



ステレオロジーによるひずみの決定の簡略化

金 谷 健 一*

Stereological Measurement of Structural Anisotropy

by

Ken-ichi Kanatani

(Received on May 14, 1984)

The procedures of stereological measurement of structural anisotropy proposed in the previous paper are simplified to facilitate actual implementation. First, the basic mathematical principles are reviewed in general terms. Then, it is shown that if the anisotropy of the distribution of the internal structure is weak, the distribution and the equivalent strain are determined by cutting the material with planes parallel to the coordinate planes or with cylindrical surfaces around the coordinate axes. This means that only three material samples are required.

1. はじめに

前報¹⁾で、構造異方性によりひずみを決定するステレオロジーの理論を述べた。その原理は次の通りである。材料中に線状または針状、網目状の組織、あるいは面状または板状、セル構造の組織があるとす。これらの内部組織の形態は問わない。本質的なのは、内部組織が幾何学的に1次元または2次元であることであり、かつ初期状態（たとえば製造の時点）で、組織の分布が等方的であることである。この材料が塑性変形を伴う加工を受けると、組織の分布は一般には等方的でなくなるから、その分布の異方性を計測すれば、受けたひずみがわかる。分布の異方性の計測には、ステレオロジーの手法が適用できる。すなわち材料をいろいろな方向から切つて、断面上の組織の長さを測つたり、断面上に平行線を引いて交点数を数えたりする。前報では、それらの交線長や交点数のデータから、組織の分布密度関数や受けたひずみを直接に与える公式を導いた。そして具体的な計測手順も示した。

材料が2次元の場合(たとえば薄板状材料の面内変形)は単純であった。切断面を作る必要はなく、表面を直接に観察すればよい。しかし、材料が3次元の場合は問題

が生じる。前報の方法によれば、乱数を発生させて単位球面上の点をランダムに多数選び、対応する方向から試料を切断して断面を観察しなければならない。これは実際問題として技術的に困難な場合もある。また、同質とみなせる試料を多数用意しなければならない。確かに前報の方法は理論的には首尾一貫したものであるが、このように実際面を考えると、多少は近似的なものになるとしても、実行の容易な方法を用いるほうが望ましい場合も多い。実行の容易さを考えれば、最初に考えられるのは材料にある xyz 座標系を固定して xy 面、 yz 面、 xz 面に平行な切断面のみを観察することであろう。この場合は用意する試料は3個でよいし、切断面のかわりに表面で代用すれば、直方体状の試料1個でもよい。本論文ではこのような観察の容易な場合を定式化し、得られる交線長や交点数のデータから組織の分布密度関数や受けたひずみを与える公式を導く。そして具体的な手順も示す。

2. ステオロジーによる基本原理

方向 n (単位ベクトル) に関する測定データを $N(n)$ とする。具体的には三つの場合を考える。第一は内部組織が1次元の場合(線状、針状、網目状、その他)に、 n を法線とする平面で試料を切つて、組織との交点の単位面積当りの個数を $N(n)$ とする(「場合1」)。第二は内部組織が2次元の場合(面状、板状、セル構造、その

1984年5月14日受付

* 群馬大学工学部：群馬県桐生市天神町1-5-1

他)に、方向 n の直線を試料中に置いて (実際にはその直線を含む平面で切って、断面上にその直線を引く)、組織との交点の単位長さ当たりの個数を $N(n)$ とする (「場合 2」). 第三は内部組織が同じく 2 次元の場合に、 n を法線とする平面で試料を切って、組織との交線の単位面積当たりの長さを $N(n)$ とする (「場合 3」). どの場合についても、 $N(n)$ は多数の試行に関する平均値と解釈する. たとえば第一の場合では法線 n をもつ間隔一定の平面 (実際は、試料を次々と平行に削った面) での観測の平均値とする. 他の場合も同様である (詳細は前報¹⁾ 参照).

