

621. 6. 04

粒 状 体 の 流 動 の 基 礎 理 論*

(第 2 報, 発達した流れ)

金 谷 健 一**

1. 緒 言

前報⁽¹⁾では、粒状体の流れとして、同一の剛体球が比較的密な状態で整然と流れているモデルを研究した。このような流れは、粒子の速度と回転速度とを連続変数と考えるコッセラ理論⁽²⁾⁽³⁾に従って力学的諸方程式を導くことができる。構成方程式を得るために、著者らは粒子の摩擦の微視的モデルを考察して、統計的平均化により巨視的關係式を導くという、統計力学的手法⁽⁴⁾を用いた。その際、エネルギー散逸機構を特徴づける散逸次数を定義し、オイラー分解の手法を用いた。また、粒子同士の接触の量を表す $\dot{\omega}$ という量が理論構成に重要な役割を果たした。そして、斜面上の流れを考察し、粒状体の内力が固体摩擦に起因するという事実により散逸次数が 0 となり、流れに著しい特徴を与えていることが示された。代表的なものが定常流の相似定理と安息角の存在であった。また、境界条件の影響も検討した。

本報では、流れが発達して、内部に乱れを含む場合を考える。すなわち、粒子は自分の平均的位置のまわりを、隣接する粒子との衝突を繰返しながら不規則に変動していると考え、粒子の衝突によって、内部に圧力が発生し、粒状体の体積増加が見られることになるが、これは気体の圧力と同じ“熱力学”的作用である。ただし、通常の熱力学は分子運動のレベルを問題にするのに対して、ここでははるかに巨視的な“熱力学”を用いなければならない⁽⁵⁾。たとえば、粒子の不規則な運動の運動エネルギーは、平均流のみでは記述できないので、これを“内部エネルギー”と考えるべきである。以下、著者らは熱力学の用語を用いるが、通常の分子運動のレベルと異なることを強調するのに“ ”を用いよう。著者らはまず、“内部エネルギー”まで含めたエネルギー関係式を導き、その“熱力学”的構造を明らかにする。次に、“局所平衡状態”の概念を導入し、微視的な衝突モデルによって、圧力を与える“状

態方程式”を導く。そして、エネルギーの散逸を統計的手法によって計算し、散逸応力を定め方程式系を完結する。例題として、斜面上の流れを調べ、粒子の衝突に起因する体積増加の様子を考察する。最後に、“非平衡”な流れの法則を調べ、“エントロピ”が自然に定義できて、“熱力学第二法則”を導くことを示す。

2. 粒状体の熱力学

粒状体中の粒子 P の速度を $v^i(P)$ 、回転速度を $\omega_{ji}(P)$ (反対称テンソル) とすれば、これらは

$$v^i(P) = v^i + v^{i'}(P), \quad \omega_{ji}(P) = \omega_{ji} + \omega_{ji}'(P) \dots\dots\dots (1)$$

と分解できる。ここで、 v^i, ω_{ji} はこの粒子を含む適当な近傍での平均であり、連続変数とみなされるものである。 $v^{i'}(P), \omega_{ji}'(P)$ は不規則な変動成分である。粒子 P の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} m \{v^i + v^{i'}(P)\} \{v^i + v^{i'}(P)\} + \frac{1}{10} m a^2 \{\omega_{ji} + \omega_{ji}'(P)\} \{\omega_{ji} + \omega_{ji}'(P)\} \dots\dots\dots (2)$$

である。前報と同様、粒子は半径 a 、質量 m の剛体球とした。以下、座標系はデカルト座標とし、指標の総和規約などのテンソル記法を用いる。式 (2) をこの粒子の近傍にわたって平均し、単位体積当たり直せば

$$\frac{1}{2} \rho v^i v^i + \frac{1}{10} \rho a^2 \omega_{ji} \omega_{ji} - \frac{1}{2} \rho \overline{v^{i'} v^{i'}} + \frac{1}{10} \rho a^2 \overline{\omega_{ji}' \omega_{ji}'} \dots\dots\dots (3)$$

となる。ただし、平均を $\overline{\quad}$ で表した。最初の 2 項が連続理論の立場から見た運動エネルギーであり、後の 2 項が“内部エネルギー”とみなすべきものである。これは平均量であるから連続変数とみなしてよい。そこで、“内部エネルギー”密度 ϵ を次のように定義する。

$$\epsilon = \frac{1}{2} \overline{v^{i'} v^{i'}} + \frac{1}{10} a^2 \overline{\omega_{ji}' \omega_{ji}'} \dots\dots\dots (4)$$

ところで、 $\overline{m v^i(P)} = m v^i, \overline{(2/5) m a^2 \omega_{ji}(P)} = (2/5) m a^2 \omega_{ji}$ であるから、“内部運動量”, “内部角運動量”は存在しない。したがって、以下の質量保存則、運動

* 昭和 53 年 7 月 21 日 東海支部津地方講演会において論文講演として講演, 原稿受付 昭和 53 年 2 月 23 日。
** 正員, 群馬大学工学部 (☎ 376 桐生市天神町 1-5-1)。

量保存則, 角運動保存則は“熱”的效果に関係しない.

