

格子状構造物のコッセラ連続体力学*

(振動場の理論)

金 谷 健 一**

1. ま え が き

構造解析では構造物の各節点の変位や回転を未知数にとり、つりあい条件より連立一次方程式を解くという方法をとるが、節点数が多くなると計算は著しく手間をとる。大形計算機を用いれば解は求まるが、計算時間が長くと計算の費用が増加する。したがって、適当な近似解法があれば便利であることはいうまでもない。その一つとして、構造物を連続体でおきかえることが以前から行われていた⁽¹⁾。その特徴を考えると、厳密計算は対象が小規模であるほど容易であるのに対して、連続場は無限場のように大規模であるほど扱いやすいという、相補う性質がある。したがって、個々の構造物の解を求めるには厳密計算を行うべきであるが、部材の性質とその組み方が与えられた規則的な場の力学特性を知るには連続モデルが適している。

ところで、これまで構造物の連続モデルに用いられたのは主に弾性体であった。これは内部の、平均的変位場のみでは表せない、離散構造に基づく局所変形を無視するものであるが、局所変形でもラーメンの節点の回転などは重要なもので無視できない。そこで、回転を含んだ場として、いわゆるコッセラ (Cosserat) 理論⁽²⁾を適用しようとする試みが始まった。日本では日置や松岡らにより、平版状、あるいはシェル状構造物の理論に始まり⁽³⁾⁽⁴⁾、multi-director 場理論を用いる試みもある⁽⁵⁾。外国でも同様の研究が行われている⁽⁶⁾⁻⁽¹⁰⁾。しかしほとんどが静的変形に関してであった。実際問題としては、運動、特に振動問題がより重要である。それは、振動の厳密解法が静的問題に比べてはるかに困難であり、また静的問題では局所変形は全体に比べるとそれほど大きくないが、局所振動は振動数によっていくらかでも大きくなり得る (共振現象) からである。しかし、このことが、構造物の運動の連続モデルの構成に困難を与えるのである。従来はこれ避けて、節点に等価質量を与えたり、はりの振動に静

的モードを用いているため、共振のような、巨視的運動と局所的運動との間のエネルギー交換による相互作用を記述できない。

そこで、本論文では次のことを行う。(1) 従来の構造物のコッセラ理論の理論構造を明らかにする。(2) 従来は離散から連続への移行として、差分を適当に打ち切ったテイラー (Taylor) 展開でおきかえていたが、近似の性質を考えると、これは不合理であり、かわる適切な連続化の原理を示す。(3) 任意の振動数で成立する振動場モデルを、平均エネルギーによる変分原理を用いて構成する。結果は複素数連続体となる。(4) 波動の伝ばを解析し、従来の方法で得られなかった高周波領域の挙動を調べる。そして、連続化の近似の程度による解の精度を検討する。

2. 格子状構造物の場理論

構造物のコッセラ理論を Bažant ら⁽⁹⁾をもとに再構成して、問題点を考察する。格子構造物の自由度は各節点の変位 u_i と回転 ϕ_{ji} (反対称テンソル) である (図 1)。図 2 のように x 軸上にあつたはりがねじりと曲げを受けているとき、 s を長さのパラメータとして、点 P の座標は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x(s) &= u_1 + \frac{s}{h} \Delta u_1 \\ y(s) &= u_2 + \left(\frac{3s^2}{h^2} - \frac{2s^3}{h^3} \right) \Delta u_2 \\ &\quad + \left(s - \frac{3s^2}{h} + \frac{3s^3}{h^2} \right) \phi_{12} + \left(\frac{s^3}{h^2} - \frac{s^2}{h} \right) \Delta \phi_{12} \\ z(s) &= u_3 + \left(\frac{3s^2}{h^2} - \frac{2s^3}{h^3} \right) \Delta u_3 \\ &\quad + \left(s - \frac{3s^2}{h} + \frac{3s^3}{h^2} \right) \phi_{13} + \left(\frac{s^3}{h^2} - \frac{s^2}{h} \right) \Delta \phi_{13} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

これよりはりの曲げエネルギー、ねじれエネルギー、引張りエネルギーが計算できる。 y, z 方向のはりについても同様に計算し、合計して単位の体積で割れば、単位体積当たりのエネルギーが次の形で求まる。

$$\varepsilon = \varepsilon(\Delta u_i, \phi_{ji}, \Delta_i \phi_{ji}) \dots\dots\dots (2)$$

* 昭和 53 年 5 月 18 日 北九州地方講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和 52 年 12 月 19 日。

** 正員、東京大学工学部 (東京都文京区本郷 7-3-1)。

Δ_j は j 方向への差分である, この差分をテイラー展開

$$\left. \begin{aligned} \Delta_j u_i &= h_j \partial_j u_i + \frac{1}{2} h_j^2 \partial_j^2 u_i + \dots, \\ \Delta_k \phi_{ji} &= h_k \partial_k \phi_{ji} + \frac{1}{2} h_k^2 \partial_k^2 \phi_{ji} + \dots, \text{ etc} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

