

平均エネルギーの合成による振動解析とラーメンへの応用\*

金 谷 健 一\*\*

1. ま え が き

大規模な力学系をいくつかの部分系に分割して解析する方法は古くから研究されてきた。力学系は等価な電気回路に置換できるが、これを分割して解析する手法を Kron<sup>(1)</sup> はダイアコプティクスとよんだ。これはのちに位相幾何学やグラフ理論の立場から発展したが<sup>(2)(3)</sup>、本質的には連立一次方程式系の組織的解法であるといえる。機械振動系に直結したものでは、部分系の機械インピーダンスの知識より、全体系の特性を知る方法が研究されている<sup>(4)</sup>。しかし、このような手法を用いても、系の自由度が多くなると取扱いが複雑になることが予想される。これに対し、本報で用いる手法は、部分系の知識をもとにして、全体系ではなく、自由度のより少ない巨視系の特性を与えるものであり、部分要素の極めて大きい系に対して有効であると思われる。

一般に大規模な力学系はその構造が階層的であり、2段階に分けてはあくすることができる。すなわち、巨視的にみれば簡単な、少自由度の系であるが、微視的にみれば、巨視的には一自由度をもつとみなされた要素が、内部構造をもち多くの自由度を含んでいると考えられる。そして、外力は巨視的要素に加えられ、内部構造に振動が励起されるのが普通である。このような場合、われわれの知りたいのは巨視的な振動であって、微視的自由度の振動には興味がない場合が多い。このとき、もちろん微視的自由度を無視すれば近似解は得られるが、内部構造の振動の巨視的振動に及ぼす影響を知ることはできない。それを知るにはすべての自由度についての、すなわち全体系についての方程式を解けばよいが、自由度の多いときは扱いが複雑になる。それより、はじめからわれわれの着目する巨視変数についての方程式が得られることが望ましい。さらに、固有振動数を求める場合にも、一般に固有振動数は全体系の自由度の数だけ存在するが、われわれのほしいのは着目する巨視的自由度の振動モードに対応す

る固有振動数であることが多い。本報では各部分の平均振動エネルギーを計算し、変分法により巨視変数のみの方程式を導く手法を考察する。そして、巨視変数の振動モードに対する固有振動数のみを直接得る方法を調べる。最後に、これらの手法を用いて、ラーメンの振動を解析する。ラーメンの振動は通常、各はりの静的曲げ曲線を振動モードとして用いるが、それでは各はりの共振の巨視的な振動に与える影響を知ることはできない。しかし、前述の手法によればこれらは可能であり、衝撃の加わった場合などの高周波領域での振動などで重要な意味を持っていると思われる。

2. 平均エネルギーによる変分原理

線形力学系の自由度（一般座標）を  $x^j (j=1, \dots, n)$  としよう。系の運動エネルギー  $T$ 、ポテンシャルエネルギー  $V$ 、散逸関数  $F$  は次のような二次形式で表される。

$$T = \frac{1}{2} m_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j, \quad V = \frac{1}{2} k_{kj} x^k x^j, \quad F = \frac{1}{2} d_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j \dots\dots\dots(1)$$

ただし、テンソル添字の総和規約を用い、総和記号  $\Sigma$  は省略する。係数の  $m_{kj}$ 、 $k_{kj}$ 、 $d_{kj}$  はいずれも（半）正値対称な  $n \times n$  行列であり、それぞれ質量行列、剛性行列、減衰行列などと呼ばれているものである。自由度  $x^k$  に加えられた、散逸力以外の外力を  $Q_k$  とするとラグランジュの方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} + \frac{\partial V}{\partial x^k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} = Q_k \dots\dots\dots(2)$$

式（1）をこれに代入して、次の運動方程式を得る。

$$m_{kj} \ddot{x}^j + k_{kj} x^j + d_{kj} \dot{x}^j = Q_k \dots\dots\dots(3)$$

これを解析するには複素数表示を用いて  $x^j \propto e^{i\omega t}$  とするのが普通である。すると次の代数方程式を得る。

$$-\omega^2 m_{kj} x^j + k_{kj} x^j + i\omega d_{kj} x^j = Q_k \dots\dots\dots(4)$$

ところで、考えてみれば、われわれの求めるものが式（4）の複素数表示であるとしたら、式（2）、（3）を経過せず、直接式（1）に複素数表示を用いて式（4）を得ることが望ましい。式（1）は二次形式であり、そのまま複素数表示を用いることはできない

\* 昭和53年4月3日 第55期通常総会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和52年10月12日。  
\*\* 正員、東京大学工学部(〒113 東京都文京区本郷 7-3-1),

が、平均エネルギーを計算すれば複素数表示が有効に活用できる。一周期にわたる平均  $\langle 1/\tau \int_0^\tau dt \rangle$  を  $\langle \rangle$  で表そう。  $\tau=2\pi/\omega$  である。  $T, V, F$  を平均して

$$\left. \begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{\omega^2}{4} m_{kj} x^j \overline{x^k} \\ \langle V \rangle &= \frac{1}{4} k_{kj} x^j \overline{x^k} \\ \langle F \rangle &= \frac{\omega^2}{4} d_{j1} x^j \overline{x^k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