いずれの場合にしても、 $N(n)$ は「点対称」すなわち $N(n) = N(-n)$ であることが定義より明らかである. いま n を材料に固定したある xyz 座標系に関する球面座標 θ, ϕ で表わして、 $N(n)$ を θ, ϕ の関数とみなしたものを $N(\theta, \phi)$ と書くと、これが点対称であるということは $N(\theta, \phi) = N(\pi - \theta, \phi + \pi)$ と表わせる. したがって、これは次のように球面調和関数展開できる.

$$N(\theta, \phi) = \frac{C}{4\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} A_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) [A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi] \right\} \right] \quad (1)$$

$$C = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} N(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (2)$$

$$\left[\begin{array}{l} A_{nm} \\ B_{nm} \end{array} \right] = \frac{2(2n+1)}{C} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} N(\theta, \phi) P_n^m(\cos \theta) \left[\begin{array}{l} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{array} \right] \sin \theta d\theta d\phi \quad (3)$$

ただし \sum' は偶数番目のみに関する和を表わす. 奇数次の項が現われないのは $N(n)$ が点対称なためである. また P_n, P_n^m はそれぞれ Legendre の多項式, Legendre の陪関数である. この展開を球面座標ではなくベクトルとテンソルで表わすこともできて、次のようになる²⁾.

$$N(n) = \frac{C}{4\pi} [1 + D_{ijkl} n_j n_l + D_{ijklmn} n_j n_k n_l + \dots] \quad (4)$$

ただし、以下 Einstein の総和規約を用いる. この展開の係数 D_{i_1, \dots, i_n} は偏差テンソルである²⁾. これは式 (1) の A_{nm}, B_{nm} , $m=1, 2, \dots, n$ で表わされる. たとえば D_{ij} は次のようになる²⁾.

$$(D_{ij}) = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{1}{4} A_{20} + 3 A_{22} & 3 B_{22} & \frac{3}{2} A_{21} \\ 3 B_{22} & -\frac{1}{4} A_{20} - 3 A_{22} & \frac{3}{2} B_{21} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} A_{21} & \frac{3}{2} B_{21} & \frac{1}{2} A_{20} \end{array} \right] \quad (5)$$

一方、内部組織の「分布密度」 $f(n)$ を次のように定義する. 組織が 1 次元の場合は、これを長さ無限小の微小線素に分割する. 各線素は直線とみなせるから、これにランダムに (すなわち確率 1/2 で) 向きをどちらかに決める. 方向 n のまわりの微小立体角 $d\Omega$ を考え、方向が $d\Omega$ 中にあるような線素の長さの合計が単位体積当たり $f(n)d\Omega$ であるように $f(n)$ を定義する. 定義より明らかに $f(n)$ は点対称すなわち $f(n) = f(-n)$ であり、 $c = \int f(n)d\Omega$ が「長さ密度」すなわち単位体積中の組織の総長である. 組織が 2 次元の場合は、これを面積無限小の微小面素に分割する. 各面素は平面とみなせるから、これにランダムに (すなわち確率 1/2 で) 法線ベクトルの向きをどちらかに決める. 方向 n のまわりの微小立体角 $d\Omega$ を考え、法線ベクトルの方向が $d\Omega$ 中にあるような面素の面積の合計が、単位体積当たり $f(n)d\Omega$ であるように $f(n)$ を定義する. 定義より、明らかに $f(n)$ は点対称すなわち $f(n) = f(-n)$ であり、 $c = \int f(n)d\Omega$ が「面積密度」、すなわち単位体積中の組織の総面積である.

ベクトル n を球面座標 θ, ϕ で表わして $f(n)$ を θ, ϕ の関数とみなしたものを $f(\theta, \phi)$ と書くと、これは式 (1) の展開と直接的な対応があって次のようになる^{1), 4)}.

$$f(\theta, \phi) = \frac{c}{4\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \left\{ \frac{1}{2} A_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (A_{nm} \cos m\phi + B_{nm} \sin m\phi) \right\} \right] \quad (6)$$

すなわち式 (1) の C が変化し、 n 次の調和成分が λ_n 倍される. この c と λ_n とは先に述べた三つの場合で、それぞれ次のようになる (証明は前報¹⁾ 参照).