におきかえて, 連続モデルが作られる. ここで h_i は i 方向のはりの長さであり, $\partial_i = \partial/\partial x^i$ である. 以下, テンソル記法に従い, 総和規約を用いる. 従来は式(3)の第1項のみとっている⁽⁶⁾⁻⁽¹²⁾. ところが, 式(2)は二次形式なのであるから, これは不合理である. 式(3)で高階の導関数を省略するのは, 高階の項ほど高次の微小量となるからだ, たとえば積 $(h_k \partial_k \phi_{ji})^2$ は二次の微小量で省略された $(1/2)h_k^2 \partial_k^2 \phi_{ji}$ と零次の項 ϕ_{ji} との積もやはり二次の微小量となり, 高階の項も無視できなくなる. したがって, 式(3)を形式的に級数のまま式(2)へ代入し, 適当な次数 (N 次とする)の微小量までとるという方法によらねばならない. これを N 次の連続化とよぶことにする. 実は Bažant らも式(3)で第1項のみをとったのでは重要な項が落ちることに気づき, 解析の必要上, 例外的に項を追加しているのであるが, 一貫した原則を与えるには上述の原理が必要である.

次に仮想仕事の原理より場の方程式を求める. 仮想変位 $\delta u_i, \delta \phi_{ji}$ に対して外力のなす仕事は

$$\delta W = \int b^i \delta u_i dV + \int [t^i \delta u_i + \frac{1}{2} m^{ij} \delta \phi_{ji}] dS \dots\dots\dots (4)$$

である. b^i は単位体積当たりの節点荷重, t^i は表面引張り, m^{ij} は表面モーメントである (節点モーメントがあっても同様にできる). この仮想仕事は内部エネルギーの増加 δU に等しくなければならない.

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \delta \epsilon (\partial_j u_i, \partial_k \partial_j u_i, \dots, \phi_{ji}, \partial_k \phi_{ji}, \dots) dV \\ &= \int [\sigma^{ij} \delta (\partial_j u_i) + \theta^{kji} \delta (\partial_k \partial_j u_i) + \dots - \sigma^{[j]i} \delta \phi_{ji} \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu^{kji} \delta (\partial_k \phi_{ji}) + \frac{1}{2} \pi^{ikji} \delta (\partial_i \partial_k \phi_{ji}) + \dots] dV \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

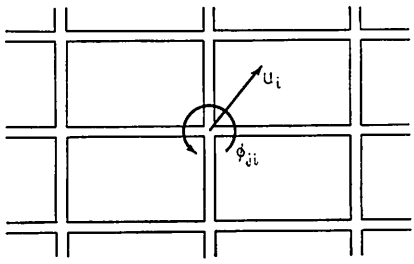


図1 格子状構造物

ただし, $\sigma^{ij} = \partial \epsilon / \partial (\partial_j u_i)$, etc である. 部分積分を行えば, はん関数微分を用いて次のように表せる.

$$\left. \begin{aligned} \delta U &= \int [(\delta U / \delta u_i) \delta u_i \\ &\quad + (\delta U / \delta \phi_{ji}) \delta \phi_{ji}] dV + \int [\text{表面の項}] dS \\ \delta U / \delta u_i &= -\partial_j \sigma^{ij} + \partial_k \partial_j \theta^{kji} - \dots \\ \delta U / \delta \phi_{ji} &= -\sigma^{[j]i} - \partial_k \mu^{kji} + \partial_i \partial_k \pi^{ikji} + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式(5), (6)で $\sigma^{[j]i}$ の項が現れるのはエネルギーの剛体回転不変性による. $\delta U = \delta W$ より次の方程式を得る.

$$\delta U / \delta u_i = b^i, \quad \delta U / \delta \phi_{ji} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

また, 表面積分の項より境界条件を得る. たとえば二次の連続化では結果は次のとおりである.