なるエルミート形式を得る。ただし  $\overline{x^k}$  は  $x^k$  の共役複素数である。これらより式(4)を得るには次の変分原理を適用すればよいことがわかる。

$$\frac{\partial S}{\partial \overline{x^k}} = \frac{1}{4} Q_k, \quad S \equiv -\langle T \rangle + \langle V \rangle + \frac{i}{\omega} \langle F \rangle \dots\dots\dots (6)$$

3. 巨視変数と微視変数における変分原理

まえがきで述べたように大きな力学系ではその自由度を巨視変数、あるいは外部変数  $X^a (a=1, \dots, N)$  と、微視変数、あるいは内部変数  $x^j (j=1, \dots, n)$  とに分けることができる。われわれが知りたいのは  $X^a$  についての挙動である。通常  $x^j$  はいくつかの互いにカップルしないグループに分けられる。それら各グループがそれぞれ各部分の内部構造であり、それらの微視的構造どうしが巨視変数を介して全体系をなしている(図1)。そして、通常、散逸力以外の外力は巨視変数に働いていると考えられる。これらの内部構造の特性はあらかじめ知られていると考えてよい。したがって、巨視変数  $X^a$  が  $e^{i\omega t}$  の形で振動しているとすれば  $x^j$  は容易に  $X^a$  について解くことができる。

$$x^j = x^j(X^1, \dots, X^N, \omega) \dots\dots\dots (7)$$

これを用いて、各部分ごとの平均運動エネルギー、平均ポテンシャルエネルギー、平均散逸関数を計算して、全体系について合成すれば次のような巨視変数のみで表されたエルミート形式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{\omega^2}{4} M_{ba}(\omega) X^a \overline{X^b} \\ \langle V \rangle &= \frac{1}{4} K_{ba}(\omega) X^a \overline{X^b} \\ \langle F \rangle &= \frac{\omega^2}{4} D_{ba}(\omega) X^a \overline{X^b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで特徴的なのは、巨視変数に関する質量、剛性、減衰の係数が振動数  $\omega$  に依存することである。これが

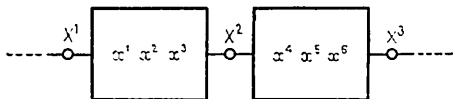


図1 巨視変数と微視変数

内部構造の巨視的振動へ与える影響の現れである。式(8)に変分原理式(6)を適用すれば次のような巨視変数のみで表された方程式を得る。

$$[-\omega^2 M_{ba}(\omega) + K_{ba}(\omega) + i\omega D_{ba}(\omega)] X^a = Q_b \dots\dots\dots (9)$$

この方程式において、 $M_{ba}(\omega), K_{ba}(\omega), D_{ba}(\omega)$  をそれぞれ  $M_{ba}(0), K_{ba}(0), D_{ba}(0)$  でおきかえたものは、内部構造の振動モードとして静特性を採用した近似となる。これを静特性近似とよぼう。この静特性近似が、通常の内部構造との相互作用を考慮しない解析法である。以上の議論の妥当性を証明しよう。

〔証明〕 全体系の  $\langle T \rangle, \langle V \rangle, \langle F \rangle$  は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{\omega^2}{4} (m_{kj} x^j \overline{x^k} + m_{ka} X^a \overline{x^k} \\ &\quad + m_{bj} x^j \overline{X^b} + m_{ba} X^a \overline{X^b}) \\ \langle V \rangle &= \frac{1}{4} (k_{kj} x^j \overline{x^k} + k_{ka} X^a \overline{x^k} \\ &\quad + k_{bj} x^j \overline{X^b} + k_{ba} X^a \overline{X^b}) \\ \langle F \rangle &= \frac{\omega^2}{4} (d_{kj} x^j \overline{x^k} + d_{ka} X^a \overline{x^k} \\ &\quad + d_{bj} x^j \overline{X^b} + d_{ba} X^a \overline{X^b}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

これより

$$S = \frac{1}{4} (A_{kj} x^j \overline{x^k} + B_{ka} (X^a \overline{x^k} + x^k \overline{X^a}) + C_{ba} X^a \overline{X^b}) \dots\dots\dots (11)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} A_{kj} &= -\omega^2 m_{kj} + k_{kj} + \frac{i}{\omega} d_{kj} \\ B_{ka} &= -\omega^2 m_{ka} + k_{ka} + \frac{i}{\omega} d_{ka} \\ C_{ba} &= -\omega^2 m_{ba} + k_{ba} + \frac{i}{\omega} d_{ba} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

は巨視系、微視系の自己および相互機械インピーダンスである。式(11)に変分原理式(6)を用いて次の方程式を得る。

$$A_{kj} x^j + B_{ka} X^a = 0, \quad B_{ka} x^k + D_{ba} X^a = Q_b \dots\dots (13)$$