場合 1, 2:

$$c = C/2\pi \quad (7)$$

$$\lambda_n = (-1)^{n/2-1} 2^{n-1} (n-1)(n+2) / \binom{n}{n/2} \quad (8)$$

場合 3:

$$c = C/\pi^2 \quad (9)$$

$$\lambda_n = -2^{2n-1} (n-1) / n \binom{n}{n/2}^2 \quad (10)$$

式 (6) は、ベクトルとテンソルを用いれば式 (4) に対応して次のようになる.

$$f(n) = \frac{c}{4\pi} \left[1 + \lambda_2 D_{ijkl} n_j n_l + \lambda_4 D_{ijklmn} n_j n_k n_l + \dots \right] \quad (11)$$

次に「等価ひずみ」 $\bar{\epsilon}_{ij}$ を定義する。現在の組織の分布が等方的($f(n)=$ 定数)でない場合、等方向な分布の状態に(塑性)ひずみ ϵ_{ij} を加えると現在の分布が得られるとき、 $\bar{\epsilon}_{ij}$ を等価ひずみとよぶ*。明らかに等方引張り、等方圧縮を加えても分布の異方性は変化しないから(c は変化するが)、等価ひずみは体積変化の自由度が残る。そこで、体積変化は0、すなわち $\bar{\epsilon}_{ij}$ は偏差テンソルであるという制約を加えることにする。すると $\bar{\epsilon}_{ij}$ は式(1)、(4)から直接に決定されて次のようになる**。(ただし $\bar{\epsilon}_{ij}$ は微小ひずみと仮定している***。証明は前報¹⁾参照)。

$$\text{場合1: } \bar{\epsilon}_{ij} = D_{ij} \quad (12)$$

$$\text{場合2: } \bar{\epsilon}_{ij} = -D_{ij} \quad (13)$$

$$\text{場合3: } \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{4} D_{ij} \quad (14)$$

3. 計測の簡略化の原理

前節を要約すれば、 $N(n)$ が式(1)または(4)の形で得られれば分布密度 $f(n)$ も長さや面積の密度 c も等価ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ も直ちに得られるということである。したがって、いくつかの方向 n_1, n_2, \dots, n_N に対する測定データ $N(n_1), N(n_2), \dots, N(n_N)$ を観測して、これから $N(n)$ の形を式(1)または式(4)の形に表わすことができればよい。特に求めたいものが分布密度 $f(n)$ そのものではなく、単に長さや面積の密度 c であれば式(7)、(9)からわかるように $C = \int N(n) d\Omega$ さえわかればよいし、等価ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ が目的のときは式(12)~(14)からわかるように、式(4)の D_{ij} さえわかればよい。前報に述べた方法は観測方向 n_1, n_2, \dots, n_N をランダムに選び、式(2)、(3)の積分を和で近似して式(1)の展開を推定するものである。このとき式(4)の D_{ij} は式(5)で与えられる。しかし、これでは材料を種々の方向から切らなければならないので先に述べたように技術的困難

が伴うし、同質の試料を数多く用意する必要がある。

ここで考える簡略化は、組織の分布が等方性に近いと考えて分布密度 $f(n)$ が式(6)または(11)の展開において4次以上の調和成分を無視することである。これは組織の分布を直交異方性で近似することに相当し、これで十分な場合が多い。このとき式(4)と式(11)との対応を考えれば、測定データの分布 $N(n)$ もはじめから

$$N(n) = \frac{C}{4\pi} [1 + D_{ij} n_i n_j] \quad (15)$$

の形をしていると考えてよい。すると関数形は C と D_{ij} のみで定まるから、含まれているパラメータの数は6個である。 $(D_{ij}$ は偏差テンソルである)。したがって観測方向が6個以上あれば C, D_{ij} が定まることになる。そのような方法で望ましいのは、次のようなものである。