$$\left. \begin{aligned} \partial_j \sigma^{ij} - \partial_k \partial_j \theta^{kji} + b^i &= 0, \\ \partial_k \mu^{kji} - \partial_i \partial_k \pi^{ikji} + 2\sigma^{[j]i} &= 0, \text{ in } V \\ t^i = n_j \sigma^{ij} - 2n_{(i} \partial_{j)} \theta^{kji} + n_k n_j \partial_n \theta^{kji} \\ &\quad - \{2n_k n_j \sum_{\alpha} (1/R_{\alpha}) - \sum_l l_j^{(\alpha)} l_i^{(\alpha)} / R_{\alpha}\} \theta^{kji} \\ m^{ij} = n_k \mu^{kji} - 2n_{(i} \partial_{k)} \pi^{ikji} + n_i n_k \partial_n \pi^{ikji} \\ &\quad - \{2n_i n_k \sum_{\alpha} 1/R_{\alpha} - \sum_{\alpha} l_i^{(\alpha)} l_k^{(\alpha)} / R_{\alpha}\} \pi^{ikji}, \\ &\quad \text{on } S \\ n_k n_j \theta^{kji} &= 0, \quad n_i n_k \pi^{ikji} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし, 添字成分の対称化, 反対称化をそれぞれ $(\)$, $[\]$ で表した. n_i は表面の外向き単位法線であり, ∂_n は法線方向の微分である. また, $l_i^{(\alpha)}$ ($\alpha=1, 2$) は表面の主方向であり, $1/R_{\alpha}$ は対応する主曲率である. 構成方程式は次のとおりである. 他の成分は添字の置換によって得られる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{11} &= \epsilon_1 h_1 \partial_1 u_1, \\ \sigma^{12} &= \frac{\nu_{12}}{h_1} (\partial_1 u_2 - \phi_{12} - \frac{1}{2} h_1 \partial_1 \phi_{12}), \\ \theta^{112} &= -\frac{\nu_{12}}{2} \phi_{12}, \text{ etc.} \\ \mu^{112} &= \frac{\nu_{12}}{2} (\phi_{12} - \partial_1 u_2 + \frac{3}{2} h_1 \partial_1 \phi_{12}), \\ \mu^{123} &= \frac{\nu_{11}}{2} h_1 \partial_1 \phi_{23}, \quad \pi^{1112} = \frac{\nu_{12}}{4} h_1^2 \phi_{12}, \text{ etc.} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで $\epsilon_1 = E_1 A_1 / V$, $\nu_{12} = 12 E_1 I_{12} / V$, $\nu_{11} = 2 G_1 J_1 / V$ などであり, $E_i A_i$, $G_i J_i$ はそれぞれ i 方向のはりの引張りとなじりの剛性であり, $E_j I_j$ は j 方向のはりの j - i 面内のまげ剛性, $V = h_1 h_2 h_3$ である. 式(8)に現れる θ^{kji} と π^{ikji} の項は従来落とされることが多かったため, 形式上, 古くからあるコッセラ連続体の方程式と一致していたが, 構造物の場合, ここで考えたように本当は一致しないもので, いわばコッセラ理論の拡張といえる. 付加された項は Bažant らが例外的

に追加したものに一致する。

3. 格子状構造物の運動場理論

運動の理論についても、Sun ら⁽¹⁰⁾をもとに再構成しつつ検討する。図2のはりの運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \int_0^h \rho A [\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 + \dot{z}(s)^2] ds \quad (\rho A: \text{線密度}) \quad \dots\dots\dots(11)$$

であり、式(1)を代入すれば、 $v_i, \Delta v_i, \omega_{ji}, \Delta \omega_{ji}$ で表せる。ただし、 $v_i = \dot{u}_i, \omega_{ji} = \dot{\phi}_{ji}$ (時間微分)である。他の方向のはりについても合計し、単位体積当たりに直す。そして、差分をテイラー展開し、先に述べた意味で適当に打ち切る (Sun らは単純な一次の打ち切りを行っている)。結局、全体の運動エネルギーは次の形で表現される。

$$K = \frac{1}{2} \int k(v_i, \partial_j v_i, \dots, \omega_{ji}, \partial_k \omega_{ji}, \dots) dV \quad \dots\dots\dots(12)$$

これを時間微分し、部分積分を行うと次の形に整理できる。

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} = & \int [\dot{p}^i(v_j, \partial_k v_j, \dots, \omega_{kj}, \partial_l \omega_{kj}, \dots) v_i \\ & + \frac{1}{2} \dot{I}^{ij}(v_k, \partial_l v_k, \dots, \omega_{lk}, \partial_m \omega_{lk}, \dots) \omega_{ji}] dV \\ & + \oint [\text{表面の項}] dS \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

こうして得られた p^i, I^{ij} はともに一次形式であり、それぞれ運動量、角運動量の密度を表す。内部エネルギー、外部仕事の変化率は式(4)、(6)を dt で割ることにより、次の形に表される。

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = & \int [(\partial U / \partial U_i) v_i + (\partial U / \partial \phi_{ji}) \omega_{ji}] dV \\ & + \oint [\text{表面の項}] dS \\ \frac{dW}{dt} = & \int b^i v_i dV + \oint [t^i v_i + \frac{1}{2} m^{ij} \omega_{ji}] dS \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

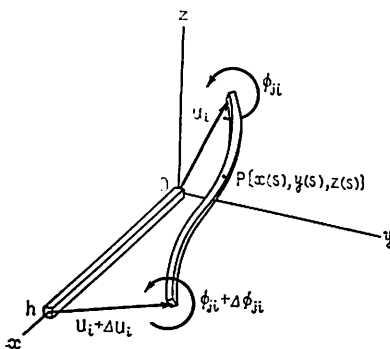


図2 はりの変形

エネルギー保存則より、 $dK/dt + dU/dt = dW/dt$ が成立しなければならない。式(13)、(14)を代入すると、

$$\int [(\dots) v_i + (\dots) \omega_{ji}] dV + \oint [\text{表面の項}] dS = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