第1式は微視変数  $x^k$  に関する式で、第2式は巨視変数  $X^b$  に関する式である。仮定により外力は巨視変数にのみ働く。  $A_{kj}$  は正値対称な  $n \times n$  行列であるから逆行列が存在する。ゆえに第1式は  $x^k$  について解けて

$$x^j = -A_{jk}^{-1} B_{ka} X^a \dots\dots\dots (14)$$

となる。これを第2式へ代入して次の巨視変数に関する方程式を得る。

$$(-A_{jk}^{-1} B_{jb} B_{ba} + D_{ba}) X^a = Q_b \dots\dots\dots (15)$$

ところで、われわれは内部構造に関してあらかじめ知

識があるため、応答式 (14) はあらかじめ知られていると考えてよい。これを既知として式 (11) に代入すると  $S$  は次のように巨視変数のみで表される。

$$S = \frac{1}{4} (-A_{jk}^{-1} B_{jb} B_{ka} + D_{ba}) X^a \bar{X}^b \dots\dots\dots (16)$$

これに巨視変数に関する変分原理式 (6) を適用すれば、式 (15) が得られることは明らかである。ゆえに、内部構造の知識をもとにして平均エネルギーを巨視変数について表せば、変分原理により正しい方程式が得られることがわかった (証明おわり)。

特に外力も減衰もない自由振動の場合を考えると、式 (9) は

$$[-\omega^2 M_{ba}(\omega) + K_{ba}(\omega)] X^a = 0 \dots\dots\dots (17)$$

となり、固有振動数は

$$\det[-\omega^2 M_{ba}(\omega) + K_{ba}(\omega)] = 0 \dots\dots\dots (18)$$

より求める。これは  $N \times N$  行列の行列式であるから、全体系の  $(N+n) \times (N+n)$  行列の行列式を計算するよりも簡単な形となっている。しかも、 $M_{ba}(\omega)$ 、 $K_{ba}(\omega)$  は  $\omega$  の有理式であるため  $N+n$  個の根すべてが含まれている。したがって、 $\omega$  をいろいろ動かして行列式の値を探索する方法をとれば、式 (18) を調べることは全体系の場合に比べて能率がよいことがわかる。また、内部構造の振動には興味がなく、巨視変数のみで指定されたモードの固有振動数を直接求めるにはレーレーの原理を拡張すればよい。すなわち、式 (17) に  $\bar{X}^b$  をかけて総和することにより次の関係式を得る。

$$\omega^2 = \frac{K_{ba}(\omega) X^a \bar{X}^b}{M_{ba}(\omega) X^a \bar{X}^b} \dots\dots\dots (19)$$

固有振動数を求めたいモード、あるいはその近似を  $X^a$  とし、まず右辺で  $\omega=0$  とすれば、左辺より静特性近似における固有振動数  $\omega_1$  が求まる。これを式 (19) を用いて逐次的に改良することができる。すなわち

$$\omega_{M+1} = \frac{K_{ba}(\omega_M) X^a \bar{X}^b}{M_{ba}(\omega_M) X^a \bar{X}^b}, \omega_0 = 0 \quad M=0, 1, 2, \dots \dots\dots (20)$$

により、内部構造の効果を考慮した巨視的モードの固有振動数が求まる。

以上の議論は自由度の数に関係しないため、 $N$  や  $n$  が無限に増加した極限として、連続変数を含む場合にも成立することに注意しよう。われわれは次に、この連続変数を含んだものの例として、ラーメンの振動を解析する。これは通常のラグランジュ的運動方程式を導くことの困難な例であり、上述の手法が極めて有効であることがわかる。

#### 4. ラーメンの振動解析

ラーメンの振動を解析する場合、通常の構造解析でははりの振動モードとして静的曲げ曲線を用い、質量行列、剛性行列、減衰行列を計算して、D'Alembert の原理により運動方程式を得ている。しかし、この方法でははりの固有振動数に近い振動の、はりの共振による構造全体の振動への効果を見逃すことになる。通常の構造物ではそのような場合に遭遇することは少ないが、柔らかい構造に強い衝撃が加わった場合などもあり、厳密な解析をすることは十分意味のあることである。ところが、ラーメンのラグランジュ的方程式をたてようとする、各はりの方程式は空間座標に関して4階、時間に関して2階の微分方程式であり、全体系の解析は極めて困難である。しかし、3章の手法によればこれは可能である。まずはりのエネルギーを計算する。

4.1 はりのエネルギー 図2のようにはりが両端の変位が  $(u, v)e^{i\omega t}$ 、 $(u+\Delta u, v+\Delta v)e^{i\omega t}$ 、両端の回転が  $\phi e^{i\omega t}$ 、 $(\phi+\Delta\phi)e^{i\omega t}$  であるような振動をおこなっているとす。静止状態で点  $(s, 0)$  であった点の位置を  $P[x(s), y(s)]$  とすると、はりの縦振動の固有振動数は曲げのそれに比べて極めて大きいのがふつうであるから静特性により

$$x(s) = \left(u + \frac{s}{l} \Delta u\right) e^{i\omega t} \dots\dots\dots (21)$$