(1) 観測のために必要な切断面が xy 面方向、 yz 面方向、 zx 面方向のような特定の面でよいこと。(2) 計算に用いる量は、多数の測定値の和または平均の形をしていること。第1点については先に述べたが、第2点が必要なのは測定値には誤差が避けられないからである。用いる量が測定値の和または平均であれば、各々の測定値の誤差が互いに打ち消し合うことが期待できる。以下で、このような条件を満たすものを導く。

まず、ある単位ベクトル l を考え、これと直交する方向 n に関する次の積分を考える。

$$M(l) = \int_{C(l)} N(n) d\mu \quad (16)$$

$$M_{ij}(l) = \int_{C(l)} n_i n_j N(n) d\mu \quad (17)$$

ここで $C(l)$ は原点を始点とし l と直交する単位ベクトルの終点のつくる単位円を表わし、 $d\mu$ はその上での微分長さを表わす(Fig. 1)。これに式(15)を代入すると、次式となる(付録1参照)。

$$M(l) = \frac{C}{2} \left(1 - \frac{1}{2} D_{ij} l_i l_j \right) \quad (18)$$

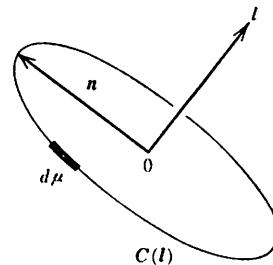


Fig. 1 Unit vector n on circle $C(l)$ encircling unit vector l perpendicularly.

* ここで塑性ひずみとよんだのは、試料を削って、その表面を顕微鏡などで観察する場合に、外部からの荷重は除いてあることを想定しているからである。実際に測るのは目に見える変形そのものであり、それがどうして生じたかは問題でない。

** 内部組織として1次元のもの(線状など)と2次元のもの(面状など)が混在する場合は、どちらか一方のみに着目して行なってもよいし、それぞれについて得られた結果を平均してもよい。両者の区別は肉眼では容易であるが、計算機による画像処理を考えた場合は工夫が必要となる。

*** しかし実際は「目に見える」程度の大きな変形に適用することを目的としているのである。微小ひずみと仮定したという意味は $\bar{\epsilon}_{ij}$ に比較して $\bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}$ は小さいという近似を用いたということである。したがって、どんな変形に適用してもよいが、得られた結果 $\bar{\epsilon}_{ij}$ には $\bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}$ 程度の誤差があるとみなければならない。

$$M_{ij}(l) = \frac{C}{4} \left[\frac{1}{2} D_{ij} - D_{k(i,l)j} l_k + \left(1 - \frac{1}{4} D_{k_1 l k_1} \right) \delta_{ij} - \left(1 - \frac{4}{3} D_{k_1 l k_1} \right) l_i l_j \right] \quad (19)$$

ただし δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、() は指標に対称化を表わす。特に l として基底ベクトル $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1)^T$ (T は転置を表わす) をとると次のようになる。

$$M(e_i) = \frac{C}{2} \left(1 - \frac{1}{2} D_{ii} \right) \quad (20)$$

$$M_{ij}(e_k) = \frac{C}{8} D_{ij} \quad (21)$$

ただし式 (20) の i は総和しないものとし、式 (21) の i, j, k は 1, 2, 3 のある順列とする。式 (20) を $i=1, 2, 3$ に関して和をとり、 D_{ij} が偏差テンソルであることに注意すると

$$C = \frac{2}{3} [M(e_1) + M(e_2) + M(e_3)] \quad (22)$$

となる。これと式 (20) とから次の結果を得る。

$$D_{11} = \frac{2[-2M(e_1) + M(e_2) + M(e_3)]}{M(e_1) + M(e_2) + M(e_3)} \quad (23)$$

$$D_{22} = \frac{2[M(e_1) - 2M(e_2) + M(e_3)]}{M(e_1) + M(e_2) + M(e_3)} \quad (24)$$

$$D_{33} = \frac{2[M(e_1) + M(e_2) - 2M(e_3)]}{M(e_1) + M(e_2) + M(e_3)} \quad (25)$$