という形となるが、ここで (\dots) の項は $u_i, \dot{v}_i, \phi_{ji}, \dot{\omega}_{ji}$ のみより、 v_i, ω_{ji} にはよらない。したがって v_i, ω_{ji} は (\dots) と独立に選べるので、任意の力学的運動で式(15)が成立するためには (\dots) が 0 でなければならぬ。これより運動方程式を得る。一次の連続化では次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \partial_j \sigma^{ji} + b^i &= \rho \dot{v}_i - \gamma^j \partial_j \omega_{ji}, \\ \partial_k \mu^{kji} + 2\sigma^{[ji]} &= I^{ij} \dot{\omega}_{ji} + \gamma^j \partial_j \dot{v}_i - \gamma^i \partial_i \dot{v}_j \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{11} &= 0, \quad \sigma^{12} = -\frac{\nu_{12}}{h_1} \phi_{12}, \quad \mu^{123} = 0, \\ \mu^{112} &= \frac{\nu_{12}}{2} \phi_{12}, \quad \text{etc.} \\ \rho &= \sum_i M_i / V, \quad \gamma^i = \frac{13}{210} M_i h_i^2 / V \\ I^{ij} &= \frac{1}{210} (M_j h_i^2 + M_i h_j^2) / V \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

ここで、 M_i は i 方向のはりの質量である。境界条件も表面積分の項より求まる。Sun らは運動方程式を導くのに、四次元時空におけるハミルトンの原理を用いているが、結局、ここでの論法に等価であり、式(15)から導くほうがわかりやすいと思われる。等価であることは、力学法則が時空のレオノーム変換に不変であることから導けるが、詳細は大島⁽¹¹⁾に議論されている。

ところで、Sun らは言及していないが、上述の議論は遅い運動しか成立しない。それは式(11)の $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ として式(1)の時間微分を用いたからである。すなわち、はりの慣性を無視し静的曲げ曲線で運動すると仮定したことになる。ところが、はりの慣性を考えれば、はりの運動は両端の速度 v_i と回転数 ω_{ji} によって指定できず、式(12)、(14)の形式も得られない。したがって、場の運動方程式を導くことはまったく不可能である。これではわれわれの知りたい局所と全体のエネルギーの交換が調べられない。そこで、この困難を克服するため、運動を振動に限定して、平均エネルギーによる変分原理⁽¹²⁾を用い、振動場の方程式を導く。これが本論文の中心課題である。

4. 格子状構造物の振動場理論

線形力学系では、その自由度を x^α ($\alpha=1, 2, \dots, n$) とすると、系の運動エネルギー K 、ポテンシャルエネルギー

ギ U , 散逸関数 F は次のような二次形式で与えられる.

$$K = \frac{1}{2} m_{\beta\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta, \quad U = \frac{1}{2} k_{\beta\alpha} x^\alpha x^\beta, \quad F = \frac{1}{2} d_{\beta\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \dots\dots\dots(18)$$

$m_{\beta\alpha}, k_{\beta\alpha}, d_{\beta\alpha}$ はそれぞれ質量行列, 剛性行列, 減衰行列とよばれる. 自由度 x^α に加えられる減衰力以外の外力を Q_α とするとき, ラグランジュの方程式は次のようになる.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\alpha} + \frac{\partial U}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\alpha} = Q_\alpha \dots\dots\dots(19)$$

式 (18) を用いると運動方程式は次のようになる.

$$m_{\beta\alpha} \ddot{x}^\beta + k_{\beta\alpha} x^\beta + d_{\beta\alpha} \dot{x}^\beta = Q_\alpha \dots\dots\dots(20)$$

通常, われわれの関心は振動モードと固有振動数にある. そこで, $x^\alpha, Q_\alpha \propto e^{i\omega t}$ (以下 $i = \sqrt{-1}$) とおくと,

$$-\omega^2 m_{\beta\alpha} x^\beta + k_{\beta\alpha} x^\beta + i\omega d_{\beta\alpha} x^\beta = Q_\alpha \dots\dots\dots(21)$$

となるが, われわれの関心をこのように限定すれば式 (18) から式 (19), (20) を経る必要はない. はじめから複素数 x^α を用いて式 (21) を得るための, 式 (19) にかわる原理を構成できる. まず式 (18) の1周期 $\tau = 2\pi/\omega$ にわたる平均 $\langle \dots \rangle = (1/\tau) \int_0^\tau dt$ を考える.

複素数表示では次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{\omega^2}{4} m_{\beta\alpha} x^\alpha \bar{x}^\beta, & \langle U \rangle &= \frac{1}{4} k_{\beta\alpha} x^\alpha \bar{x}^\beta, \\ \langle F \rangle &= \frac{\omega^2}{4} d_{\beta\alpha} \dot{x}^\alpha \bar{\dot{x}}^\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ここで, \bar{x}^α は x^α の共役複素数である. これらより次の原理を得る.