とおいてよい。 $y(s)$  の満たすべき方程式は

$$EI y''''(s) + \eta \dot{y}(s) + \rho A \ddot{y}(s) = 0 \dots\dots\dots (22)$$

である。ここに、 $EI$  は剛性率、 $\rho A$  は線密度、 $\eta$  は減衰定数である。 $y \propto e^{i\omega t}$  とおくと式 (22) は

$$y''''(s) = \lambda^4 y(s), \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2 - i \omega \eta}{EI}} \dots\dots\dots (23)$$

となる。これを境界条件

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= v e^{i\omega t}, & y'(0) &= \phi e^{i\omega t} \\ y(l) &= (v + \Delta v) e^{i\omega t}, & y'(l) &= (\phi + \Delta \phi) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

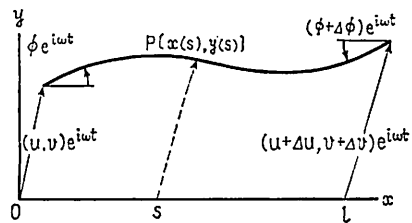


図2 はりの振動

のもとで解くと、解は次のようになる。

$$y(s) = (v, \Delta v, l\phi, l\Delta\phi) \begin{pmatrix} \varphi_1(\lambda s; \lambda l) \\ \varphi_2(\lambda s; \lambda l) \\ \varphi_3(\lambda s; \lambda l) \\ \varphi_4(\lambda s; \lambda l) \end{pmatrix} e^{i\omega t} \dots\dots\dots(25)$$

ただし、 $\varphi_1 \sim \varphi_4$  は無次元の関数で次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x; \theta) &= a_1(\theta)(\cos x - \cosh x) + a_2(\theta)(\sin x - \sinh x) + \cosh x \\ \varphi_2(x; \theta) &= a_3(\theta)(\cos x - \cosh x) + a_4(\theta)(\sin x - \sinh x) \\ \varphi_3(x; \theta) &= a_5(\theta)(\cos x - \cosh x) + a_6(\theta)(\sin x - \sinh x) + \frac{1}{\theta} \sinh x \\ \varphi_4(x; \theta) &= a_7(\theta)(\cos x - \cosh x) + a_8(\theta)(\sin x - \sinh x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1(\theta) &= (\cos \theta - \cosh \theta + \sin \theta \sinh \theta - \cos \theta \cosh \theta + 1)/D(\theta) \\ a_2(\theta) &= (\sin \theta + \sinh \theta - \cos \theta \sinh \theta - \sin \theta \cosh \theta)/D(\theta) \\ a_3(\theta) &= (\cos \theta - \cosh \theta)/D(\theta), \quad a_4(\theta) = (\sin \theta + \sinh \theta)/D(\theta) \\ a_5(\theta) &= (-\sin \theta + \sinh \theta + \sin \theta \cosh \theta - \cos \theta \sinh \theta)/\theta D(\theta) \\ a_6(\theta) &= (\cos \theta - \cosh \theta - \cos \theta \cosh \theta - \sin \theta \sinh \theta + 1)/\theta D(\theta) \\ a_7(\theta) &= (-\sin \theta + \sinh \theta)/\theta D(\theta), \quad a_8(\theta) = (\cos \theta - \cosh \theta)/\theta D(\theta) \\ D(\theta) &= 2(1 - \cos \theta \cosh \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

はりのポテンシャルエネルギーは、引張り・圧縮と、曲げとによってたくわえられるが、簡単のため前者を考えなければ次のように表せる。

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y''(s))^2 ds \dots\dots\dots(28)$$

これに式 (25) を代入して、1周期平均をとれば次のようになる。

$$\langle V \rangle = \frac{EI}{4l} \left( \frac{v}{l}, \frac{\Delta v}{l}, \phi, \Delta\phi \right) [C_{kj}(\lambda l)] \begin{pmatrix} \bar{v}/l \\ \frac{\Delta v/l}{\bar{\phi}} \\ \frac{\Delta\phi}{\bar{\phi}} \end{pmatrix}, \quad C_{kj}(\lambda l) = \frac{|\lambda l|^4}{l} \int_0^l \varphi_k''(\lambda s; \lambda l) \overline{\varphi_j''(\lambda s; \lambda l)} ds \dots\dots\dots(29)$$

$C_{kj}(\lambda l)$  は無次元で対称な実行例であり、次の性質をもつ。

$$C_{13}(\lambda l) = 0, \quad C_{14}(\lambda l) + C_{23}(\lambda l) = 2C_{24}(\lambda l), \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} [C_{kj}(\lambda l)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -12 & -6 \\ 0 & -12 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

はりの運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2) ds \dots\dots\dots(31)$$

であるから、1周期平均は次のようになる。

$$\langle T \rangle = \frac{MI^2 \omega^2}{4} \left( \frac{u}{l}, \frac{\Delta u}{l} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}/l \\ \frac{\Delta u/l}{\bar{\phi}} \end{pmatrix} + \frac{MI^2 \omega^2}{4} \left( \frac{v}{l}, \frac{\Delta v}{l}, \phi, \Delta\phi \right) [M_{kj}(\lambda l)] \begin{pmatrix} \bar{v}/l \\ \frac{\Delta v/l}{\bar{\phi}} \\ \frac{\Delta\phi}{\bar{\phi}} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(32)$$

$$M_{kj}(\lambda l) = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi_k(\lambda s; \lambda l) \overline{\varphi_j(\lambda s; \lambda l)} ds$$