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{d}{dt} \int \rho v^i dV = \int \rho b^i dV + \oint \sigma^{ij} n_j dS \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{d}{dt} \int \left\{ 2\rho r^{[j} v^{i]} + \frac{2}{5} \rho a^2 \omega^{ji} \right\} dV = \int 2\rho r^{[j} b^{i]} dV + \oint \left\{ 2r^{[j} \sigma^{i]k} n_k + \mu^{kj} n_k \right\} dS \dots\dots\dots (7)$$

ただし, b^i は体積力であり, σ^{ij} は応力, μ^{kj} は面を通して ω_{ji} を変化させようとするカップル応力である. 指標の対称化, 反対称化にはそれぞれ (), [] を用いる. n_k は表面の単位法線ベクトルである. ガウスの定理により, 次の連続方程式, 運動方程式, 角運動方程式を得る.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \partial_k v^k = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \partial_j \sigma^{ji} + \rho b^i \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{2}{5} \rho a^2 \frac{d\omega^{ji}}{dt} = \partial_k \mu^{kj} + 2\sigma^{[ji]} \dots\dots\dots (10)$$

次にエネルギー保存則を考える. 粒子は衝突や摩擦により運動エネルギーを失う. これは熱に変わって粒子の温度を高めるのであるが, ここではそれを“内部エネルギー”とみなさないのであるから, これは粒状体内での“吸熱” $-Q$ と考えなければならない. すなわち, 真の熱は増加しても, 著者らの“熱”(=粒子の不規則な運動)は減少する. したがって, エネルギー保存則は

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{d'W}{dt} + \frac{d'Q}{dt} \dots\dots\dots (11)$$

と表せる. ただし

$$\left. \begin{aligned} K &= \int \left(\frac{1}{2} \rho v^i v^i + \frac{1}{10} \rho a^2 \omega_{ji} \omega_{ji} \right) dV, \quad U = \int \rho \varepsilon dV \\ \frac{d'W}{dt} &= \int b^i v_i dV + \oint \left(\sigma^{ij} n_j v_i + \frac{1}{2} \mu^{kj} n_k \omega_{ji} \right) dS \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

である. 単位体積中の“発熱”を q としよう. すなわち, 衝突, 摩擦によって失われるエネルギーが $-q$ である. この伝ばを表す“熱流”(=不規則な運動の拡散)を h^i とすれば $d'Q/dt$ は次のように表せる.

$$\frac{d'Q}{dt} = \int q dV - \oint h^i n_i dS \dots\dots\dots (13)$$

式 (12), (13) を式 (11) へ代入し, ガウスの定理を用いれば次のエネルギー方程式を得る.

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} - q + \partial_i h_i = \sigma^{ij} \partial_j v_i - \sigma^{[ji]} \omega_{ji} + \frac{1}{2} \mu^{kj} \partial_k \omega_{ji} \dots\dots\dots (14)$$

したがって, 粒子間の微視的な考察により, σ^{ij} , μ^{kj} , q , h^i を ρ , v^i , ω_{ji} , ε によって表現できれば式 (8)~(10), (14) がそれぞれ ρ , v^i , ω_{ji} , ε の発展方程式を与えて, 系の挙動は完全に記述される⁽⁴⁾. しかし, それを追求することは極めて複雑であると同時に, 著者らの関心に対して過剰な情報を与えるものである. たとえば, 粒状体が静止していても ($v^i=0$, $\omega_{ji}=0$) 静止に至るまでの履歴によって, 内部の不規則な運動が存在することになる. しかし, そのような運動はすみやかに減衰してしまうであろう. ここに“平衡”の概念が必要となる. 粒状体が運動していても, その運動状態がある程度持続すれば, 内部の乱れは発達して, 巨視的な流れに適合するある“平衡”状態となるであろう. 著者らの関心は微細な過渡的变化

ではなく, このような平衡状態である. そこで, 内部エネルギー ε が, 各点で平均流によって $\varepsilon(v_i, \omega_{ji}, \partial_j v_i, \partial_k \omega_{ji}, \dots)$ と表されて, 運動の履歴によらない場合を“局所平衡状態”とよぼう. このとき, 式 (14) の右辺の, 応力のする仕事は, 内部エネルギーに寄与する部分と, 散逸仕事の部分 \emptyset とにわけられる. 前者は粒子の衝突によって生じる圧力のする仕事であり, 後者は粒子の回転やせん断で生じる摩擦力のする仕事である. したがって, 局所平衡状態では, 熱流 h^i は存在しないとすれば, 式 (14) は次のように分割できる.

