

621. 6. 04

粒 状 体 の 流 動 の 基 礎 理 論*

(第 1 報, 非圧縮性の流れ)

金 谷 健 一**

1. 緒 言

粒状体とは多数の粒子からなる系の総称であり、これまで土質工学、粉体工学などよばれる分野で扱われていたが、近年、その一般的な理論の構成に関心が集められている。土質工学では主として破壊基準に関する理論と実験、破壊限界の応力解析、および水分を含んだ場合の扱いなどの静的な問題が研究されてきた⁽¹⁾。これはもちろん、これらが土木設計上重要であるからであるが、他方、運動状態の定式化の困難さのためでもあった。流動状態に対して試みられたのは、粒状体をニュートン粘性流体とみなした場合の粘性係数を測定することなどに限られているようである。一方、粉体工学では粒状体の流れについて、種々の粉体輸送装置に関し、多くの実験式が与えられているが、一般的な流れの法則、すなわち粒状体の流体力学とよべるものはいまだみられないようである⁽²⁾⁽³⁾。一般的理論構成を困難にしている理由の主たるものは、粒状体の流れに介在する要因があまりに多いことであろう。たとえば粒子の大きさ、形状、そのばらつき、摩擦、反発、粘着、浸透水、空力作用などのすべてが関与するであろうし、また、速い流れと遅い流れではそれぞれ異なる法則に従うであろう。したがって、すべての場合を包括する法則を与えることは事実上不可能であり、必然的に、着目する要因ごとに適切なモデルを構成するという方法によらざるをえないであろう。Goodman ら⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾は空げき率を場の独立な量として、有理力学とよばれる連続体力学の方法論⁽⁷⁾を用いて、粒状体の巨視的な運動方程式を導いた。しかし、彼らの理論は確かに力学法則として形式的に整ったものではあるが、そこに現れる諸定数は実験で定めるべきパラメータとなり、粒子の性質から導くことができない。この欠点を克服するには、粒状体の連続体としての巨視的考察と、個々の粒子の運動の微視的考察とを統計的手法によって結合させるという、いわば統計力

学的手法を用いるべきであると考えられる。このような考え方を用いたものとしては、大島ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾の粒子のランダムな衝突によりエネルギーが伝達されるモデルや、内部で固体摩擦によるエネルギー散逸の起こるモデルがある。本論文ではこのような考え方を発展させて、粒子の回転を導入し、粒子同士が接触摩擦を起こしながら流れていく場合について、巨視的理論を構成する手法を研究する。簡単のため、粒子は同一の剛体球であるとし、半径を a 、質量を m とする。粒子間には水分はなく、空力作用も吸着もないとする。そして、比較的密な状態で整然と流れてゆき、巨視的には非圧縮であるとみなされる場合を考える。まず、速度と回転速度とを場の独立な運動変数であるとするコッセラ理論により力学的諸方程式を導き、次に微視的モデルを考え、統計的手法により巨視的構成方程式を導く。その結果、粒状体のエネルギー散逸機構が粒子の固体摩擦に起因するという事実が、巨視的には著しい特徴をもつ非ニュートン流体を定義することが明らかになる。これは、砂などの粒状体の運動時における激しい流動現象を説明するものであり、これをナビエ・ストークスの方程式で近似することは、粒状体の本質を無視するものであるといえる。これを示すため、斜面上の流れを解析し、粒状体の流れの特性を考察する。

2. 粒状体のコッセラ理論

粒状体が比較的密な状態で流れている場合、各粒子の速度を連続変数と考えることができる。この場合、粒子には、たとえば電磁氣的遠隔力のない限り、自発的な回転は起こさない。したがって通常、粒子の回転は流れに従属する。これを式で表現すると、速度と回転速度をそれぞれ v_i 、 ω_{ji} とするとき

$$\omega_{ji} = \partial_{[j} v_{i]} \dots \dots \dots (1)$$

となる。 ω_{ji} は反対称テンソルで、 $[]$ は添字の反対称化を表す。以下、テンソル記法を用い、添字の総和規約を用いる。座標系は直交系とし、共変成分と反変成分とを区別しない。ところで(1)は常に成立すると

* 昭和 53 年 6 月 10 日 関西支部第 238 回講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和 53 年 1 月 24 日。

** 正員、群馬大学工学部 (〒 376 桐生市天神町 1-5-1)。

は限らない。たとえば境界条件として速度,あるいは回転速度のみ与えられることもある。また,加速運動の場合,慣性モーメントのため回転が流れの変化に追従できない場合もある。このような場合,(1)からのずれは小さく,連続的であると考えてよいであろう。したがって,各点の運動の自由度が速度 v^i と回転速度 ω_{ji} であるコッセラ理論が適用できる。この,粒子が独立に回転するという点が,粒状体の基本的特徴であろう。コッセラ理論は弾性論の問題として古くから研究されていたが,流体に適用したのは大島⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾, Eringen⁽¹²⁾⁽¹³⁾らであり,極性流体,あるいはマイクロポーラ流体の理論とよばれている。まず,これらの理論により,力学的諸方程式を導いておこう。