ただし、 $M = \rho A l$  であり、 $M_{kj}(\lambda l)$  も無次元の対称な実行例であり、次の性質がある。

$$M_{13}(\lambda)=0, M_{14}(\lambda)+M_{23}(\lambda)=2M_{24}(\lambda), \lim_{\lambda \rightarrow 0} [M_{kj}(\lambda)] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & -1/12 \\ 1/2 & 13/35 & -3/140 & -11/210 \\ 0 & -3/140 & 1/210 & 1/420 \\ -1/12 & -11/210 & 1/420 & 1/105 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

散逸関数についても同様である。

$$F = \frac{1}{2} \int_0^l \eta \dot{y}(s)^2 ds \dots\dots\dots(34)$$

$$\langle F \rangle = \frac{\eta l^3 \omega^2}{4} \left( \frac{v}{l}, \frac{\Delta v}{l}, \phi, \Delta \phi \right) [M_{kj}(\lambda)] \begin{pmatrix} \bar{v}/l \\ \frac{\Delta \bar{v}}{l} \\ \bar{\phi} \\ \frac{\Delta \bar{\phi}}{\Delta \phi} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(35)$$

**4.2 三次元ラーメンの方程式** 三次元ラーメンに、 $x, y, z$  方向ごとに節点の番号をつけ、節点  $(I, J, K)$  における変位ベクトルを  $u_j(I, J, K)$ 、回転を表す反対称テンソルを  $\phi_{ji}(I, J, K)$  とする (図 3)。そして、差分演算子  $\Delta_j$  と移動演算子  $E_j$  を次のように導入する。

$$\Delta_i u_j(I, J, K) = u_j(I+1, J, K) - u_j(I, J, K), \dots, E_i u_j(I, J, K) = u_j(I-1, J, K), \dots,$$

そして  $[ ]_j$  を  $j$  方向についての両端の境界の差とする。たとえば  $I=1, \dots, N$  とすれば

$$[u_j(I, J, K)]_i = u_j(N, J, K) - u_j(1, J, K)$$

とする。全系の平均運動エネルギー、平均ポテンシャルエネルギー、平均散逸関数は、4.1 節で求めた各はりのものを合計すればよいから、次のような形式で表せる。

$$\left. \begin{aligned} \langle T \rangle &= \frac{\omega^2}{4} \sum_{I, J, K} (p^j \bar{u}_j + p^{kj} \Delta_k \bar{u}_j + l^{kj} \bar{\phi}_{kj} + l^{ikj} \Delta_i \bar{\phi}_{kj}) \\ \langle V \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{I, J, K} (\sigma^j \bar{u}_j + \sigma^{kj} \Delta_k \bar{u}_j + \mu^{kj} \bar{\phi}_{kj} + \mu^{ikj} \Delta_i \bar{\phi}_{kj}) \\ \langle F \rangle &= \frac{\eta \omega^2}{4} \sum_{I, J, K} (f^j \bar{u}_j + f^{kj} \Delta_k \bar{u}_j + r^{kj} \bar{\phi}_{kj} + r^{ikj} \Delta_i \bar{\phi}_{kj}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

ただし、 $j, k, l, \dots = 1, 2, 3$  については総和規則を用い、節点番号を示す  $(I, J, K)$  は簡潔のため省略する。ここで  $p^j, p^{kj}, \dots, r^{kj}, r^{ikj}$  は  $u_j, \Delta_k u_j, \phi_{kj}, \Delta_i \phi_{kj}$  の一次形式であり、 $\bar{u}_j, \Delta_k \bar{u}_j, \bar{\phi}_{kj}, \Delta_i \bar{\phi}_{kj}$  にはよらない。式 (36) に部分積分法の公式を用いて変形すると次のようになる。

$$\langle T \rangle = \frac{\omega^2}{4} \sum_{I, J, K} [(p^j - E_k \Delta_k p^{kj}) \bar{u}_j + (l^{kj} - E_i \Delta_i l^{ikj}) \bar{\phi}_{kj}] + \frac{\omega^2}{4} [E_i p^{ij} \bar{u}_j + E_i l^{ikj} \bar{\phi}_{kj}]_i \dots\dots\dots(37\text{-a})$$

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4} \sum_{I, J, K} [(\sigma^j - E_k \Delta_k \sigma^{kj}) \bar{u}_j + (\mu^{kj} - E_i \Delta_i \mu^{ikj}) \bar{\phi}_{kj}] + \frac{1}{4} [E_i \sigma^{ij} \bar{u}_j + E_i \mu^{ikj} \bar{\phi}_{kj}]_i \dots\dots\dots(37\text{-b})$$

$$\langle F \rangle = \frac{\eta \omega^2}{4} \sum_{I, J, K} [(f^j - E_k \Delta_k f^{kj}) \bar{u}_j + (r^{kj} - E_i \Delta_i r^{ikj}) \bar{\phi}_{kj}] + \frac{\eta \omega^2}{4} [E_i f^{ij} \bar{u}_j + E_i r^{ikj} \bar{\phi}_{kj}]_i \dots\dots\dots(37\text{-c})$$