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \partial_k v^k, \quad -q = \emptyset \dots\dots\dots (15)$$

ただし

$$\emptyset \equiv \sigma^{ij} E_{ji} - \sigma^{[ji]} \omega_{ji} + \frac{1}{2} \mu^{kj} \partial_k \omega_{ji} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}^{ij} &= \sigma^{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma^{kk} \\ E_{ji} &= \partial_{[j} v_{i]} - \frac{1}{3} \delta_{ji} \partial_k v^k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

3. 粒状体の状態方程式と構成方程式

粒状体中の適当な近傍の体積をその中の粒子数で割った V は 1 粒子当たりの体積である。これを占有体積とよぼう。 $V = m/\rho$ である。これを球状と考えた場合の半径 r を占有半径とよべば $r = (3V/4\pi)^{1/3} = (3m/4\pi\rho)^{1/3}$ である。粒子の不規則な運動のモデルとして、局所平衡状態では粒子は図 1 のように、半径 r の球状の穴の中を、平均ランダム速度 v' で運動して、反射を繰返しているとする⁽⁴⁾。充てん状態での占有半径を r_0 とすれば、粒子が衝突せずに動きうる距離は $2(r-r_0)$ である。したがって、単位時間当たり、平均 $v'/2(r-r_0)$ 回衝突する。1 回の衝突で壁に与えられる運動量は $2mv'$ であるから、単位時間当たり $mv'^2/(r-r_0)$ の力が加わる。壁の面積は $4\pi r^2$ であるから、圧力 p は $mv'^2/4\pi r^2(r-r_0)$ である。密度 ρ を用いて表せば $v'^2/3(\rho^{-1} - \rho^{-2/3}\rho_0^{-1/3})$ である。ただし、 ρ_0 は充てん状態の密度である。 $\rho \approx \rho_0$ のときは、分子、分母に $\rho\rho_0$ をかけ、展開 $\rho_0 - \rho^{1/3}\rho_0^{2/3} = (\rho_0 - \rho)/3 + (\rho - \rho_0)^2/9\rho_0 + \dots$ を用いると次のように近似できる。

$$p = \frac{\rho\rho_0 v'^2}{\rho_0 - \rho} \dots\dots\dots (18)$$

$$\hat{\omega} = \sqrt{\frac{3}{10} E_{ji} E_{ji} + \frac{1}{2} R_{ji} R_{ji} + \frac{a^2}{10} (\Omega_{kkj} \Omega_{ljj} + \Omega_{kjl} \Omega_{kji} + \Omega_{kji} \Omega_{kjj})} \dots\dots\dots (23)$$

となる。ただし

$$R_{ji} = \omega_{ji} - \partial_{[j} v_{i]} \dots\dots\dots (24)$$

とおいた。特に速度場がなく ($v_i = 0$)、回転が一様 ($\partial_k \omega_{ji} = 0$) であれば $\hat{\omega} = \sqrt{(1/2) \omega_{ji} \omega_{ji}}$ となるのであるから、 $\hat{\omega}$ は速度場に独立な回転の大きさを表しているといえる。一方、回転が速度場に從属して ($\omega_{ji} = \partial_{[j} v_{i]}$)、回転が一様であれば $\hat{\omega} = \sqrt{(3/10) E_{ji} E_{ji}}$ となり、図 3 に見るように、せん断による粒子間の接触の量を示している。したがって、 $\hat{\omega}$ は粒子の回転とせん断との両方を考慮した、粒子同士の相互作用を表すものといえる。式 (21)~(23) より

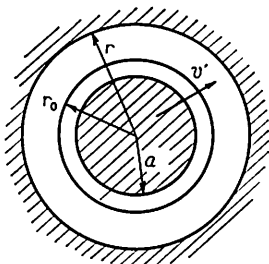


図 1 粒子の衝突モデル

次に摩擦による散逸を考える。粒子の運動の変動成分は v_i' と ω_{ji}' であり、前者は粒子間の衝突の要因となって圧力を生じ、後者は摩擦損失に関係するものであるが、前報で調べたように、粒子の回転はすみやかに場の回転に從属しようとするのであるから、局所平衡状態では ω_{ji}' は無視できるであろう。したがって、図 2 のように回転 2 粒子が接触していれば、接触点での相対速度の接線成分 ξ_i は次のようになる。

$$\xi_i = 2a(n_j F_{ji} - n_k n_j n_i F_{kj} - a n_i n_j \Omega_{kji}) \dots\dots (19)$$

ただし、

$$F_{ji} = \partial_j v_i - \omega_{ji}, \quad \Omega_{kji} = \partial_k \omega_{ji} \dots\dots\dots (20)$$

とおいた。接触の方向 n_k はまったくランダムであると考えられるので、接触の大きさを $\xi = \sqrt{\xi_i \xi_i}$ で定義する。ひとつの粒子の平均接触点数を n とすれば、接触点での圧縮力は $4\pi r^2 p/n$ である。動摩擦係数を μ とすれば、摩擦力は $4\pi r^2 p \mu/n$ であり、単位時間当たりの散逸仕事は $4\pi \mu r^2 p \xi/n$ である。1 粒子当たりはこの $n/2$ 倍で、単位体積中では ρ/m 倍となるので、単位体積中の単位時間当たりの散逸仕事 Φ は次のようにおける。

$$\Phi = \frac{2\pi \mu r^2 \rho}{m} \xi \dots\dots\dots (21)$$

式 (19) を用いて平均を計算すれば、前報で示したように

$$\overline{\xi_j \xi_j} = \frac{8}{3} a^2 \hat{\omega}^2 \dots\dots\dots (22)$$

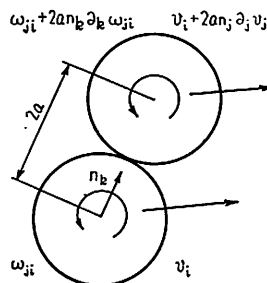


図 2 粒子の接触モデル

$$\Phi = \frac{4\sqrt{6}\pi}{3} \frac{\mu r^2 a \rho}{m} \rho \dot{\omega} \dots\dots\dots(25)$$