運動の自由度を v^i, ω_{ji} とすると,これらに対応

する,すなわちこれらを変えようとする作用が通常力,およびモーメント(あるいはカップル)である。これらは体積力と面力として作用するが,通常力 ρb^i としては重力のみを考え,体積カップルは考えない。面力とは任意の面素の両側から等しい作用を及ぼしあっているものであるが, n_k を面素 dS の単位法線とすると, n_k の側が反対側へ及ぼす力,およびカップルはそれぞれ $\sigma^{ji}n_j dS, \mu^{kj}n_k dS$ という形で表される。 σ^{ji} は通常力, μ^{kj} はカップル力とよばれる。まず,質量保存則は次のように表される。

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = 0 \dots\dots\dots (2)$$

また,運動量と角運動量の保存則はそれぞれ次のように表される。

$$\frac{d}{dt} \int \rho v^i dV = \int \rho b^i dV + \oint \sigma^{ji} n_j dS \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{d}{dt} \int \left\{ 2\rho r^{[j} v^{i]} + \frac{2}{5} \rho a^2 \omega^{ji} \right\} dV = \int 2\rho r^{[j} b^{i]} dV + \oint \left\{ 2r^{[j} \sigma^{i]k} n_k + \mu^{kj} n_k \right\} dS \dots\dots\dots (4)$$

これらを変形して,ガウスの定理を用いると,次の連続の方程式,運動方程式,および角運動方程式を得る。

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \partial_k v^k = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \partial_j \sigma^{ji} + \rho b^i \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{2}{5} \rho a^2 \frac{d\omega_{ji}}{dt} = \partial_k \mu^{kj} + 2\sigma^{[ji]} \dots\dots\dots (7)$$

3. 散逸関数と構成方程式

上述の方程式を解くには構成方程式を知る必要があるが,粒状体のような複雑な内部構造をもつ場合,個々の粒子の受ける力を詳細に追跡することは不可能である。そこで,粒状体の内部の相互作用を特徴づけるエネルギー散逸機構に着目して,そのような散逸仕事を起こす,等価な巨視的応力を定めよう。これは金属塑性論と共通する考え方である。本論文で考えている粒状体では粒子間に何のポテンシャル力も作用しておらず,基準座標は存在しない。粒子は剛体であり,弾性エネルギーをもたない。ゆえに,粒状体には内部エネルギーはなく,内力はすべて散逸力であると考えられる。単位体積中の単位時間当たりの散逸エネルギーを Φ とおき,散逸関数とよぼう(通常の力学では 2Φ を散逸関数とよんでいる)。エネルギー保存則を適用すると,外力のする仕事率 $d'W/dt$ は運動エネルギーの増加 dK/dt に用いられた残りが完全に散逸される。

$$\frac{d'W}{dt} - \frac{dK}{dt} = \int \Phi dV \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{d'W}{dt} = \int \rho b^i v_i dV + \oint \left(\sigma^{ji} n_j v_i + \frac{1}{2} \mu^{kj} n_k \omega_{ji} \right) dS \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} \rho v_i v^i + \frac{1}{10} \rho a^2 \omega_{ji} \omega^{ji} \right) dV \dots\dots\dots (10)$$

式(9),(10)を式(8)に代入し,ガウスの定理と式(5)~(7)を用いて,次の散逸関係式を得る。

$$\Phi = \sigma^{ji} \partial_j v_i - \sigma^{[ji]} \omega_{ji} + \frac{1}{2} \mu^{kj} \partial_k \omega_{ji} \dots\dots\dots (11)$$

これに対して,熱力学第2定理に相当する次の原理が当然要請される。

$$\Phi(\partial_j v_i, \omega_{ji}, \partial_k \omega_{ji}) \geq 0 \dots\dots\dots (12)$$

従来の極性流体,あるいはマイクロポーラ流体の理論では Φ として正値二次形式を仮定した。このとき応力は

$$\sigma^{ji} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial_j v_i)}, \quad \frac{1}{2} \mu^{kji} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial_k \omega_{ji})} \dots \dots \dots (13)$$

となり、構成方程式は $\partial_j v_i, \omega_{ji}, \partial_k \omega_{ji}$ の一次式であり、線形理論が得られる。しかし、ここでは別の考え方をとろう。すなわち、まず Φ を微視的考察と統計的手法により定めてしまうのである。その結果、一般に Φ はある運動要素 X_1, X_2, \dots, X_N の関数となるであろう。ところで、ある特定の散逸機構、たとえば線形粘性とか固体摩擦などを指定すれば、普通、 $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_N)$ はその散逸機構を特徴づけるある次数の同次式となる。あるいは逆に、同次式でなければ、それは異なった散逸機構によるとみなすと考えてもよい。たとえば $\Phi(X_1, X_2, \dots, X_N)$ が κ 次同次式であるとしよう。このときオイラーの定理

$$\Phi = \frac{1}{\kappa} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \Phi}{\partial X_\alpha} X_\alpha \dots \dots \dots (14)$$

が成立する。本論文の主張は、この $(1/\kappa) \partial \Phi / \partial X_\alpha$ を運動要素 X_α に対応する応力に選ぶという点にある。これを散逸関数のオイラー分解とよぼう。もちろん、応力のとり出し方はほかにも考えられることは、ちょうど非可逆過程の熱力学において、エントロピ生成を一般化力と一般化流束とに分解するのと同じ事情にある。しかし元来、粒状体は離散的なもので、真の意味の応力は微視的にしか存在しないのであり、巨視的な応力は、それが系の散逸エネルギーに関して等価であれば、その散逸機構に基づく系の挙動を十分よく特徴づけることができるであろう。これは、よく行われる固