ただし、番号  $I, J, K$  が指定の範囲を越えた項は 0 とする。式 (37-a) をみると、 $p^j - E_k \Delta_k p^{kj}, l^{kj} - E_i \Delta_i l^{ikj}$  がそれぞれ各点の運動量、角運動量に相当しているこ

とがわかる。また式 (37-b) より  $\sigma^j - E_k \Delta_k \sigma^{kj}, \mu^{kj} - E_i \Delta_i \mu^{ikj}$  がそれぞれ各点の変位と回転の復元力を表していることもわかる。 $\sigma^{kj}$  は連続体における応力テンソルに相当するもので、 $\mu^{ikj}$  はコッセラ連続体理論におけるカップル応力に対応するものである。

さて、各節点に作用する外力を  $b^j(I, J, K)$ 、モーメントを  $m^{kj}(I, J, K)$  とすると、式 (37) に変分原理式 (6) を適用して、まず、内部の節点に関する方程式

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 (p^j - E_k \Delta_k p^{kj}) + (\sigma^j - E_k \Delta_k \sigma^{kj}) \\ + i\omega \eta (f^j - E_k \Delta_k f^{kj}) = b^j \\ -\omega^2 (l^{kj} - E_i \Delta_i l^{ikj}) + (\mu^{kj} - E_i \Delta_i \mu^{ikj}) \\ + i\omega \eta (r^{kj} - E_i \Delta_i r^{ikj}) = m^{kj} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

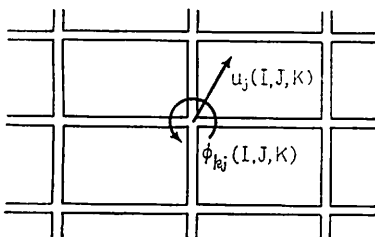


図 3 ラーメンの振動

を得る。境界での条件も同様にして得られる。

4.3 二次元ラーメンのせん断振動 応用面特に重要なのは二次元ラーメンで、変化が一方、たとえば  $x$  方向のみにおこる場合である。せん断振動を考えるため  $u_j=(0, v)$  とする。  $v$  と  $\phi$  は  $x$  のみの関数である。ラーメンとしては同一部材でできた正方格子を考えてみよう。はりの長さ  $l$ 、剛性率  $EI$ 、質量  $M$  をそれぞれ 1 とする自然単位系をとる。外力を  $b^j=(0, b)$  とし、  $b$  と節点に作用する外モーメント  $m$  も  $x$  にのみよるとする。このとき式 (38) は具体的に次の形となる。

$$\left. \begin{aligned} & A_1 v(I) + A_2 \Delta \Delta v(I-1) + C_1 \Delta \phi(I) \\ & - C_2 \Delta \phi(I-1) - D \Delta \Delta \phi(I-1) = b \\ & B_1 \phi(I) + B_2 \Delta \Delta \phi(I-1) + C_2 \Delta v(I) \\ & - C_1 \Delta v(I-1) - D \Delta \Delta v(I-1) = m \end{aligned} \right\} \dots\dots(39)$$

$$\left. \begin{aligned} & A_1 = -\omega^2(M_{11}+1) + C_{11} + i\omega\eta M_{11} \\ & A_2 = -\omega^2(M_{12}-M_{22}) + (C_{12}-C_{22}) \\ & \quad + i\omega\eta(M_{12}-M_{22}) \\ & B_1 = -2\omega^2 M_{33} + 2C_{33} + 2i\omega\eta M_{33} \\ & B_2 = -\omega^2(M_{34}-M_{44}) + (C_{34}-C_{44}) \\ & \quad + i\omega\eta(M_{34}-M_{44}) \\ & C_1 = -\omega^2 M_{14} + C_{14} + i\omega\eta M_{14} \\ & C_2 = -\omega^2 M_{23} + C_{23} + i\omega\eta M_{23} \\ & D = -\omega^2 M_{24} + C_{24} + i\omega\eta M_{24} \end{aligned} \right\} \dots\dots(40)$$

式 (39) の両式は静力学におけるラーメンのたわみ角法による層方程式、および節点方程式とよばれているものに対応しており  $\omega \rightarrow 0$  の極限でそれらに帰着する。ここで  $M_{11}$  は各点の巨視的質量を表しており、図 4 のように振動数  $\omega$  と減衰定数  $\eta$  に応じて変化する。  $\omega_0$  は、はりの第一次の振点共で  $\omega_0=22.37328545\dots$  ( $\sqrt{EI/\rho A/l^2}$ ) である。  $M_{11}$  を恒等的に 1 とおいたものが静特性近似である。同様に  $M_{33}$  は各点の巨視的回転能率であり、図 5 のようにして与えられる。これ

