現の基底が B の固有空間を張っていることがわかる. $L_2(S^1)$, $L_2(S^2)$ 上の $SO(3)$ の既約表現の基底はそれぞれ三角関数, 球面調和関数であるから, それらで展開すれば展開係数のみの変換 (B の固有値がかかる) となる. B の固有値は代表的な関数, たとえば $\cos n\theta$, $P_n(\cos \theta)$ について計算してみれば求まる.

付録2 2次元線状組織の分布密度の変換¹⁴⁾

変形前の分布密度の Fourier 展開をテンソル表示で直交異方性近似して,

$$f(n) = \frac{c}{2\pi} [1 + D_{ij}n_i n_j] \quad (59)$$

とする²⁵⁾. ($D_{ij} = D_{ji}$, $D_{ii} = 0$). 変形後は次のようになる.

$$f(n) = \frac{c'}{2\pi} [1 + D'_{ij}n_i n_j + D'_{ijkl}n_i n_j n_k n_l]$$

$$+ O(F^2) \quad (60)$$

$$(D'_{ij} = D'_{ji}, D'_{ii} = 0, D'_{ijkl} = D'_{jikl} = D'_{ikjl} = D'_{ijlk} = D'_{ijki}, D'_{ijkl} = 0) \text{ ただし,}$$

$$c' = c \left(1 - \frac{1}{2} e_{kk} + \frac{1}{4} \bar{e}_{ij} D_{ij} \right) \quad (61)$$

$$D'_{ij} = D_{ij} + 3\bar{e}_{ij} - \frac{1}{4} \bar{e}_{ki} D_{ki} D_{ij} - 2D_{ik} r_{kj} \quad (62)$$

$$D'_{ijkl} = -5\bar{e}_{(ij} D_{kl)} + \frac{10}{3} \delta_{(ij} \bar{e}_{klm} D_{m|l)} - \frac{5}{12} \delta_{(ij} \delta_{kl)} \bar{e}_{mn} D_{mn} \quad (63)$$

付録3 3次元線状組織の分布密度の変換¹⁴⁾

変形前の分布密度の球面調和関数展開をテンソル表示で直交異方性近似して,

$$f(n) = \frac{c}{4\pi} [1 + D_{ij}n_i n_j] \quad (64)$$

とすると変形後は次のようになる.

$$f(n) = \frac{c'}{4\pi} [1 + D'_{ij}n_i n_j + D'_{ijkl}n_i n_j n_k n_l] + O(F^2) \quad (65)$$

ただし D_{ij} , D'_{ij} , D_{ijkl} の指標の対称性は式 (59), (60) の場合と同じである. そして,

$$c' = c \left(1 - \frac{2}{3} e_{kk} + \frac{2}{15} \bar{e}_{ij} D_{ij} \right) \quad (66)$$

$$D'_{ij} = D_{ij} + 8\bar{e}_{ij} + \frac{10}{7} \bar{e}_{(ik} D_{k|j)} - \frac{2}{15} \bar{e}_{ki} D_{ki} D_{ij} - \frac{10}{21} \delta_{ij} \bar{e}_{kl} D_{kl} - 2r_{(ik} D_{k|j)} \quad (67)$$

$$D'_{ijkl} = 6\bar{e}_{(ij} D_{kl)} - \frac{24}{7} \delta_{(ij} \bar{e}_{klm} D_{m|l)}$$

$$+\frac{12}{35}\delta_{(ij}\delta_{kl)}\bar{e}_{mn}D_{mn} \quad (68)$$

付録4 3次元面状組織の分布密度の変換¹⁴⁾

変形前の分布密度を式(64)で、変形後の分布密度を式(65)で表わせば式(66), (67), (68)は次のようになる。

$$c' = c \left(1 - \frac{1}{3}e_{kk} - \frac{2}{15}\bar{e}_{ij}D_{ij} \right) \quad (69)$$

$$D'_{ij} = D_{ij} - 4\bar{e}_{ij} - \frac{10}{7}\bar{e}_{(kl}D_{klj)} \\ + \frac{2}{15}\bar{e}_{kl}D_{kl}D_{ij} + \frac{10}{21}\delta_{ij}\bar{e}_{kl}D_{kl} \\ - 2r_{(kl}D_{klj)} \quad (70)$$

$$D'_{ijkl} = -6\bar{e}_{(ij}D_{kl)} + \frac{24}{7}\delta_{(ij}\bar{e}_{klm}D_{mll)} \\ - \frac{12}{35}\delta_{(ij}\delta_{kl)}e_{mn}D_{mn} \quad (71)$$

■ 読書案内 ■

高分子実験学・10 一力学的性質 II—

● 高分子学会高分子実験学編集委員会編, A5判, 510頁, 12000円, 共立出版(1983)

一口で言えば固体の高分子の性質を調べるための実験について書かれた本である。ゴム弾性, 応力緩和, クリーブ, 粘弾性, レオオブティックス, 塑性変形, 破壊, 摩擦, 摩耗, 硬さなど広い範囲を扱っており, 目次や索引がかなり詳しいので, 1冊職場にあれば何かと便利であろう。しかし一部の教育関係者を別とすれば, これらの全部の実験に係わる人はまず無かるから, 余り個人向きの本とは称し難い。

題名に“実験学”という余り耳なれない言葉があるが, この言葉の解釈は分担執筆者の間でも必ずしも統一されていないと見えて, 全て実験について記述しているものの, 項目によって実験の手法を中心にしている所もあれば, 実験結果の解釈を中心にしている所もある。また, 想定している読者のレベルにもかなりのばらつきがあり, たとえば衝撃試験についての記述の所では, “衝撃試験にはアイゾット, シャルピー, 落錘, 衝撃引張

など各種の方法がある”と述べているものの各試験方法のこれ以上の説明は参考文献にゆだね, 高度の専門家を読者と考えている一方では, 引張り試験の伸びの測定の所では“(短冊形試験片を用いる)と試験片はつかみの附近で引張りと直角の方向の収縮が制限され応力分布が複雑になる。このため縦方向の伸びがつかみ附近では試験片の中央部に比較して小さくなることがあるので, これに対する考慮が必要である”とのみ述べ, その「考慮」をどのように行なうかについては全く触れておらず, 実際に実験をしようという向きには何とも物足りない。

また, これはこの種の単行本の宿命かも知れないが, 一部の章を除いて内容が必ずしも最新のものではない。引用文献も1970年代の前半までのものが多く, そのため, 自然科学の各種の実験に革命的な変化をもたらしたマイクロコンピュータの利用についてはほとんど述べられていない。いわゆるラボラトリーオートメーションが一段落すると思われる時期には, この種の本が再度企画され, 今回のものとは体裁のかなり異なったものが出版されようが, 現状では, この本は実験の理論の本としては非常に有用であるものの, 実験のテクニックのガイドダンスとしてはかなり保守的で過渡的なもののような気がする。(I. T)