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{x}^\alpha} = Q_\alpha, \quad S \equiv \langle \langle U \rangle - \langle K \rangle + (i/\omega) \langle F \rangle \rangle / 4 \dots\dots\dots(23)$$

この原理は自由度の数によらないので, その極限として連続体にも成立せねばならない. このとき偏微分ははん関数微分でおきかえなければならない. これにより, 複素数連続体力学が構成できる.

図3のようにはりが両端の変位 $(u, v)e^{i\omega t}, (u + \Delta u,$

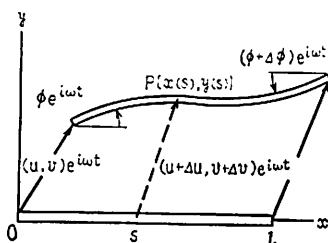


図3 はりの振動

$v + \Delta v)e^{i\omega t}$, 両端の回転 $\phi e^{i\omega t}, (\phi + \Delta\phi)e^{i\omega t}$ で振動しているとする ($u, \Delta u, \phi, \Delta\phi$ は複素数). 静止状態で $(s, 0)$ にあった点 $P(x(s), y(s))$ を考えると, まず

$$x(s) = \left(u + \frac{s}{l} \Delta u \right) e^{i\omega t} \dots\dots\dots(24)$$

とおける. $y(s)$ の満たすべき式は次の方程式である.

$$EI y''''(s) + \eta \dot{y}(s) + \rho A \ddot{y}(s) = 0 \dots\dots\dots(25)$$

η は減衰定数である. $y \propto e^{i\omega t}$ とおくと

$$EI y''''(s) = \lambda^4 y(s), \quad \lambda \equiv \sqrt[4]{(\rho A \omega^2 - i\omega \eta) / EI} \dots\dots\dots(26)$$

となる. これを境界条件

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= v e^{i\omega t}, & y'(0) &= \phi e^{i\omega t}, \\ y(l) &= (v + \Delta v) e^{i\omega t}, & y'(l) &= (\phi + \Delta\phi) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

のもとで解くと, 解は次の形に表現できる. $\varphi_1 \sim \varphi_4$ は無次元の複素数関数である.

$$y(s) = \{ v \varphi_1(s) + \Delta v \varphi_2(s) + l \phi \varphi_3(s) + l \Delta \phi \varphi_4(s) \} e^{i\omega t} \dots\dots\dots(28)$$

はりのポテンシャルエネルギーとして簡単のため曲げによるもののみ考えると, 平均して,

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \frac{1}{4} \int_0^l EI y''(s) \overline{y''(s)} ds \\ &= \frac{EI}{4l} (v/l, \Delta v/l, \phi, \Delta\phi) [C_{\beta\alpha}(\lambda l)] \begin{pmatrix} \bar{v}/l \\ \Delta \bar{v}/l \\ \bar{\phi} \\ \Delta \bar{\phi} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

となる. ただし, $C_{\beta\alpha}$ は次に定義される無次元の実対称行列である.

$$\begin{aligned} C_{\beta\alpha}(\lambda l) &= \frac{|\lambda l|^4}{l} \int_0^l \varphi_\beta''(s) \overline{\varphi_\alpha''(s)} ds \\ (\alpha, \beta &= 1, 2, 3, 4) \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

運動エネルギー, 散逸関数についても同様である.

$$\begin{aligned} \langle K \rangle &= \frac{\omega^2}{4} \int_0^l \rho A \{ x(s) \overline{x(s)} + y(s) \overline{y(s)} \} ds \\ &= \frac{M l^2 \omega^2}{4} (u/l, \Delta u/l) \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}/l \\ \Delta \bar{u}/l \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{M l^2 \omega^2}{4} (v/l, \Delta v/l, \phi, \Delta\phi) [M_{\beta\alpha}(\lambda l)] \begin{pmatrix} \bar{v}/l \\ \Delta \bar{v}/l \\ \bar{\phi} \\ \Delta \bar{\phi} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \frac{\omega^2}{4} \int_0^l \eta y(s) \overline{y(s)} ds \\ &= \frac{\eta l^3 \omega^2}{4} (v/l, \Delta v/l, \phi, \Delta\phi) [M_{\beta\alpha}(\lambda l)] \begin{pmatrix} \bar{v}/l \\ \Delta \bar{v}/l \\ \bar{\phi} \\ \Delta \bar{\phi} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

$$M_{\beta\alpha}(\lambda l) = (1/l) \int_0^l \varphi_{\beta}(s) \overline{\varphi_{\alpha}(s)} ds$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4) \dots\dots\dots(33)$$