体摩擦のある力学系に等価減衰係数を定義するという考え方の自然な拡張である。ここでは $\kappa=1$ を散逸次数とよぼう。散逸次数が 1 の場合が線形理論である。したがって、式 (13) は次のように一般化される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{ji} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial_j v_i)} \\ \frac{1}{2} \mu^{kji} &= \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial_k \omega_{ji})} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

4. 粒子間の摩擦散逸とその巨視的表現

図 1 のように接触する回転 2 粒子を考える。 n_k は接触点の方向を示す単位ベクトルである。この微視的モデルと巨視的連続場との関係は

$$v_i' = v_i + 2a n_j D_{ji} \dots \dots \dots (16)$$

$$\omega_{ji}' = \omega_{ji} + 2a n_k \Omega_{kji} \dots \dots \dots (17)$$

で与えられる。ただし、 D_{ji}, Ω_{kji} はそれぞれ巨視的な速度、および回転速度のこう配である。

$$D_{ji} = \partial_j v_i, \quad \Omega_{kji} = \partial_k \omega_{ji} \dots \dots \dots (18)$$

接触点での相対速度の接線成分 ξ_i は次のように表せる。

$$\xi_i = 2a (n_j F_{ji} - n_k n_j n_i F_{kji} - a n_k n_j \Omega_{kji}) \dots \dots (19)$$

ただし

$$F_{ji} = D_{ji} - \omega_{ji} \dots \dots \dots (20)$$

とおいた。ところで、接触の方向 n_k はまったくランダムであると考えられるので、全立体角 4π にわたって一様分布している確率変数と考えることができる。そこでその大きさの二乗平均 $\overline{\xi_i \xi_i}$ を計算しよう。よく知られた公式

$$\overline{n_j n_i} = \frac{1}{3} \delta_{ji}, \quad \overline{n_k n_j n_i} = 0, \quad \overline{n_i n_k n_j n_i} = \frac{1}{15} (\delta_{ik} \delta_{ji} + \delta_{ij} \delta_{ki} + \delta_{ii} \delta_{kj}), \quad \overline{n_m n_i n_k n_j n_i} = 0 \dots \dots \dots (21)$$

を用いると、次の結果をうる (―は平均を意味し、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである)。

$$\sqrt{\overline{\xi_i \xi_i}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} a \hat{\omega} \dots \dots \dots (22)$$

ただし

$$\hat{\omega} = \sqrt{\frac{3}{10} E_{ji} E_{ji} + \frac{1}{2} R_{ji} R_{ji} + \frac{a^2}{10} (\Omega_{kkl} \Omega_{llj} + \Omega_{kjl} \Omega_{kji} + \Omega_{kji} \Omega_{jkl})} \dots \dots \dots (23)$$

$$E_{ji} = D_{(ji)} - \frac{1}{3} \delta_{ji} D_{kk}, \quad R_{ji} = \omega_{ji} - D_{[ji]} \dots \dots \dots (24)$$

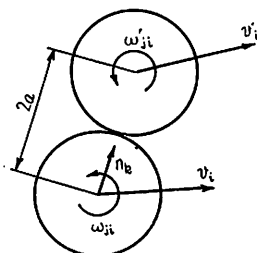


図 1 接触する回転 2 粒子

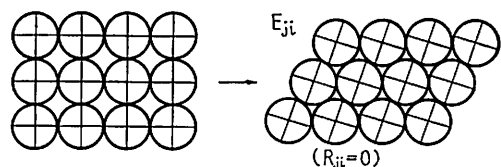


図 2 せん断に従属して回転する粒子

とおいた。\$E_{ji}\$ は偏差ひずみ速度，\$R_{ji}\$ は独立回転速度である。特に速度場がなく (\$v_i=0\$)，回転が一様 (\$\partial_k \omega_{ji}=0\$) であれば

$$\dot{\omega} = \sqrt{\frac{1}{2} \omega_{ji} \omega_{ji}} \dots\dots\dots(25)$$

となるので，\$\dot{\omega}\$ は速度場に独立な回転の大きさを表していると考えられる。ところが，回転が速度場に従属して (\$\omega_{ji}=\partial_{(j} v_{i)})\$，回転が一様 (\$\partial_k \omega_{ji}=0\$) の場合は

$$\dot{\omega} = \sqrt{\frac{3}{10} E_{ji} E_{ji}} \dots\dots\dots(26)$$

であり，これは0でない。これは図2に示されているように，たとえ回転が速度場に従属していても，粒状体がせん断 \$E_{ji}\$ をうける場合，粒子に大きさのある限り，粒子同士が必ず接触摩擦を起こすことを意味している。したがって，\$\dot{\omega}\$ は粒状体の本質ともいえる内部の粒子の作用を特徴づける量であるといえる。従来の極性流体，あるいはマイクロポーラ流体の理論では粒子の作用を独立回転速度 \$R_{ji}\$ で記述しているが，これは粒子間の相互作用を正しく反映していないもので，\$\dot{\omega}\$ を用いるのが合理的であると考えられる。