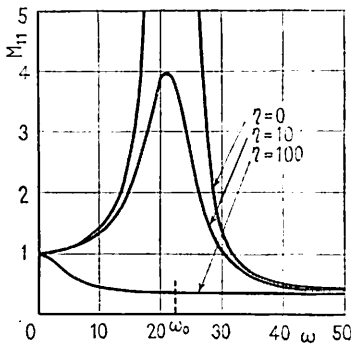


図 4 ラーメンの巨視的質量  $M_{11}$

も恒等的に 1/210 とおくものが静特性近似である。

簡単な例として、波動の伝ばを考えてみる。式(39)で  $b=0, m=0, \eta=0$  とおき

$$v(I) = v_0 e^{i\omega I}, \quad \phi(I) = \phi_0 e^{ikI} \dots\dots\dots(41)$$

とすれば式 (39) は  $v_0$  と  $\phi_0$  の代数方程式となり、行列式を 0 とおくことにより自由振動に対する  $r$  が求まる。そして  $r=e^{-ik}$  となるように、波数に相当する  $k$  を求め、  $x$  の正方向に進行する波動を選び出すと図

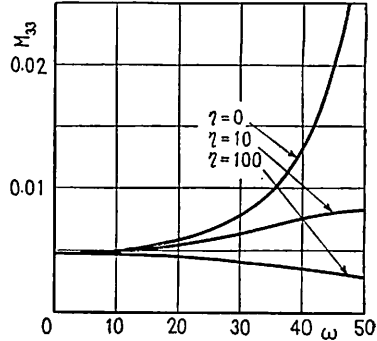


図 5 ラーメンの巨視的回転能率  $M_{33}$

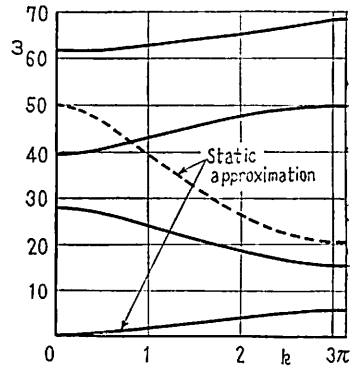


図 6 ラーメン中の波動の伝ば  $k-\omega$

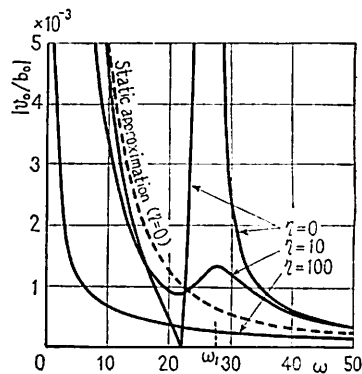


図 7 ラーメンの強制振動(せん断モード)

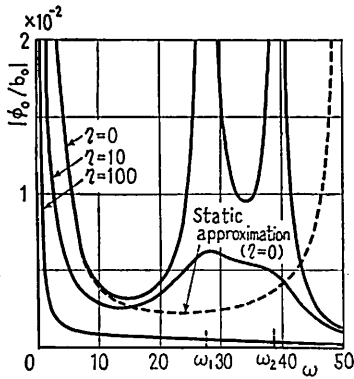


図 8 ラーメンの強制振動 (回転モード)

6のような分散関係を得る。破線は静特性近似によるもので、 $\omega$ の小さい場合の、主としてせん断振動によるモードでは静特性近似と一致しているが、 $\omega$ が大きいと各はりの振動が巨視的振動に大きな影響を与えていることがわかる。

次に強制振動を考える。式 (39) で  $m=0, b=Ib_0$  とおき、それに対し、 $v(I)=Iv_0, \phi(I)=\phi_0$  となるようなせん断モードの解をさがす。図 7, 8 にそれぞれ  $|v_0/b_0|, |\phi_0/b_0|$  を示してある。図 7 より、はりの共振点ではエネルギーが内部構造、すなわち、はりの振動に吸収されて、巨視的振動が阻止されていることがわかる。図 7, 8 の  $\omega_1, \omega_2$  はそれぞれ、ラーメン全体の巨視的なせん断、および回転の共振点である。これらの精密な値を求めるには、前述の手法が適用できる。この場合に式 (20) を適用すれば

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{C_{11}(\sqrt{\omega_1})}{M_{11}(\sqrt{\omega_1})}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{C_{33}(\sqrt{\omega_2})}{M_{33}(\sqrt{\omega_2})}} \dots (42)$$

である。いずれも数回の反復で完全に収束し

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= 27.619\ 582\ 40\dots \\ \omega_2 &= 39.478\ 417\ 60\dots \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

と求まる。

### 5. ま と め

巨視的自由度と微視的自由度 (内部構造) をもった力学系の振動解析法として、内部構造の特性に関する知識をもとにして、平均エネルギーを介して、変分法により、巨視変数のみに関する方程式を導く手法を考察した。そして、レーレーの原理を拡張して、巨視的モードに関する固有振動数を求める方法を示した。これらの方法は自由度の数によらないので、連続変数を含んでいる場合にも成立し、複雑な微視的構造をもった系の解析において論理的一貫性を与えるものである。適用例として、ラーメンの振動の厳密な解析をした。各はりの振動は内部構造としてとらえられ、その全体の巨視的振動へ及ぼす効果は、各はりの平均エネルギーの計算によって定まる巨視的質量、巨視的慣性率、などの周波数依存という点ではあくされる。これにより、内部構造を静的にとらえる近似によっては知ることのできない多くの著しい現象がわれわれに示される。