最後に“内部エネルギー” ϵ を考察しよう。これは粒子の不規則な運動の大きさであるが、これが平均速度 v' にはよらないことは、速度 v' で並進する座標系からみれば粒状体が静止していることと、局所平衡の定義より明らかである。したがって、不規則な運動は粒子の回転や、せん断によると考えられるが、粒子の回転やせん断による粒子間の相互作用を表すものが $\dot{\omega}$ であるから、 ϵ は $\dot{\omega}$ によると考えるのが妥当である。すると、特に速度場がなく($v_i=0$)、回転が一樣($\partial_k \omega_{ji}=0$)の場合には ϵ は粒子の回転にのみよることになる。このとき、粒子の回転運動エネルギーは $(1/10)m a^2 \omega_{ji} \omega_{ji}$ であり、不規則な運動の運動エネルギーは $(1/2) m v'^2$ である。局所平衡状態では両者の比は一定であると考えて、その比を T_e とおけば、“内部エネルギー” $\epsilon=(1/2)v'^2$ は $(1/10)T_e a^2 \omega_{ji} \omega_{ji}$ となる。

速度場の存在するときは $(1/2)\omega_{ji}\omega_{ji}$ を $\dot{\omega}^2$ でおきかえて

$$\epsilon = \frac{1}{5} T_e a^2 \dot{\omega}^2 \dots\dots\dots(26)$$

を得る。 T_e は反発係数 e と動摩擦係数 μ とによって定まる定数である。式(26)より変動速度 v' は

$$v' = \frac{\sqrt{10}}{5} \sqrt{T_e} a \dot{\omega} \dots\dots\dots(27)$$

となる。式(18)と(25)に代入して、次の“状態方程式”と“散逸関数”を得る。

$$p = \frac{2}{5} T_e a^2 \frac{\rho_0 \rho}{\rho_0 - \rho} \dot{\omega}^2 \dots\dots\dots(28)$$

$$\Phi = \frac{8\sqrt{6}\pi}{15} \frac{T_e \mu r^2 a^3}{m} \frac{\rho_0 \rho^2}{\rho_0 - \rho} \dot{\omega}^3 \dots\dots\dots(29)$$

散逸関数 Φ は E_{ji} , R_{ji} , Q_{kji} の三次同次式であるから、前報の定義により散逸次数は2である。 Φ の定義式(16)と比較して、オイラー分解を用いれば、等価応力が次のように定まり、方程式系が完結する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{(j)} &= \frac{3}{10} C(\rho) \dot{\omega} \left\{ \partial_{(j} v_{i)} - \frac{1}{3} \delta_{ji} \partial_k v^k \right\}, & \sigma^{[ji]} &= \frac{1}{2} C(\rho) \dot{\omega} \{ \partial_{(j} v_{i)} - \omega_{ji} \} \\ \mu^{kj} &= \frac{1}{5} a^2 C(\rho) \dot{\omega} \{ \partial_k \partial_{(j} \omega_{i)} + \partial_k \omega_{ji} + \partial_{(j} \omega_{i)k} \}, \\ C(\rho) &\equiv \frac{8\sqrt{6}\pi}{15} \frac{T_e \mu r^2 a^3}{m} \frac{\rho_0 \rho^2}{\rho_0 - \rho} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

$$C(\rho) \equiv \frac{8\sqrt{6}\pi}{15} \frac{T_e \mu r^2 a^3}{m} \frac{\rho_0 \rho^2}{\rho_0 - \rho} \dots\dots\dots(31)$$

4. 斜面上の流れ

図4のような斜面上の流れを考える。方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \frac{\partial v}{\partial y}, & \frac{du}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{yy}}{\partial y} + g \sin \theta \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{yy}}{\partial y} - g \cos \theta, & \frac{d\omega}{dt} &= \frac{5}{2\rho a^2} \left\{ \frac{\partial \mu^{yy}}{\partial y} + 2\sigma^{[xy]} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{yy} &= C(\rho) \dot{\omega} \left(\frac{2}{5} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \omega \right), & \sigma^{xy} &= \frac{1}{5} C(\rho) \dot{\omega} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{15} T_e a^2 \dot{\omega}^2 \frac{\rho_0 \rho}{\rho_0 - \rho} \\ \sigma^{[xy]} &= -\frac{1}{2} C(\rho) \dot{\omega} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \right), & \mu^{yy} &= \frac{1}{10} a^2 C(\rho) \dot{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

$$\dot{\omega} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \right)^2 + \frac{3}{20} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{2}{5} a^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2} \dots\dots\dots(34)$$