さて，ひとつの粒子の平均接触点数を \$n\$ とすれば，一接触点での圧縮力は \$4\pi a^2 p/n\$ である。ただし，\$p\$ は巨視的な圧力である。したがって摩擦力は，\$\mu\$ を動摩擦係数とすれば \$4\pi a^2 p \mu/n\$ であり，単位時間当たりの散逸エネルギーは式(22)より，平均 \$4\pi a^2 p \mu/n \times (2\sqrt{6}/3) a \dot{\omega}\$ である。一粒子についてはこの \$n/2\$ 倍であり，単位体積中では \$\rho/m\$ 倍して

$$\Phi = C_0 P \dot{\omega}, \quad C_0 \equiv \frac{4\sqrt{6}\pi}{3} \frac{\mu a^3 \rho}{m} \dots\dots\dots(27)$$

を得る。これより，散逸次数は0であることがわか

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \omega\right)^2 + \frac{3}{20} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{2}{5} a^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2}, & \sigma^{yz} &= \sqrt{6} \mu \gamma^2 \cos \theta \frac{1-y}{\dot{\omega}} \left(\frac{2}{5} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \omega\right) \\ \sigma^{(yz)} &= -\sqrt{6} \mu \gamma^2 \cos \theta \frac{1-y}{\dot{\omega}} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \omega\right), & \mu^{yzv} &= \frac{\sqrt{6}}{5} \mu \gamma^2 a^2 \cos \theta \frac{1-y}{\dot{\omega}} \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

特に定常状態では流れの方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dy} \left\{ \frac{1-y}{\dot{\omega}} \left(\frac{2}{5} \frac{du}{dy} + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} = -\frac{\tan \theta}{\sqrt{6} \mu \gamma}, \quad \frac{d}{dy} \left(\frac{1-y}{\dot{\omega}} \frac{d\omega}{dy} \right) = \frac{10}{a^2} \frac{1-y}{\dot{\omega}} \left(\frac{1}{4} \frac{du}{dy} + \frac{1}{2} \omega \right) \dots\dots\dots(35)$$

これに含まれるパラメータは \$a\$ と \$\tan \theta / \mu \gamma\$ のみである。さらに，次の定理が成立することもわかる。

[相似定理] \$\alpha\$ を任意の定数とするととき，\$u, \omega\$ が定常方程式を満たすなら，\$\alpha u, \alpha \omega\$ もそうである。

これは内部散逸が固体摩擦に起因することと，固体摩擦の大きさは接触面の垂直圧にのみより，摩擦速度にはよらないという事実とによるもので，このため散逸次数が0となり，定理が成立するのである。これはまた粒状体の著しい流動性を説明するものでもあり，粒状体の流れの基本的特性のひとつであると考えられる。

次に，回転が流れに従属する，次のような単純せん断流を考えよう。

$$u = \alpha y, \quad \omega = -\frac{1}{2} \alpha \dots\dots\dots(36)$$

これは固体摩擦に起因する内部散逸の著しい特徴のひとつである。式(27)より，3章で述べたように，オイラー分解によって，次の構成方程式を得る。

$$\sigma^{(j)} = \frac{3C_0}{10} \frac{p}{\dot{\omega}} \left(\partial_{(j} v_{i)} - \frac{1}{3} \delta_{ji} \partial_k v_k \right) \dots\dots\dots(28)$$

$$\sigma^{[j]} = \frac{C_0}{2} \frac{p}{\dot{\omega}} (\partial_{(j} v_{i)} - \omega_{ji}) \dots\dots\dots(29)$$

$$\mu^{kj} = \frac{a^2 C_0}{5} \frac{p}{\dot{\omega}} (\delta_{kj} \partial_{(i} \omega_{i)} + \partial_k \omega_{ji} + \partial_{(j} \omega_{i)k}) \dots\dots\dots(30)$$

ただし，\$\sigma^{(j)} = \sigma^{(j)} - (1/3)\delta_{ji}\sigma^{kk}\$ は偏差応力である。ところで，式(28)を粘性流体の構成方程式とみなせば，等価粘性係数を

$$\mu^* = \frac{3C_0}{10} \frac{p}{\dot{\omega}} \dots\dots\dots(31)$$

とおくことができる。これは回転を考えない大島ら⁽⁹⁾の理論のものの拡張になっている。

5. 粒状体の斜面上の流れ

図3に示されるような斜面上の流れを考える。単位系としては，粒子の真の密度 \$\rho_0\$，重力の加速度 \$g\$ と流れの厚さ \$h\$ とを基本にして無次元化したものとする。粒子の充てん率を \$\gamma\$ とすると運動方程式は次のように表せる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sin \theta + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \sigma^{yz}}{\partial y} \\ 0 &= -\cos \theta - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{5}{2\gamma a^2} \left\{ 2\sigma^{(yz)} + \frac{\partial \mu^{yzv}}{\partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

$$\text{第2式はすぐ積分できて，圧力は} \quad p = \gamma \cos \theta (1-y) \dots\dots\dots(33)$$

であるから，構成方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \omega\right)^2 + \frac{3}{20} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{2}{5} a^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2}, & \sigma^{yz} &= \sqrt{6} \mu \gamma^2 \cos \theta \frac{1-y}{\dot{\omega}} \left(\frac{2}{5} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \omega\right) \\ \sigma^{(yz)} &= -\sqrt{6} \mu \gamma^2 \cos \theta \frac{1-y}{\dot{\omega}} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \omega\right), & \mu^{yzv} &= \frac{\sqrt{6}}{5} \mu \gamma^2 a^2 \cos \theta \frac{1-y}{\dot{\omega}} \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