また式 (22) と式 (21) から、次の結果を得る。

$$D_{12} = \frac{12 M_{12}(e_3)}{M(e_1) + M(e_2) + M(e_3)} (=D_{21}) \quad (26)$$

$$D_{23} = \frac{12 M_{23}(e_1)}{M(e_1) + M(e_2) + M(e_3)} (=D_{32}) \quad (27)$$

$$D_{31} = \frac{12 M_{31}(e_2)}{M(e_1) + M(e_2) + M(e_3)} (=D_{13}) \quad (28)$$

4. 計測の手順

前節の結果を利用して、具体的な手順を構成する。以下、考えている試料中では、組織は十分密で空間的には一様に分布しているとする。前節の冒頭で述べた「場合 2」が最も都合がよい。この場合、次のようになる。

(1) 試料に xyz 座標系を固定し、 xy 面に平行な面で切り、その断面上に x 軸 (y 軸でもよい) からの角度が $k\pi/N$, $k=0, 1, \dots, N-1$ の直線を引き、組織との交点の個位長さ当りの個数を $N_k^{(xy)}$ とする (Fig. 2)。

(2) そのデータから、次の $M(e_3)$, $M_{12}(e_3)$ を計算する。

$$M(e_3) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} N_k^{(xy)} / N \quad (29)$$

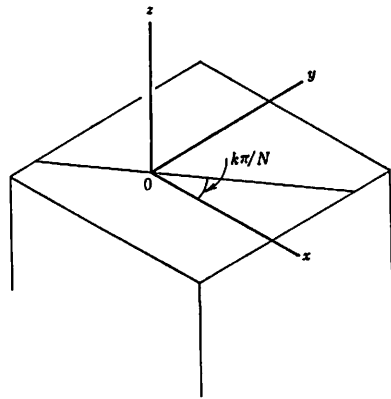


Fig. 2 A probe line drawn at angle $k\pi/N$ from the x -axis on a surface parallel to the xy -plane.

$$M_{12}(e_3) = \pi \sum_{k=0}^{N-1} N_k^{(xy)} \sin(2\pi k/N) / N \quad (30)$$

(3) yz 面, xz 面に平行な面でも切り、同様にして $M(e_1)$, $M_{23}(e_1)$, $M(e_2)$, $M_{31}(e_2)$ を計算する。

(4) 式 (22)~(28) により C , D_{ij} を計算する。面積密度 c は式 (7), 等価ひずみ e_{ij} は式 (13) で与えられる。

このようにすれば試料は 3 個ですむ。あるいは直方体状の試料の表面を用いれば、1 個でもよい。しかも式 (29), (30) のような平均値をとる操作により誤差を押えることができる。直線の種類 N は、それほど多くなくてよい。なぜなら、2 次の調和成分のみに着目して高次の調和成分を無視しているからである。一方、試料中で組織が十分密でなかったり、空間的に一様でなかったり、あるいは精度を上げようとする場合には、断面上に引く直線を一本ではなく等間隔の平行線にし、かつその平行線の間隔と同じ間隔で断面を平行に次々と削っていった各面で同じ操作を行ない、結果を平均すればよい¹⁾。

以上のように「場合 2」では都合よくゆくが、「場合 1, 3」ではそのままの形では適用できない。しかし、少し変形すれば次のように行なうことができる。

(1) 試料に xyz 座標系を固定して、 z 軸を軸とする円柱状に切る。その表面上で x 軸 (y 軸でもよい) からの角度 ϕ が $2\pi(k-1/2)/N \leq \phi < 2\pi(k+1/2)/N$, $k=0, 1, \dots, N-1$ であるような細片状での計測 (交点数または交線長) を行ない、それをその細片の面積で割ったものを $N_k^{(z)}$ とする (Fig. 3)。

(2) そのデータから、次の $M(e_3)$, $M_{12}(e_3)$ を計算する。

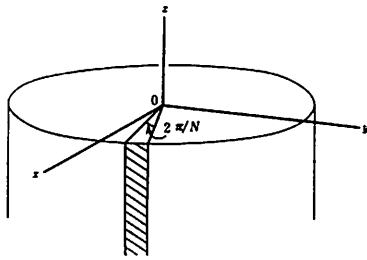


Fig. 3 A probe area of central angle $2\pi/N$ on a cylindrical surface around the z -axis.