たとえば、特に厚さ一定の流れ、すなわち $v=0$ ならしめる流れを考えてみよう。流れとして、回転が速度場に従属するせん断流

$$u = Uy, \quad \omega = -\frac{1}{2} U \dots\dots\dots(35)$$

を仮定すると式(32)の第2式と式(33)の第2式より $\rho(y)$ が積分できる。積分定数は、静止状態の高さ h_0 を用いて

$$\int_0^\infty \rho dy = \rho_0 h_0 \dots\dots\dots(36)$$

より定めることができる。結果は陰関数として、次のように求まる。

$$y/h_0 = 1 + \frac{3 T_e a^2 U^2}{50 g h_0 \cos \theta} \left\{ 1 - \log \left(\frac{3 T_e a^2 U^2}{50 g h_0 \cos \theta} \frac{\rho/\rho_0}{1 - \rho/\rho_0} \right) - \frac{1}{1 - \rho/\rho_0} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

図5はこれをプロットしたものであるが、せん断速度が大きくなるにつれて、粒状体の上層部が次第にもちあげ

られるのがよくわかる。これは平均流のせん断仕事、粒状体の内部エネルギーに転化して起きる“熱力学”的現象である。また、このような現象より、定数 T_e が実験的に決定できることになる。図 6 は質量輸送量 ρu をプロットしたものであるが、最大の質量輸送は自由表面より下で起きている。Goodman ら⁽⁶⁾も、彼らの理論によって同様の結果を発表している。彼らは、応力が自由エネルギーより導かれると仮定し、自由エネルギーは未知として、その展開形の係数のとり方によっては図 6 のような結果となると主張しているのであるが、著者らは、粒子間の相互作用の微視的考察と、統計的手法により、これを“熱力学的”に導いたものである。

5. 非平衡の流れとエントロピ

局所平衡状態でない場合、流れはどうなるであろうか。これまでの議論をふりかえてみれば、式 (26) における T_e を定数と考えず、独立な物理量 T と考えればよいことがすぐわかる。 T の意味を考えるには、“状態方程式”式 (28) を密度 ρ でなく占有体積 V で表してみるとよい。すると

$$p(V - V_0) = \frac{2}{15} T m a^2 \bar{\omega}^2 \dots\dots\dots(38)$$

であるから、理想気体の状態方程式との比較で考えれば、 T が“温度”の役割を果たしていることがわかる。すなわち、 T は不規則な内部運動の指標と考えら

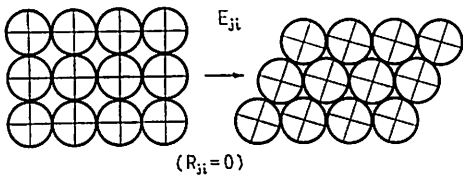


図 3 せん断における粒子の接触

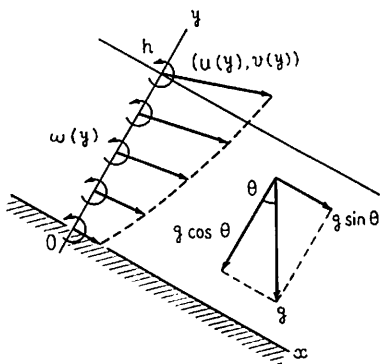


図 4 粒状体の斜面上の流れ

れる。図 5 は“温度”上昇に伴う流れの膨張を表しているともみることできる。ところで、式 (14) は任意の非平衡な流れで成立するが、 $d\varepsilon/dt$ を

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d_c \varepsilon}{dt} + \frac{d_* \varepsilon}{dt}, \quad \rho \frac{d_c \varepsilon}{dt} = -p \partial_k v^k \dots\dots(39)$$

と分解すると、式 (15) のかわりに次の関係を得る。

$$\rho \frac{d_* \varepsilon}{dt} = \vartheta + q - \partial_i h^i \dots\dots\dots(40)$$

定義により、局所平衡状態では $d_* \varepsilon/dt = 0$ であり、また、 $T < T_e$ なら $d_* \varepsilon/dt > 0$ 、 $T > T_e$ なら $d_* \varepsilon/dt < 0$ であるから