本論文をまとめるにあたって、ご指導いただいた、東京大学の島信徳教授に深く感謝いたします。なお、数値計算にあたっては東京大学大型計算機センターを利用した。

### 文 献

- (1) Kron, G., *Diakopectics*, (1963), McDonald.
- (2) Amari, S., *RAAG Memoirs*, F-VI (1962), 322.
- (3) 伊理, 信学論, 51-A, 5 (昭 43-5), 180.
- (4) 黒橋・ほか3名, 機論, 41-345 (昭 50-5), 1405.

## 討 論

〔質問〕 奥村 敦史 (早稲田大学理工学部)

巨視的および微視的の2段階に分けての構造物のはあく、平均エネルギーの導入など、興味ある提案を含むものと思うが、下記の点についてお伺いしたい。

(1) 著者の解法によれば、微視的構造を分布定数系としてとらえたときも理論的一貫性をもって扱えることを、特に主張されているように思う。しかし、その一例として示されたはり要素の剛性および慣性マトリックスの誘導は、支配微分方程式の厳密解を用いて両端変位成分で表現したたわみの解: 式 (25) を得な

がら、あえて平均エネルギーの表現に逆行し、遠まわりな道筋で行われている。式 (25) が得られていれば、 $y'', y''$  を  $s=0, l$  で評価することにより、慣性効果も含めた節点力が得られ、直接的に剛性・慣性を一体化したマトリックス (dynamic stiffness matrix) が導かれることは周知であり、形式的な一貫性のために、かえって現実の解析過程を複雑化しているようにも思われるがいかがか。

(2) 式 (29) の  $C_{kj}(\lambda l)$  の  $EI/l$  倍ははり要素の振動時の剛性マトリックスに相当し、式 (32) の

$M_{ij}(\omega)$  の  $Ml^2\omega^2$  倍は、慣性マトリックスに相当するものと思われる。したがって、それらの  $\lim_{\omega \rightarrow 0}$  である式 (30), (33) は静たわみ (三次多項式) を用いた普通の剛性および慣性マトリックス (有次元乗数をのぞいた部分) に移行すべきものと思う。しかし著者の変位ベクトル成分のならべ方を考慮しても、よく知られているそれと一致しないのは疑問に思われる。またこの不一致は別としても、式 (30), (33) は、各変位成分の各力成分に対する寄与における対称性から見ても、不合理な多くの点を含むように思われるがいかかか。

(3) 巨視的構造と微視的構造に分けてとらえることの利点を強調しておられると思う。しかし、いわゆる有限要素法の立場も、要素内の微視的構造の有限あるいは無限の自由度を消去 (消略ではなく) し、表現を巨視的構造である節点自由度の集合の系に集約するものであり、より巨視化したいときには、いわゆる凝縮を行って不用の自由度をさらに消去した形で見ると、したがって視点に本質的な差異は無いようにも思われるがいかかか。

〔回答〕 (1) ご指摘のとおり、式 (25) を両端で評価して、たわみ角法の公式を用いれば剛性行列などを得ることができる。したがって、ラーメンの解析法としては、それが確かに有力だと思う。本論文で平均エネルギーを用いたのは、変位量のみを用いて理論構成しようとしたためであり、それは、複雑な内部構造をもつ系では個々の一般化座標に対応する力 (せん

断力、モーメント、その他) の具体的な意味がなかなか考えにくいので、平均エネルギーに関して双対なものとしてとらえるのがよいと考えたためである。

(2) 本論文でははりの両端の変位、回転を用いず、かわりに一端の変位、回転と、それぞれの両端間の差分を用いているために見掛けが異なっているが、その点を考慮して変換すれば式 (30), (33) は通常の静たわみのものに一致する。

(3) 多自由度を少自由度に集約するという点では有限要素法の随ちゅうに入ると思うが、通常の有限要素法は数値計算法としてソフト化されてしまうのが大抵であるのに対し、本論文では巨視的な表現により系の巨視的な挙動を理論的に抽出するのが目的である。たとえば式 (36) 以下のカップル応力の扱いでも、カップル応力は微視的に複雑な構造をもつ媒質に生じるものであるが、その微視的な対応には多くの議論がされている。しかし、本論文の方法によれば、動的な場合にまで拡張されたカップル応力をめいりょうに意味づけることが可能である。また本論文では巨視的な方程式を得るのに微視的なつりあいではなく、平均エネルギーの和分、積分によるものであり、このような変分法の利点は、微視的な解析段階で種々の近似を行ってもよいという点にある。本論文の方法により、複雑な微細構造をもつ系、たとえば砂、サスペンションなどの振動解析、その連続体としての理論などを今後報告してゆく予定である。