$$M(e_3) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} N_k^{(z)}/N \quad (31)$$

$$M_{12}(e_3) = \pi \sum_{k=0}^{N-1} N_k^{(z)} \sin(4\pi k/N)/N \quad (32)$$

(3) x 軸, y 軸を軸とする円柱状にも切って, 同様にして $M(e_1)$, $M_{23}(e_1)$, $M(e_2)$, $M_{31}(e_2)$ を計算する.

(4) 式 (22)~(28) により C , D_{ij} を計算する. 長さ密度または面積密度 c は式 (7), (9) で, 等価ひずみ e_{ij} は式 (12), (14) で与えられる.

このようにすれば試料は 3 個ですむし, 式 (31), (32) のような平均値をとる操作によって, 誤差を押えることができる. やはり N はそれほど多くとる必要はない. 精度を上げようとするれば, 円柱の直径が一定の間隔で減るように次々と削って行って各面で同じ操作を行ない, 円柱の直径を重さとする平均をとればよい.

5. ま と め

本論文では前報¹⁾で示した内部組織の分布の異方性を計測するステレオロジーの手法を簡略化し, 同質とみなしうる試料 3 個のみを用いる方法を示した. これは, 内部組織の分布がほぼ等方的であり, 4 次以上の調和成分は無視できる場合であり, 試料を座標面に平行な面, あるいは座標軸を軸とする円柱面で切ることによって実行できる. 前報の方法は極めて一般的であり, 内部組織の分布をいくらでも精密に知ることができる. 一方, 本論文の簡略化では 0 次と 2 次の調和成分に関する知識しか得られない. しかし, 等価ひずみ e_{ij} を知ることが目的であれば, それで十分である. また構成方程式についても, 直交異方性を仮定すれば, 関係するのは c と D_{ij} のみであるから, これらさえわかればよい (構成方程式が c , D_{ij} をどのように含んだ形になるかは一般的な議論がよく知られている. 付録 2 参照). とはいえ, 本論文のように簡略化しても, なお実際の技術的問題はいろいろ残るであろう. 個々の場合について, 今後検討する必要があると思われる.

文 献

- 1) 金谷健一: 材料科学, 20-4 (1984) 223.
- 2) K. Kanatani: *Int. J. Engng. Sci.*, 22-2 (1984) 149.
- 3) K. Kanatani: *Int. J. Engng. Sci.*, 22-5 (1984) 531.
- 4) K. Kanatani: *Int. J. Engng. Sci.*, 23 (1985) (to appear).
- 5) 若島健二: 日本複合材料学会誌 2-3 (1976) 119; 2-4 (1976) 161; 3-2 (1977) 57.
- 6) T.-W. Chou, S. Nomura and M. Taya: *J. Composite Materials*, 14 (1980) 178.
- 7) S. Nomura and T.-W. Chou: *Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech.*, 51 (1984) 540.
- 8) M. Oda, K. Suzuki and T. Maeshibu: *Solids and Foundations*, 24-3 (1984) (27).

付録 1

式 (18), (19) を導くには式 (15) を式 (16), (17) に代入して, 次の恒等式を適用すればよい.

$$\int_{\sigma(i)} d\mu = 2\pi \quad (A1)$$

$$\int_{\sigma(i)} n_i n_j d\mu = \pi(\delta_{ij} - l_i l_j) \quad (A2)$$

$$\int_{\sigma(i)} n_i n_j n_k n_l d\mu = \frac{3}{4}\pi(\delta_{ij}\delta_{kl} - 2l_i l_j \delta_{kl} + l_i l_j l_k l_l) \quad (A3)$$

これらを証明するには, まず $l = (0, 0, 1)^T$ となるような座標系で考えてみればよい. すると n_i は xy 面内のベクトルとなり, よく知られた 2 次元のテンソル関係式により (A1)~(A3) の両辺の等しいことがわかる. ところで (A1)~(A3) はテンソル関係式であるから, これらがひとつの座標系で成立すれば任意の座標系で成立する.