$$\frac{1}{T - T_e} \frac{d_* \varepsilon}{dt} < 0 \dots\dots\dots(41)$$

である。また、 h^i は T の大きいところから小さいところへ向かうから

$$h^i \partial_i (T - T_e) < 0 \dots\dots\dots(42)$$

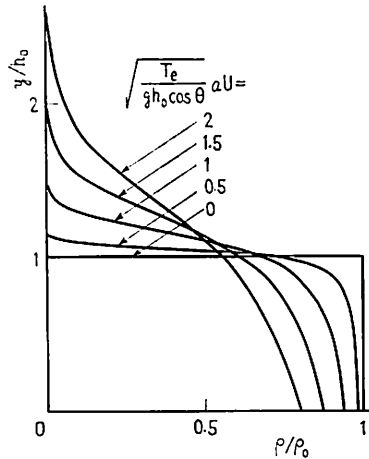


図 5 流れの密度分布

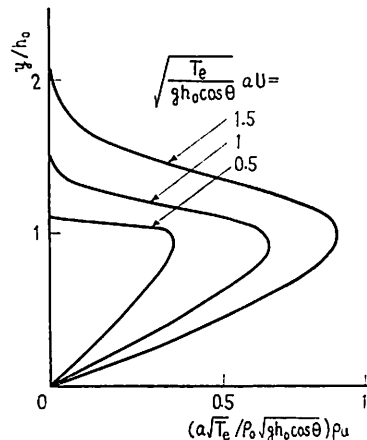


図 6 質量輸送量の分布

である。ところで、式(41)、(42)より、“エントロピ” s なる量が定義できて、“熱力学第二定理”，すなわち，“エントロピ生成は正である”を導くことができるのである。これを証明しよう。

〔定義〕 単位質量中のエントロピ s を、発展方程式

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{\Phi}{T-T_c} \dots\dots\dots(43)$$

によって定義する。これにより、付加定数を除いて、一意的に定まる。

〔定理〕 (“熱力学第二定理”)

発熱 q によってエントロピは $q/(T-T_c)$ だけ生成され、熱流 h^i によって $h^i/(T-T_c)$ だけエントロピが流れるとすれば、純粋なエントロピ生成速度 η は $\eta \geq 0$(44)

である。等号が成立するのは局所平衡状態の場合である。

〔証明〕 エントロピのバランスは仮定により

$$\frac{d}{dt} \int \rho s dV = \int \eta dV + \int \frac{q}{T-T_c} dV - \oint \frac{h^i}{T-T_c} n_i dS \dots\dots\dots(45)$$

である。あるいは、これが“エントロピ生成速度” η の定義ともいえる。ガウスの定理により

$$\eta = \rho \frac{ds}{dt} - \frac{q - \partial_i h^i}{T-T_c} - \frac{h_i}{(T-T_c)^2} \partial_i (T-T_c) \dots\dots\dots(46)$$

であるが、式(40)、(43)を代入すれば

$$\eta = -\frac{\rho}{T-T_c} \frac{d_* \epsilon}{dt} - \frac{h^i}{(T-T_c)^2} \partial_i (T-T_c) \dots\dots\dots(47)$$

であり、式(41)、(42)より定理を得る(証明おわり)。

著者らの結果は、通常の熱力学と、温度が $T-T_c$ に置きかわっている点を除けば、まったく同一の形式であることは非常に興味深い。この結果によれば、局

所平衡状態は“断熱的”流れともよべることになる。このような“熱力学”的構造は、粒状体のような、内部に乱れを含む連続体の記述に非常に有効であるといえるであろう。

6. ま と め

前報の理論を発展させて、速度と回転速度を自由度とする粒状体の、内部に乱れのある流れの法則を導いた。まず、粒子の不規則な運動を“内部エネルギー”と考え、コッセラ理論による運動方程式とともに“熱力学”的エネルギー関係式を導き、“局所平衡状態”の概念の導入により、粒状体の“状態方程式”と“散逸関数”を計算した。これには、粒子間の衝突と摩擦との微視的考察と、その統計的平均をとるという統計学的手法を用いた。そして、結果を斜面上の流れに適用し、代表的な“熱力学”的現象である、粒状体の流れの膨張がみられることを示した。最後に非平衡な流れの法則を調べ、“エントロピ”と“エントロピ生成速度”とが定義できて、“熱力学第2法則”の成立することを証明した。種々の具体的な粒状体の流れを扱うには、さらに多くの要因を考慮して、理論を修正していく必要があると思われるが、本理論をそのための出発点としたい。また、本研究をまとめるにあたってご指導いただいた東京大学教授 大島信徳先生に深く感謝したいと思います。

文 献

- (1) 金谷, 本論文集 507 ページ.
- (2) 大島, 材料科学, 9-5/6 (昭 47-12), 294.
- (3) Eringen, A.C. 編, *Continuum Physics*, IV, (1976), Academic Press.
- (4) 大島・小川, 機講論, No.760-15 (昭 51-10), 89.
- (5) Oshima, N, *Theor. Appl. Mech.*, 25 (1977), 339.
- (6) Goodman, M.A. and Cowin, S.C., *J. Fluid Mech.*, 45 (1971), 321.