特に定常状態では流れの方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dy} \left\{ \frac{1-y}{\dot{\omega}} \left(\frac{2}{5} \frac{du}{dy} + \frac{1}{2} \omega \right) \right\} = -\frac{\tan \theta}{\sqrt{6} \mu \gamma}, \quad \frac{d}{dy} \left(\frac{1-y}{\dot{\omega}} \frac{d\omega}{dy} \right) = \frac{10}{a^2} \frac{1-y}{\dot{\omega}} \left(\frac{1}{4} \frac{du}{dy} + \frac{1}{2} \omega \right) \dots\dots\dots(35)$$

これに含まれるパラメータは \$a\$ と \$\tan \theta / \mu \gamma\$ のみである。さらに，次の定理が成立することもわかる。

[相似定理] \$\alpha\$ を任意の定数とするととき，\$u, \omega\$ が定常方程式を満たすなら，\$\alpha u, \alpha \omega\$ もそうである。

これは内部散逸が固体摩擦に起因することと，固体摩擦の大きさは接触面の垂直圧にのみより，摩擦速度にはよらないという事実とによるもので，このため散逸次数が0となり，定理が成立するのである。これはまた粒状体の著しい流動性を説明するものでもあり，粒状体の流れの基本的特性のひとつであると考えられる。

次に，回転が流れに従属する，次のような単純せん断流を考えよう。

$$u = \alpha y, \quad \omega = -\frac{1}{2} \alpha \dots\dots\dots(36)$$

ここで、パラメータ θ_* を次のように定義しよう。

$$\tan \theta_* = \frac{3\sqrt{10}}{10} \mu \tau \dots\dots\dots (37)$$

式 (36) を式 (35) に代入してみれば、 $\theta = \theta_*$ のときのみ式 (36) は解であることがわかる。式 (32) にもどって調べてみれば、 $\theta > \theta_*$ ならば流れは加速され、 $\theta < \theta_*$ ならば減衰することがわかる。すなわち、 θ_* は動的な安息角であると考えられる。そこで、ここでは式 (37) で定義される θ_* を安息角とよぶことにする。このような安息角の存在が、粒状体の流れのもうひとつの基本的特性である。このように、本論文の理論では、相似定理や安息角の存在などの粒状体の流れの基本特性がはあくされており、これらはナビエ・ストークスの方程式による近似、あるいは、従来の極性流体やマイクロポーラ流体の線形理論では不可能なことである。

最後に、境界条件の影響を考察しよう。自由表面ではすべての応力が 0 となることは式 (34) から明らかであるが、底面には半径 a の球が敷きつめてあると

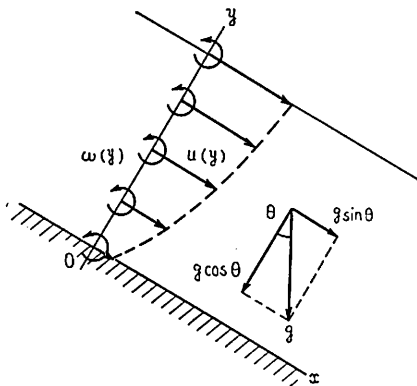


図 3 粒状体の斜面上の流れ

しよう。そして、境界において受ける応力は、構成式において $\partial u / \partial y \rightarrow u(0) / 2a$, $\omega \rightarrow \omega(0)$, $\partial \omega / \partial y \rightarrow \omega(0) / 2a$ とおいたもので与えられるとしよう。安息角として $\theta_* = 30^\circ$ とし、 $\theta = \theta_*$ とすれば、流れのパラメータは a/h のみである。式 (35) は複雑な非線形方程式であり、解析解を求めるのは困難であるので、初期条件として式 (36) で $\alpha = 1$ としたものを用いて、式 (32) により、計算機シミュレーションで定常解を推定したのが図 4, 5 である。 $y=0$ での値は最下層の粒子の速度と回転速度とを表している。そして、粒子の相対的大きさ a/h が増大するにつれ、境界での作用がしたいに内部に伝達されてゆき、「境界層」の厚さが増大する様子が示されている。

6. ま と め

本論文では粒状体の流れを特徴づける力学法則を調べるために、粒状性の基本と考えられる回転を新しい自由度として付加した理論を構成し、粒状体の流れの基本的特性を考察した。まず、コッセラ理論により、回転を含んだ場の力学的諸方程式を導いた。従来のコッセラ理論では、線形構成方程式を仮定するという形式論をとっているが、本論文では、微視的モデルを考察し、統計的手法により巨視的なエネルギー散逸関数を導き、そこからその散逸機構を特徴づける等価応力を決定した。その際、散逸機構を特徴づける散逸次数を定義し、オイラー分解の手法を用いた。本理論では、微視的な考察により、粒状性を反映する量 $\hat{\omega}$ が定義される。これは内部の粒子同士の接触の量を表すものであり、理論構成に重要な役割を果たす。粒状体の流れの基本特性を知るため、さらに斜面上の流れを考察した。粒状体の内力は固体摩擦に起因するという事実が、本理論では散逸次数が 0 となるという点に反映し