以上は二次元であるが、三次元でも同様である。他の方向のはりについても同様にし、合計し、単位体積当たり直したポテンシャルエネルギー、運動エネルギー、散逸関数の平均をそれぞれ ε, k, f とする。

$$s = \{ \varepsilon - k + (i/\omega) f \} / 4 \dots\dots\dots(34)$$

とおけば、 s もエルミート形式である。ここで、われわれの意味で、差分を微分におきかえると、全体の S は次のように表される。

$$S = \int s(u_j, \bar{u}_j, \partial_k u_j, \partial_k \bar{u}_j, \dots, \phi_{kj}, \bar{\phi}_{kj}, \partial_i \phi_{kj}, \partial_i \bar{\phi}_{kj}, \dots) dV \dots\dots\dots(35)$$

単位体積当たりの外力を $b^i e^{i\omega t}$ とすれば、式 (23) の原理により、はん関数微分を行って、次の振動場の方程式を得る。境界条件も同様に得られる。

$$\left. \begin{aligned} (\delta S / \delta \bar{u}_j) \partial s / \partial \bar{u}_j - \partial_k \{ \partial s / \partial (\partial_k \bar{u}_j) \} + \dots = b^j \\ (\delta S / \delta \bar{\phi}_{kj}) \partial s / \partial \bar{\phi}_{kj} - \partial_i \{ \partial s / \partial (\partial_i \bar{\phi}_{kj}) \} + \dots = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

5. 二次元格子の振動と波動の伝ば

二次元格子のせん断振動を考え、 $u_j(0, v(x) e^{i\omega t})$, $\phi = \phi(x) e^{i\omega t}$ とおく。同一部材による正方格子を考え、はりの長さ l , 剛性 EI , 質量 $\rho A l$ をそれぞれ 1 とする自然単位系をとる。外力を $b^i = (0, b(x) e^{i\omega t})$ とする。二次の連続化では、式 (36) は次のようになる。

$$A_1 v + A_2 v'' + C \phi' = b, \quad -C v' + B_1 \phi + B_2 \phi'' = 0 \dots\dots\dots(37)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\omega^2 (M_{11} + 1) + C_{11} + i\omega\eta M_{11} \\ A_2 &= -\omega^2 (M_{12} - M_{22}) + (C_{12} - C_{22}) + i\omega\eta (M_{12} - M_{22}) \\ B_1 &= -2\omega^2 M_{33} + 2C_{33} + 2i\omega\eta M_{33} \\ B_2 &= -\omega^2 (M_{34} - M_{44}) + (C_{34} - C_{44}) + i\omega\eta (M_{34} - M_{44}) \\ C &= -\omega^2 (M_{14} - M_{23}) + (C_{14} - C_{23}) + i\omega\eta (M_{14} - M_{23}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

たとえば M_{11} は各点の仮想質量を表しており、図 4 のように ω と η に依存する。 ω_0 ははりの第一次固有振動数であり、 $22.37 \sqrt{EI/\rho A l^2}$ である。また、 M_{33} は各点の仮想慣性率で、図 5 のようになる。このモデルにおいて $C_{\beta\alpha}, M_{\beta\alpha}$ をすべて $\omega=0$ での値におきかえたものが 3 章のモデルに相当する。

ここで連続化による誤差を考察する。連続モデルは高階の導関数を省略したものであるから、低次の振動モードほど精度がよいのは当然である。そこでいろいろ

ろのモードの振動に対し、精度を比較しよう。それには波動の伝ばを計算するとよい。 $v(x), \phi(x) \propto e^{-ikx}$ とおき、得られた代数方程式の行列式を 0 とおけば ω に対する波数 k が定まる。波長は $2\pi/k$ であるから、どの程度のモードまで精度が保たれるかは、対応する