討 論

〔質問〕 橋 口 公 一 (九州大学農学部)

粒状体は変形速度が速い場合には流体的に、また遅い場合には固体的に挙動するが、前者について独特の興味深い理論を組み立てられ、かつ具体的な構成式を示された点に敬意を表す。

(1) “内部エネルギー”の定義式として式(15)、(26)を仮定しておられるが、このように仮定された根拠、とくにその微視的要因は何か。なお、一般に体積変化も散逸仕事を伴うと思われる。また、理想気体の状態

方程式との類似関係に立つとすれば、式(38)の右辺は C, T または $C_2 \omega^2$ ($C, \text{および } C_2$ は定数)となるのではないか。

(2) “エントロピ”, さらにはその生成速度の定義を行っておられるが、これらの具体的な適用としてどのような現象が考えられるか。

(3) 引用しておられる Goodman-Cowin⁽⁶⁾は動のみならず静的状態をも対象とした構成式を与えているが、導出された理論は「発達した流れ」の場合に

限られるもので、その場合について、マイクロポーラ流体としての具体的な構成式を示されたと考えてよい。

【回答】(1) 本理論では、粒子間の衝突により“内部エネルギー”が貯えられ、摩擦によって散逸が起こると考えている。ご指摘のとおり、衝突が非弾性であれば、体積変化も散逸仕事をするはずであるが、これを詳細に調べるには“平衡”を維持させている多体粒子間の相互作用を知る必要があり、事実上不可能であるから、体積粘性に相当するものを無視した。これは、急激な体積変化を考えないということで、実際上さしつかえないと思われる。

式(38)の右辺は“内部エネルギー”に相当するものであるが、これを $C_1 T$ または $C_2 \omega^2$ とおけば、 C_1 、 C_2 はいずれも次元をもった物理量となる。著者の立場は物理量の微視的解明をめざすものであり、基本的な量として、 a 、 m 、 ω で特徴づけられる流れを考えている。そこで C_1 、 C_2 を次元解析すれば、結局式(38)の形となり、 T は粒子の摩擦係数、反発係数および流れの状態による無次元のパラメータとなる。 T の意味として、たとえば粉体の振動輸送を考えれば、ギブスの熱力学にある外部恒温 そうにより、外から“温度” T が高水準に保たれていると解釈している。

(2) 粒状体の流れの中の乱れの程度を表すものとしてのエントロピが存在するという考えは以前からあった⁽²⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾。しかし、具体的に表示したものはなかった。ここでエントロピは平衡からのずれを記述するものとして、具体的に表示したものであり、これまでのものと多少概念が異なっている。これを用いれば、乱れの変動の記述に役立つと思われる。ただ、非平衡状態では $d_* \varepsilon / dt$ 、 h' の満たす方程式を与えなければ方程式系は完結しない。オンサーガ流の非平衡熱力学にならって

$$\rho \frac{d_* \varepsilon}{dt} = -\lambda(T - T_c)^2$$

$$h' = -\kappa(T - T_c) \partial_i (T - T_c), \quad \lambda > 0, \quad \kappa > 0$$

とすれば、式(47)より $\eta \geq 0$ が自動的に満たされ、等号は $T = T_c$ のときのみ成立し、方程式系は完結する。熱力学では、このような方程式を「現象論的方程式」と称しているが、著者の立場からは λ 、 κ の微視的意味づけが必要となる。この点がいわゆる有理解と異なる点である。しかし、これは困難な問題であり、今後の課題である。

(3) ご指摘のとおりである。なお、粒状体の流れを、前報の「非圧縮性の流れ」と本報の「発達した流れ」とにわけたのは、これらが、内部の力学法則とと

もに、現象的にもはっきり異なるためである。このことは実験により古くから知られており(付1)~(付6)、2種類の流れは、A状態-B状態(付1)流体状流れ-気体状流れ(付2)回転すべり流れ-はね返り流れ(付3)、転動流-躍動流(付4)などと区別されて呼ばれている。本理論はこの事実を連続体力学の立場より理論づけたものである。

【質問】 上 滝 具 貞 (九州工業大学)

(1) 一般の粒体のように粒径分布がある場合、状態方程式と構成方程式の導出モデルはどのように変わるか。

(2) 分子運動に比してはるかに巨視的な粒状体の不規則運動を取扱うわけだから、平均運動が定常になったとしても、それを現定する個々の粒子の運動には履歴を考える必要はないか。

【回答】(1) 著者の立場は微視的な考察により方程式系を導出しようとするものであり、このための理想化が必然となる。一般の場合は、理想的な場合の結果の補正という方法によらざるを得ない。粒径分布を直接考えるとすれば、粒径 a が一定の場合の結果に、粒径の統計的分布 $f(a)$ をかけて平均することが考えられる。すなわち、粒径分布をアンサンブルと考えるわけであるが、この場合は(アンサンブル平均)=(体積平均)というエルゴート性は成立しなくなる。

(2) ここでは、巨視的に定常な流れがあれば、乱れはすみやかに発達して、平衡状態となると考えている。もし厳密に履歴を考えれば、状態方程式は存在せず、理論的困難が起こるだけでなく、実験の技術上も困難が生じると思われる。ただ、平衡状態からのずれとしての変動はエントロピを用いて記述できると思われるが、現在の段階ではそこまで至っていない。

【質問】 棚 橋 隆 彦 (慶応義塾大学工学部)

(1) 運動方程式の対流加速度項 $\rho v_i \partial_i v_j$ を平均すると、レイノルズ応力に対応する“内部運動量”は生じないか。

(2) 式(7)の左辺第2項の係数 $(2/5)a^2$ は、粒子の相互作用がない場合には、このように書けると思うが、本理論の場合のように、粒子どうしの相互作用が強い場合にも適用可能か。

(3) 3章で述べられた構成方程式の作り方はニュートン流体の構成方程式を作る場合に適用可能か。

(付1) 高橋, 気象集誌, 2-14-11 (昭 11), 566.