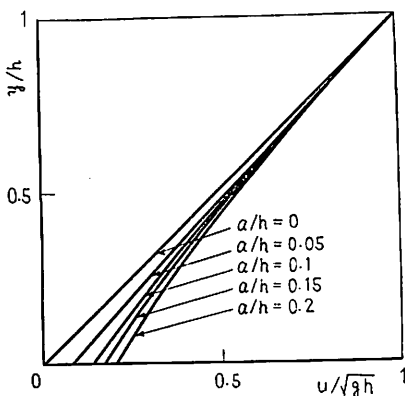


図 4 斜面上の粒状体の速度

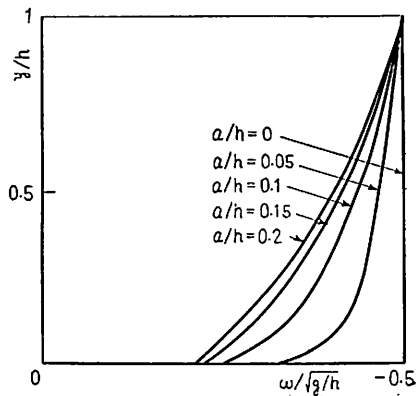


図 5 斜面上の粒状体の回転速度

て、流れに著しい特徴を与えている。その代表的なものが、定常流に対する相似定理と、安息角の存在である。これらは粒状体の著しい流動性を説明するものでもあり、本理論が粒状体の流れの基本特性を十分はあくしていると考えられる。これらの点において、ナビエ・ストークスの方程式による近似や、従来の線形コッセラ理論は不十分なものであった。最後に、境界条件の内部へ及ぼす影響を、シミュレーションによって調べ、境界層の様相を考察し、粒状性の影響を調べた。

最後に、本論文をまとめるにあたりご指導いただいた、東京大学教授、大島信徳先生に深く感謝したいと思います。また、数値計算は、東京大学大形計算機センターを利用して行った。

討 論

〔質問〕 長尾高明(東京大学工学部)

(1) 式(1), (4)などに出てくる $\partial_{[j}v_{i]}$, $r^{[j}v^{i]}$, $r^{[j}\sigma^{k]i]}$ などの表現を説明していただきたい。

(2) 本理論が当てはまると思われる対象はどのようなものか。たとえば静止した粉粒体の系に当てはまるか。

(3) 510 ページ左欄 20 行めにおいて、「平均接触点数を n とすれば、一接触点での圧縮力は $4\pi a^2 p/n$ である。ただし p は巨視的な圧力である」とあるが、この圧縮力としては $4\pi a^2 p/(n\gamma)$ (γ は充てん率) が用いられるべきだと考えられる。その理由は次のとおりである。

接触点に垂直に働く力を F とする。一つの粒子のまわりに働く力を一様分布に直すと、単位面積当たり $F' = nF/(4\pi a^2)$ の力が働いている状態と等価と見なすことができるが、この F' は圧力 p と等しくはない。

圧力というのは単位面積に働く力の和として考えられ、測定されるものである。したがって、ある面 S (単位面積) と交わる粒子を考えると(付図 1 参照)、この粒子の数は $2aN$ (粒子中心が S から a の距離内にある粒子の数) である (N は単位体積内の粒子数)。

そして、一つの粒子がこの S に及ぼす力の平均は、 S に垂直な成分の積分として、 $(2/3)\pi a^2 F'$ で表される*1。したがって圧力 p はこれらの力の和であり、

$$p = (2/3)\pi a^2 F' 2aN = (1/3)anNF$$

となる。ところが、粒子の占める体積は

$$(4\pi/3)a^3 N = \gamma$$

文 献

- (1) 最上編, 土質力学, (昭 44), 技報堂.
- (2) 化学工学協会編, 粉体装置工学, (昭 46), 日刊工業新聞社.
- (3) Brown, R. L. and Richards, J. C., *Principles of Powder Mechanics*, (1970), Pergamon Press.
- (4) Goodman, M. A. and Cowin, S. C., *J. Fluid Mech.*, 45 (1971), 321.
- (5) Goodman, M. A. and Cowin, S. C., *Arch. Rational Mech. Anal.*, 44 (1972), 249.
- (6) Cowin, S. C., *Powder Technology*, 9 (1974), 61.
- (7) Truesdell, C. and Noll, W., *The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik*, III/3 (1965), Springer-Verlag.
- (8) 大島・小川, 機研論, No. 760-15 (昭 51-10), 89.
- (9) 大島・小川, 機研論, No. 772-1 (昭 52-8), 99.
- (10) Oshima, N., *RAAG Memoirs*, D-VI, 1 (1955), 563.
- (11) 大島, 材料科学, 9-5・6 (昭 47-12), 294.
- (12) Eringen, A. C., *Int. J. Engng. Sci.*, 2 (1964), 205.
- (13) Eringen, A. C. 編, *Continuum Physics*, IV, (1976) Academic Press.

だから、これから N を消去すれば

$$p = n\gamma F / (4\pi a^2) \text{ または } F = 4\pi a^2 p / (n\gamma)$$

を得る。

試みに六方ちゅうり(稠)密の最密充てんの場合を考えると、 $n=12$ だから $4\pi a^2 p/n = (\pi/3)a^2 p$ であるが、 $\gamma = \pi/(3\sqrt{2})$ であり、 $4\pi a^2 p/(n\gamma) = \sqrt{2}a^2 p$ を得る。一方、一接触点での力を F とし幾何学的に p を計算してゆくと、 $F = \sqrt{2}a^2 p$ となり、 $F = 4\pi a^2 p/(n\gamma)$ が成立することが分かる。

