

### 射影的微細構造をもつ連続体の応力解析\*

金 谷 健 一\*\*

#### 1. 緒 言

通常の連続体力学ではその出発点として、無限に小さい部分を切り取ってつりあいを考え、微分方程式を導くが、実在する物質では巨視的な下限があり、それより小さい部分には微細構造による不均一が現れる。そのような下限の大きさを  $l$  とすれば、考えている問題の規模が  $l$  に比べて十分大きければ通常の連続体理論が成立するが、そうでないときは寸法効果が現れて、解の相似性が保たれない。このため、内部構造を表す新しい自由度を付加した連続体の理論を構成し、微細構造のもつ影響を調べることが必要となる。これが微細構造をもつ連続体の理論であり、特にコッセラ連続体とよばれるものが有名で、さまざまな研究が行われてきた<sup>(1)(2)</sup>。その系統として、通常のひずみ  $\partial_{[j}u_{i]}$  のほかに回転こう配  $\partial_k\partial_{[j}u_{i]}$  を変形要素にとりいれる Mindlin ら<sup>(3)</sup>の研究や、回転  $\omega_{ji}$  を独立な変数とする大島<sup>(4)(5)</sup>の粒状連続体の理論がある。またコッセラ連続体を拡張して、微小変形要素のアフィン変形  $\chi_{ji}$  を独立変数とする Eringen ら<sup>(6)(7)</sup>のマイクロモルフィック連続体などの理論がある。これらに対して著者は前報<sup>(8)</sup>で、微小変形要素が射影変形を許す連続体を大規模なトラス、すなわち各部材のまげが無視できる(ピン接合とみなせる)ような骨組構造物のモデルとして構成した。これは前述の諸理論が実在物質の記述を目標にしていたのとスケールにおいてまったく異なり、モデルの対象も異なるので、結果を直接比較することはできないが、微細構造をもつ連続体という観点は同一である。

本論文では一般の等方的構成方程式のもとでの三次元問題の解法を定式化した。これは部材がランダムに組まれた立体トラスのモデルである。そして、寸法効果を見るために空孔のある無限場の引張りにおける応力集中を計算し、微細構造の程度を表す定数  $l_0$  の変化によって受ける解の影響を調べる。

#### 2. 基礎方程式

前報の結果を要約する。大規模なトラスは通常規則的な構造をもち、変形がなめらかなときは連続体で近似できる。そのようなトラスはある特定の骨組の単位要素の繰返してあるとみなすことができる。たとえばそれが直方体、あるいは平行六面体の形をしていれば、それらは変形によって一般の六面体となる。この変形は直線を直線に、平面を平面に移すので数学的には微小要素が射影変換を受けていることを意味する。ところで、微小な射影変換は一次変換  $a_j^i$  と  $j$ -方向への拡大  $c_j$  によって生成されることがわかる。すなわち、要素の中心を固定した場合、点  $x^i$  が点  $x^i + \delta x^i$  へ写像されたとすれば

$$\delta x^i = a_j^i x^j + \frac{1}{2} c_j x^j x^i \dots \dots \dots (1)$$

と表すことができる(図1)。ここで、 $i, j, \dots = 1, 2, 3$  にわたる添字の総和規約を用いている。この要素の変形は変位  $u^i$  によって表される場に適合していなければならない。すなわち要素同士がくいちがいがなく配列されていなければならない。このことから、 $a_j^i, c_j$  が変位  $u^i$  を用いて次のように表されることが導かれる。

$$a_j^i = \partial_j u^i, \quad c_j = \frac{1}{5} (\Delta u_j + 2\partial_j \partial_i u^i) \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 $\Delta$  はラプラシアンであり、 $\partial_j$  は  $\partial/\partial x^j$  を意味する。

要素の変形は  $a_j^i, c_j$  によって指定されるので、単位体積当たりのひずみエネルギーもそれらによって表さ

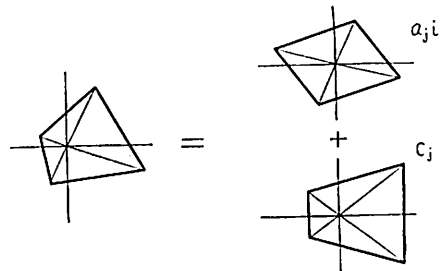


図1 無限小射影変換  $\delta x^i = a_j^i x^j + (1/2)c_j x^j x^i$

\* 昭和52年4月1日 第54期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和52年7月4日。  
 \*\* 正員、東京大学工学部(東京都文京区本郷7-3-1)。

れる。しかし、エネルギーの剛体回転不変性により、結局は  $c_j$  と

$$e_{ji} = a_{(ji)} \dots \dots \dots (3)$$

のみにより表されることがわかる。ここで ( ) は成分の対称化を示すものである。  $e_{ji}$ ,  $c_j$  がそれぞれ一次、二次のひずみを表しており、これらとエネルギーに関して双対的に応力  $\sigma^i$ ,  $\theta^j$  が次のように定義できる。

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon &= \sigma^i \delta e_{ji} + \theta^j \delta c_j \\ \sigma^i &\equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_{ji}}, \quad \theta^j \equiv \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_j} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