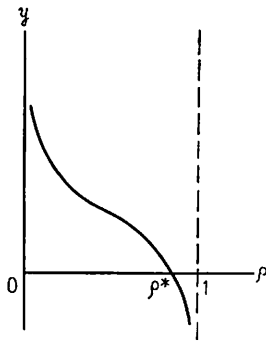
(付2) 林・ほか2名, 応用物理, 6-11 (昭 12), 507.

(付3) 大山, 理研彙報, 19-8 (昭 15), 1052.

(付4) 庄司, 農業機械学会誌, 11-4 (昭 22), 134.

(付5) 小野, 応用物理, 36-5 (昭 42), 347.

(付6) 湯浅, 機誌, 71-589 (昭 43-2), 191.



付図 1

〔回答〕 (1) 式(1)の $v''(P)$, $\omega_{ji}'(P)$ は連続変数ではないので微分できず、レイノルズ応力は存在しない。 $v''(P)$, $\omega_{ji}'(P)$ による運動量の交換は σ^{ij} , μ^{kji} に包括されている。元来、レイノルズ応力とは、流体の真の応力(=分子熱運動)以外の、流れの乱れによる平均的運動量交換を考慮したみかけの応力だが、粒状体では、「真の応力」というものはなく、粒子のランダムな運動による運動量交換自体を「圧力」と考えているため、それ以外の応力は生じない。具体的にいえば、式(6),(7)の積分領域は、平均流によって定義されているからである。これは、このように内部の仮想面と考えたとき右辺によって巨視的「応力」が定義されるからである。そして、左辺の被積分項は v_i , ω_{ji} に関して線形であり、平均をとれば乱れの影響は消える。この議論は気体の分子運動論と全く同一である。

(2) 式(7)は純粋に運動学的な表現であり、粒子が回転速度 ω_{ji} で回転しているとすれば、その角運動量は $(2/5)\rho a^2 \omega_{ji}$ になるということの意味している。粒子間の相互作用により、実際に ω_{ji} がどのように定まるかは、微視的に考察した構成式によって定められるべき問題である。

(3) 前報で述べたように、本理論の方法は線形理論の自然な拡張になっており、ニュートン流体の場合を完全に含んでいる。また、非ニュートン流体の等価粘性係数も、散逸関数の分解によって得られるもので、ニュートン流体、非ニュートン流体を問わず、この方法により正しい構成式が得られる。

〔質問〕 湯浅泰伸(足利工業大学)

本研究は単位質量中の粒状体のエントロピを式(43)

のように熱力学的に表された点で有意義と考えられる。

(1) 粒状体の状態方程式と構成方程式を誘導するに当たり図1および2のようなモデルを考え、回転が速度場に從属して($\omega_{ji} = \partial_{[j} v_{i]}$), 回転が一様の時 $\hat{\omega} = \sqrt{(3/10) E_{ji} E_{ji}}$ になることを示していただきたい。

(2) 式(36)から(37)の誘導法を説明されたい。

〔回答〕 (1) 回転が速度場に從属しているときは式(24)の定義より $R_{ji} = 0$ であり、回転が一様であれば式(20)の定義より $\Omega_{kji} = 0$ となる。ゆえに、式(23)より $\hat{\omega} = \sqrt{(3/10) E_{ji} E_{ji}}$ を得る。これは、図3に示されるように、場のせん断に対して必然的に生じる粒子間の接触量の最小値を与えていると考えることができる。

(2) まず、 $\rho_0 = 1$, $h_0 = 1$, $g = 1$ とする自然単位系をとる。式(35)と $v = 0$ とを式(33)の第2式に代入すると

$$\sigma^{yy} = -\frac{3T_e a^2 U^2}{50} \frac{\rho}{1-\rho}$$

となる。これを式(32)の第3式で $v = 0$ としたものへ代入すれば

$$\frac{d\rho}{dy} = -\frac{1}{A} \rho(1-\rho)^2, \quad A = \frac{3T_e a^2 U^2}{50 \cos \theta}$$

を得る。これを積分すると、積分定数を C として

$$y = C - A \left(\log \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{1-\rho} \right)$$

となる。 $y = 0$ のときの ρ の値を ρ^* とおけば

$$C = A \left(\log \frac{\rho^*}{1-\rho^*} + \frac{1}{1-\rho^*} \right) \dots\dots\dots (i)$$

一方、条件式(36)は変数変換により

$$\int_0^{\rho^*} y d\rho = 1$$

となるので(付図1参照), 代入して

$$C = \frac{1}{\rho^*} + A \log \frac{\rho^*}{1-\rho^*} \dots\dots\dots (ii)$$

式(i), (ii)より

$$C = 1 + A(1 - \log A)$$

となり、解は

$$y = 1 + A \left(1 - \log \frac{A\rho}{1-\rho} - \frac{1}{1-\rho} \right)$$

となる。これを、もとの単位系にもどしたものが式(37)である。