〔回答〕 (1) 本論文では指標の対称, 反対称化に (), [] を用いている。定義は次のとおりである。

$$A_{[j]i} = \frac{1}{2}(A_{ji} + A_{ij}), \quad A_{[j]i} = \frac{1}{2}(A_{ji} - A_{ij})$$

したがって、

$$\partial_{[j}v_{i]} = \frac{1}{2}(\partial_j v_i - \partial_i v_j)$$

$$r^{[j}v^{i]} = \frac{1}{2}(r^j v^i - r^i v^j)$$

$$r^{[j}\sigma^{k]i]} = \frac{1}{2}(r^j \sigma^{ki} - r^i \sigma^{kj})$$

*1 粒子が面 S より y の高さにある場合、図のように記号をとり、 $y = a \cos \xi_0$ とおくとまわりに F' が働く粒子が S に及ぼす力は、

$$\int_0^{\xi_0} F' \cos \xi \cdot 2\pi a^2 \sin \xi \, d\xi = \pi a^2 F' \sin^2 \xi_0$$

(これは $y < 0$ でも同じ)。 S からの距離 y についてこの平均をとると、

$$1/(2a) \int_{-a}^a \pi a^2 F' \sin^2 \xi_0 \, dy$$

$$= \pi a F' \int_0^a [1 - (y/a)^2] \, dy = (2/3)\pi a^2 F'$$

となる。これが一つの粒子が面 S に与える力を表す。

である。また $||$ は、対称化、反対称化に関係のない指標であることを意味する。上の三つの量は、指標なしの記法ではそれぞれ

$$\frac{1}{2} p \times v, \quad \frac{1}{2} r \times v, \quad -\frac{1}{2} \sigma \times r$$

となる。

(2) 本理論は、全粒子が運動しているという前提の上に構成されたものだから、摩擦は動摩擦のみ考慮している。したがって部分的に静止しているような場合にはあてはまらない。その場合には、静力学と静摩擦とを考慮した別の理論展開が必要になると思う。

(3) 本論文では、理論構造の見通しをよくするように、できるだけ単純化しようとしたため、単純に $4\pi a^2 p/n$ とおいたが、詳しく検討すると、確かにご指摘のとおりで、 $4\pi a^2 p/n\gamma$ がより精密な近似であると思う。本論文の計算にその補正を加えるには、本文中の μ を μ/γ で置きかえればよく、その結果、安息角 θ_* は

$$\theta_* = \tan^{-1} \left(\frac{3\sqrt{10}}{10} \mu \right)$$

となり、たとえば $\mu=0.7$ (ガラス) とすれば $\theta_*=33.6^\circ$ となって、通常観察される結果によく一致しているといえる。

ご指摘のような微妙な議論は、なかなか気づきにくいものだと思う。

〔質問〕 皆川 七郎 (電気通信大学)

「粒子の回転は流れに従属する」としているが、それと、4章の確率論的な取扱いと関連を説明していただきたい。別ないい方をすれば式 (16)~(18) にあらわれる $v_i, \omega_{ji}, v'_i, \omega'_{ji}$ の関係、それらの物理的意味を説明していただきたい。

〔回答〕 「粒子の回転は流れに従属する」とは仮定していない。通常は粒子回転が流れに従属すると考えられるが、そうでない場合もあるので、一般に粒子の回転は流れと独立である、というのが本論文の前提である。また、4章の v_i, ω_{ji} などの意味は次のとおりである。巨視的にみて、流れが平均的に $v_i(r), \omega_{ji}(r)$ であるとき、2点 $P(r_1), P'(r_1+\Delta r_1)$ に中心をもつ粒子が接触しているとすれば、それらの速度や回転は平均的には $v_i(r_1), \omega_{ji}(r_1)$ および $v_i(r_1+\Delta r_1), \omega_{ji}(r_1+\Delta r_1)$ と考えられる。粒子半径が巨視的スケールに比べ小さいときは展開して一次近似で表せるので、式 (16), (17) のように表せる。なお、平均的値のまわりの変動については第2報(付1)で扱う。

〔質問〕 森山 龍一 (福岡教育大学)

(1) 一般に、粉粒体層の特性として、粉体と壁面の摩擦係数は粉体と粉体の摩擦係数より小さいと言われている。図3の流れでも底面の摩擦によっては境界面の速度差はあっても、上層の速度差がないこともあり得ると考えられる。粉体と壁面の摩擦の存在はどのようにとり入れられるのか。

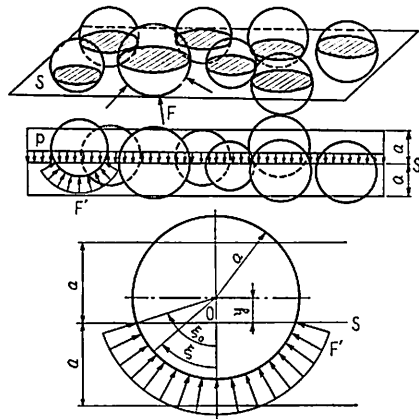
(2) 摩擦力は、 μ を動摩擦係数として、 $4\pi a^2 p \mu/n$ で示されており、 p は巨視的な圧力としてあるが、粒子の集合体の要素で考えたとき、水平圧と鉛直圧は異なり、一般に、 $p_h = K p_v$ で示される。一粒子で考える場合、 p の巨視的な圧力とはどのようなことを示してあるのか。Kの存在をどのように評価してあるのか。