付録 2

応力テンソル σ が, ひずみテンソル e と異方性を表すテンソル D のテンソル関係式 $\sigma = \sigma(e, D)$ で表わされるとすると, よく知られたように

$$\begin{aligned} \sigma = & \alpha_0 I + \alpha_1 e + \alpha_2 e^2 + \alpha_3 D + \alpha_4 D^2 \\ & + \alpha_5 (eD + De) + \alpha_6 (e^2 D + D e^2) \\ & + \alpha_7 (eD^2 + D^2 e) \end{aligned} \quad (A4)$$

と表わせる. ただし I は単位行列であり, $\alpha_0 \sim \alpha_7$ は不変量 Tre , Tre^2 , Tre^3 , $\text{Tr}D^2$, $\text{Tr}D^3$, $\text{Tre}D$, $\text{Tre}^2 D$, $\text{Tre}D^2$ のスカラー関数である (Tr はトレースである. 現在の場合, D は偏差テンソルであるから $\text{Tr}D = 0$ であり, $\text{Tr}D$ は考慮しなくてよい). 微小ひずみを考えて, e に関して線形であるとすれば次のようになる.

$$\begin{aligned} \sigma = & (\beta_0 \text{Tre} + \beta_1 \text{Tre}D + \beta_2 \text{Tre}D^2) I + \beta_3 e \\ & + (\beta_4 \text{Tre} + \beta_5 \text{Tre}D + \beta_6 \text{Tre}D^2) D \\ & + (\beta_7 \text{Tre} + \beta_8 \text{Tre}D + \beta_9 \text{Tre}D^2) D^2 \end{aligned}$$

$$+\beta_{10}(eD+De)+\beta_{11}(eD^2+D^2e) \quad (A5)$$

ただし $\beta_0 \sim \beta_{11}$ は $\text{Tr}D^2, \text{Tr}D^3$ の関数である。さらに異方性が弱いとして、 D に対しても線形であると考えることができれば次のようになる。

$$\sigma = 2\mu e + \lambda(\text{Tre})I + \gamma_1(\text{Tre}D)I + \gamma_1'(\text{Tre})D + \gamma_2(eD+De) \quad (A6)$$

ここで $2\mu, \lambda, \gamma_1, \gamma_1', \gamma_2$ は e, D にはよらない定数である (ただし母材と内部組織の材質と形状, 内部組織の密度に依存する)。さらに, この応力がひずみエネルギー Φ から導かれて, $\sigma_{ij} = \partial\Phi/\partial e_{ij}$ の形をしているなら, その条件 (積分可能条件) $\partial\sigma_{ij}/\partial e_{kl} = \partial\sigma_{kl}/\partial e_{ij}$ から $\gamma_1 = \gamma_1'$ となる。したがって, 成分で表わせば

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda e_{kk} \delta_{ij} + \gamma_1(e_{kl}D_{kl}\delta_{ij} + e_{kk}D_{ij}) + 2\gamma_2 e_{(ij}D_{kl)}$$

$$(A7)$$

となる (縦棒では含まれた指標は対称化から除外する)。あるいは弾性係数を用いると次のようになる。

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}e_{kl} \quad (A8)$$

$$E_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{kj}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \gamma_1(\delta_{ij}D_{kl} + D_{ij}\delta_{kl}) + \gamma_2(\delta_{ik}D_{lj} + \delta_{jk}D_{li}) \quad (A9)$$

しかし, このような一般的考察に頼るのは危険である。具体的な形を導くために無理な仮定をしがちだからである。それよりも, 個々の場合を直接に考えるほうが近道であろう。たとえば短繊維強化複合材料⁵⁾⁻⁷⁾ やクラックを含む岩盤⁸⁾ などでは, 微視的考察と統計的操作によって上述のような異方性構成方程式が導かれている。

* * *