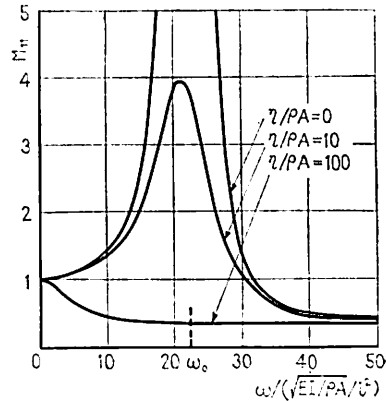


図 4 仮想質量 M_{11}

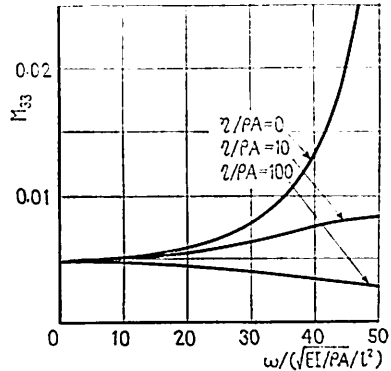


図 5 仮想回転能率 M_{33}

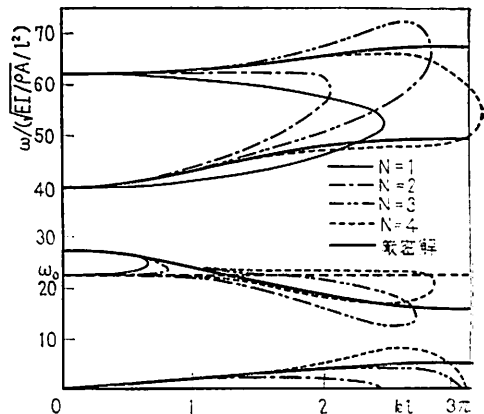


図 6 波動の伝ばと解の精度

k の解をみればよい。図6に N 次の連続化($N=1, 2, 3, 4$)に対する結果を示す。太実線は厳密解である。 kl が π で切れるのは格子の規則性によるもので、結晶物理学における Brillouin ゾーンと同一理由による。図6より、 $kl < 0.5$ では二次で十分であるが、 $kl < 1$ まで精度を保つには三次までとらねばならないことがわかる。なお、このような波動の存在は、Sunらのモデルでは得られないものである。彼らも、低周波数域で波動を求めているが、厳密解と比較せず、有限要素法で解いた数個の例と比較しているのみである。しかし、厳密解も、平均エネルギーによる変分法により計算が可能である⁽¹²⁾。これらの高周波波動は構造物の衝撃などに関与すると思われる。

6. ま と め

従来の構造物のコッセラ理論の理論構造を明らかにし、適切な連続化の指針を与えた。また、任意の振動数で成立する振動場モデルを、平均エネルギーによる変分原理を用いて構成した。そして高振動数の波動モードの存在を示し、あわせて、連続化の程度による解の

精度を検討した。本論文をまとめるにあたりご指導いただいた東京大学教授 大島信徳先生に深く感謝します。数値計算は東京大学大型計算機センターを利用した。

文 献

- (1) 日本鋼構造協会編, スペース・ストラクチャーの解析, (昭46), 鹿島出版会。
- (2) Kröner, E. 編, *Mechanics of Generalized Continua*, (1968), Springer-Verlag.
- (3) 日置・坂, 日本建築学会論文報告集, 157 (昭44-3), 33.
- (4) 松岡・ほか2名, 日本建築学会論文報告集, 184 (昭46-6), 63.
- (5) 松岡・横井, 25回応用力学連合講演会, (昭50-11), 157.
- (6) Askar, A. and Cakmak, A.S., *Int. J. Engng. Sci.*, 6 (1968), 583.
- (7) Banks, C.B. and Sokolowski, U., *Int. J. Solids Struct.*, 4 (1968), 15.
- (8) Dean, D.L. and Ugarte, C.P., *Int. J. Mech. Sci.*, 10 (1968), 315.
- (9) Bazant, Z.P. and Christensen, M., *Int. J. Solids Struct.*, 8 (1972), 327.
- (10) Sun, C.T. and Yang, T.Y., *Trans. ASME, Ser. E*, 40-1 (1973-3), 186.
- (11) 大島, 機論, 44-386 (昭53-10), 3465.
- (12) 金谷, 機論, No.780-5 (昭53-4), 14. [機論, 45-390 (昭54-2), 掲載予定].

討 論

[質問] 日置興一郎 (大阪市立大学工学部)

差分のテイラー展開の打ち切り方について「従来は式(3)の第1項のみとっている」とあるが、質問者は1964年に手法を示し(付1)、展開の次数については、連立方程式の場合その差分作用素行列(付2)において展開し、その階数まで展開次数を取りオーダをそろえている(付3)。1966年イギリスで発表(付4)して、同じテイラー展開法を Renton が独立に1965~1966年ごろに発表している(付5)~(付7)ことを知ったが、両者共展開の次数は注意深くそろえている。せん断平板類似では6階まで合わせた(付3)(付4)。

N 次の連続化という場合、すべての差分を N 次まで展開し、演算子の積でも高次を略さないと、連立差分

方程式の階数よりも高階の微分方程式になる。一方 N が差分式の階数より小さいと、差分式の階数を超える微分項を捨てた場合にも、高階微分の係数は誤差を含むが、貴論文はどの立場を取られるのか。それとも、別の意味を持つのか。

[回答] ご指摘の趣旨は、系の連立差分方程式を展開して微分方程式とする場合の処理法についてであると思うが、離散構造物の連続近似には二つの立場があると思われる。一つは、系を支配する差分方程式を微分方程式に置換する立場で、他は等価な連続体を構成する立場である。前者は古くから行われてきた方法であり、いったん微分方程式が得られれば、解の存在、その求積、あるいは級数解などが調べられることになる。ところが、微分方程式を扱うことは、最初の系を調べているのではなく、ある仮想的な連続体を考えているのであり、それは高次の変形要素、高次の応力概念を包括しているもので、いわゆる一般連続体⁽²⁾の理論の与える諸法則に従うものである。この観点より、その仮想連続体の力学特性を調べるのが後者の立場であり、文献(6)~(10)もそうだと思う。本論文もこの立場であり、連続化のプロセスとしては、連続体を特徴づけるポテンシャルエネルギー、高次変形要素

- (付1) 日置, 日本建築学会論文報告集, 103 (昭39-10), 142.
- (付2) Heki, K. and Habara, T., *Proc. 15th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1965 (1966), 1-4.
- (付3) 日置・藤谷, 日本建築学会論文報告集, 116 (昭40-10), 7.
- (付4) Heki, K. and Fujitani, Y., *Space Structures*, (1967), 33, Blackwell.
- (付5) Renton, J.D., *J. Mech. & Phys. Solids*, 13 (1965), 413.
- (付6) Renton, J.D., *Int. J. Solids & Struct.*, 2 (1966), 307.
- (付7) Renton, J.D., *Space Structures*, (1967), 19, Blackwell.