〔回答〕 (1) 粒子間の相互作用が本論文のように理論的に処理できるのは、粒子がすべて運動しているという前提に基づくものである。したがって、壁面との摩擦は本理論によっては定めることができない。具体的な流れの解析において、場合に応じて適当に境界条件を課す必要がある。この点については、実験事実ともあわせて検討してゆくつもりである。

(2) 粒状体内部の応力状態を $\sigma^{(i)}$ とすればこれを

$$\sigma^{(i)} = -p\delta_{ij} + \bar{\sigma}^{(ij)} + \sigma^{(ij)}$$

と分解できる。ただし、 $\bar{\sigma}^{(ij)}$ は $\sigma^{(ij)}$ の偏差成分である。本理論では第1項が静的なもので、第2, 第3項が摩擦散逸によるものと考えている。巨視的圧力とはこの p のことである。一般にはこの静的なものも等方ではなく、テンソルで表すべきであろうが、本論文のように、粒子がばらばらに運動しているときは、粒子の配列が自由に変化できるので、静止状態に比べると、方向による圧力(散逸部分は除く)の変化は極め



付図 1 巨視的な圧力と接触点での力との関係

(付 1) 本論文集 515 ページ。

て少ないと思われる。なお、長尾氏との討論をご参照願いたい。

〔質問〕 棚橋 隆彦 (慶応義塾大学工学部)

(1) 粒子間に水分がなく、粒子同士が接触摩擦を起こしながら流れると仮定すると、密度の定義式は

$$\rho \equiv \frac{4}{3} \pi a^3 N \rho_0 / V$$

と考えてよいか。ただし、 N は体積 V の中に含まれる粒子の平均個数とする。

(2) 速度 v_i はどのように定義されているのか。粒子の中心速度と考えてよいか。

(3) 粒子間に水分がはいった場合基礎式(7)はどのようになるか。

(4) 式(19)の誘導に対する文献をお教え願いたい。

(5) 壁面に接する粒子の回転は、粒子の運動より自然に決まるものと思われるが、壁面上の回転速度を境界条件として独立に与えてよいか。この場合壁面と粒子の間の摩擦係数はどのように処理されているのか。

〔回答〕 (1) そのとおりである。

(2) v_i は各粒子の中心速度を適当な近傍内で平均したものである。あるいはアンサンブル平均と考えることもできる。したがって、流れの場が $v_i(r)$ のとき、ある粒子の中心が r_1 にあるときは、その粒子の速度は $v_i(r_1) + v_i'$ となる。ここで v_i' は粒子ごとにランダムであり、平均的に0となる変動成分である。本報ではこの変動成分を無視したが、この変動成分の影響は第2報(付1)で考察する。

(3) 水の質量による慣性効果を考えなければ、これは角運動量保存則だから変化をうけない。しかし、構成方程式は本理論からは得られず、粒子表面の作用をさらに考慮しなければならない。一方、水に浸された粒状体のような場合には複雑な動的相互作用が生じるので、式(5)~(7)はより複雑なものになる。このような場合の一般論は大島(付2)により議論されている。

(付2) 大島, 機論, 44-378 (昭53-2), 580.

る。

(4) 他の文献のことはわからないが、式(19)の誘導は次のとおりである。図1の下の球の、接点での速度は $v_j + a n_k \omega_{kj}$ (または $v + \omega \times a n$) で、上の球のそれは $v_j' - a n_k \omega_{kj}'$ (または $v' - \omega' \times a n$) だから、接点での相対速度は、式(16), (17)を代入して

$$\begin{aligned} \zeta_j &= (v_j' - a n_k \omega_{kj}') - (v_j + a n_k \omega_{kj}) \\ &= 2 a n_k D_{kj} - 2 a n_k \omega_{kj} - 2 a^2 n_i n_k \Omega_{ikj} \end{aligned}$$

となる。 ζ_j の接平面の法線方向の成分は $n_k \zeta_k$ だから、これを差し引いた接線成分は

$$\xi_j = \zeta_j - (n_k \zeta_k) n_j$$

であり前式を代入して、 ω_{kj} , Ω_{ikj} の反対称性より

$$n_k n_j \omega_{kj} = 0, \quad n_i n_k n_j \Omega_{ikj} = 0$$

に注意すれば式(19)を得ることができる。

(5) 森山氏の質問(1)に対する回答を参照されたい。

〔質問〕 後藤 学 (岐阜大学工学部)

マイクロポーラ体の一般理論においては、対象物質の内部構造を具体的に規定しないので、構成式などは当然未知関数(ないし特殊な関数)とされる。貴論文のように、内部構造を明確に規定する場合は、採られているような統計的手法により構成式などを導くのが自然なゆき方と思われる。つまり、貴理論は一般的マイクロポーラ理論の一具体化と考えられる。そう理解してよいか。

〔回答〕 ご指摘のとおりである。有理力学の人々や Eringen らの理論では、構成式として一般的な関数関係を仮定しているだけであり、具体的な結果は得られない。通常はテンソルの多項式展開を行い、結局一次の項のみ残して、線形構成式を導いているが、このようなやり方では、粒状体のような特殊な内部の非線形性を記述できない。上記のような一般連続体の理論を具体化して、工学の諸問題に応用しようというのが著者の現在までの研究課題である(付3)(付4)。

(付3) 金谷, 機論, 44-383 (昭53-7), 2244.

(付4) 金谷, 機論, 44-388 (昭53-12), 4081.