とそれに双対な一般化応力などを微分式で与えることになる。差分を微分に置換するのはこの段階であり、一度連続体が構成されれば、以下一般連続体理論によって諸方程式が得られる。そこに現れる一般化応力は、たとえせん断力とかモーメントとかの形をとっても、それは連続体としての意味であり、各部材のせん断力やモーメントとは別のもので、それらとの対応はエネルギーを介して表現されることになる。したがって、連立差分方程式の階数という概念はもはや消失しており、任意の次数の表現が可能である。それに応じて、一般化応力の概念が複雑となり、境界条件として、境界面の高次の曲率に関するものが追加される。このような連続体の立場では、連続化誤差は置換の際のエネルギーの誤差であり、エネルギーのような正值形式で誤差を評価することは、誤差にノルムを与えることと同値であって、有限要素法の誤差論(付8)と同じ考え方である。本論文でいう近似の次数も、有限要素法理論と同様に、エネルギーに関するものである。

〔質問〕 後 藤 学 (岐阜大学工学部)

(1) 計算手法や電算機の発達とともに、時流は離散化モデル優勢に向かっていると思われるが、それに抗して連続化手法の改良を示している。その主眼は局所情報の精度向上にあるようだが、その点から言っても離散化モデルの方が有利に思える。この種の連続化モデルの将来性についてご意見をお伺いしたい。

(2) コッセラ理論の発展として、Eringen らによる微極性(micropolar)ないし微晶性(micromorphic)物質の理論がある(付9)。それらは一般論のため、対象物質の内部構造を明らかにしてはじめて決まる未知関数ないし関係式(構成式など)を含んでいるが、貴理論はその種理論のわく内にあり、その一具体化であると思える。そのように解してよろしいか。

(3) 第4章は、単に高周波振動の記述にはより高

次の近似が必要であることを述べておられるのだと思う。しかし、対象とされる大形構造物の振動において、重要なのは低周波振動(地震、風圧など)なのではないか。

〔回答〕 (1) 離散化モデルの計算機による数値解析は確かに解析の手段としては最も有力だと思う。欠点として、系が大規模になると計算機の容量、計算時間が制約を受けるが、さらに大形の計算機の開発という手段で解決をはかれる限り数値計算万能の時代が続くと思う。しかし、著者の個人的な感想であるが現在でも、計算機が効率よく使われているとは思えない。計算機に依存しすぎて、結果を繁雑にし、本質の見通しを悪くしたり、無意味な計算に多くの時間と費用をかけているように思える。やがて、このような風潮に反省が加えられ、連続理論の長所が見直されるであろうと考えている。

(2) ご指摘のとおりであり、著者は以前から、Eringen, その他の理論を研究してきたが、これまでの理論はほとんど形式論であり、体系として美しく整っていても、その物理的具體化がなかったため、せっかくの理論が工学に生かされていなかった。そこで、工学現象への応用という観点から研究を始めたわけである。本論文以外の例としては、たとえばトラスでは各骨組要素が射影変形を受けると考えて、射影的微細構造をもつ場理論を構成したり(付10)(付11)、粒状体の流動の理論に発展させたりしている(付12)(付13)。極性をもつ物質の各称としては、polar material, micropolar material, structured material, material with microstructure など著者ごとに異なり、統一されていないので、本論文では最初の発端となったコッセラの名をとり、以後の発展をすべて総称してコッセラ理論と呼んだ。

(3) 対象を鉄筋コンクリートの大形構造物と考えれば、実際問題として地震などで問題となるのは低次のモードに限られると思うが、その他、振動機械の影響を受ける軽構造物なども考えられるし、衝撃などには高調波成分も含まれるので、高次モードをいつも無視できるとは考えられないと思う。具体的な例は今後考えていきたいと思う。

(付8) Strang, G. and Fix, G.J., *An Analysis of the Finite Element Method*, (1973), Prentice-Hall.

(付9) Eringen, A.C. 編, *Continuum Physics*, Vol. N, (1976), Academic Press.

(付10) 金谷, 機論, 44-383 (昭 53-7), 2244.

(付11) 金谷, 本論文集 4066 ページ.

(付12) 金谷, 機論, No.784-8 (昭 53-6), 48.

(付13) 金谷, 機論, No.783-5 (昭 53-7), 35.