$\sigma^i$ ,  $\theta^j$  をそれぞれ一次、二次の応力とよぼう。  $\theta^j$  は  $j$ -方向への要素の拡大に抵抗して、それを復元させようとする力である。系全体のエネルギーは次のような変分形式をもつ。

$$\delta U = \int [\sigma^i \delta e_{ji} + \theta^j \delta c_j] dV \dots \dots \dots (5)$$

一方、単位体積当たりの外力を  $b^i$ , 単位面積当たりの表面引張りを  $t^i$  とするとき、仮想変位  $\delta u_i$  に対するこれらの外力のする仕事は

$$\delta W = \int b^i \delta u_i dV + \oint t^i \delta u_i dS \dots \dots \dots (6)$$

である。仮想仕事の原理より、つりあい状態では任意の仮想変位に対する仮想仕事式(6)は系のひずみエネルギーの増分式(5)に等しくなければならない。適合式(2)を式(5)に代入し、部分積分を行うと、変分原理よりつりあい方程式

$$\partial_j \sigma^i + b^i = \frac{1}{5} (\Delta \theta^i + 2 \partial_i \partial_j \theta^j) \dots \dots \dots (7)$$

と境界条件

$$t^i = \sigma^i n_j - s^i, \quad \theta^i = 0 \dots \dots \dots (8)$$

を得る。ただし

$$s^i = \frac{2}{5} \left( 2 n_{(j} \partial_{i)} \theta^j - n_{j m} \partial_n \theta^j + \frac{1}{2} \partial_n \theta^i \right) \dots \dots (9)$$

であり、  $n_i$  は単位外向き法線ベクトル、  $\partial_n$  はその方向への微分を表す。これらの方程式を解くには応力の内容を知る必要がある。これは定義により、エネルギーの計算より定まる。トラスの場合、それは部材の組み方によって異なるので、それによって解も異なるであろうが、ここでは一般的な性質を知るために、部材の組み方はまったくランダムであり、巨視的には等方向とみなせる場合を考えて、古典弾性場の解と比較することにする。したがって、等方テンソル関係式により次のようにおける。

$$\left. \begin{aligned} \sigma^i &= 2\mu \left( e_{ji} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \delta_{ji} e_{kk} \right) \\ \theta^j &= \nu c_j \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

ここで、  $\mu$  はせん断弾性係数に相当するもので  $\sigma$  はポアソン比に相当する。  $\nu$  は新しい場の定数である。  $\delta_{ji}$  はクロネッカのデルタである。

### 3. ポテンシャル関数による解法

式(2),(3)により式(10)の  $\sigma^i$ ,  $\theta^j$  を変位  $u^i$  で表し、つりあい方程式(7)へ代入すると次のような変位方程式を得る。

$$\Delta(1-l_0^2 \Delta) u + (\alpha - 8l_0^2 \Delta) \nabla \nabla \cdot u + \frac{1}{\mu} b = 0 \dots \dots \dots (11)$$

$$\alpha = \frac{1}{1-2\sigma}, \quad l_0 = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} \dots \dots \dots (12)$$

$l_0$  は微細構造のオーダーの、長さの次元をもつ量で、  $l_0=0$  の場合が古典弾性場に帰着する。式(11)を Mindlin ら<sup>(8)</sup>と同様の手法を用いて解くことを試みる。まず  $u$  を

$$u = \nabla \varphi + \nabla \times H \dots \dots \dots (13)$$

と分解することができる。これを代入すると

$$\Delta[(1+\alpha-9l_0^2 \Delta) \nabla \varphi + (1-l_0^2 \Delta) \nabla \times H] = -\frac{1}{\mu} b \dots \dots \dots (14)$$

となるから

$$(1+\alpha-9l_0^2 \Delta) \nabla \varphi + (1-l_0^2 \Delta) \nabla \times H = B \dots (15)$$

$$\Delta B = -\frac{1}{\mu} b \dots \dots \dots (16)$$

とおくことができる。式(15)の発散  $\nabla \cdot$  をとると

$$\Delta(1-l_1^2 \Delta) \varphi = \frac{1}{1+\alpha} \nabla \cdot B \dots \dots \dots (17)$$

$$l_1 = \frac{3l_0}{\sqrt{1+\alpha}} \dots \dots \dots (18)$$

となる。式(17)を積分すると

$$(1-l_1^2 \Delta) \varphi = \frac{1}{2(1+\alpha)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + B_0) \dots \dots \dots (19)$$

$$\Delta B_0 = \frac{1}{\mu} \mathbf{r} \cdot \mathbf{b} \dots \dots \dots (20)$$

となる。式(19)を再び積分して  $\varphi$  が求まる。

$$\varphi = \frac{1}{2(1+\alpha)} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + B_0) + \frac{l_1^2}{1+\alpha} \nabla \cdot \mathbf{B} + B_1 \dots \dots \dots (21)$$

$$(1-l_1^2 \Delta) B_1 = -\frac{l_1^4}{\mu(1+\alpha)} \nabla \cdot \mathbf{b} \dots \dots \dots (22)$$

これを用いると式(14)より

$$(1-l_0^2 \Delta) \nabla \times H = \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + B_0) \dots \dots (23)$$

となり、積分して次のようになる。

$$\nabla \times H = \mathbf{B} - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} + B_0) - l_0^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}' \dots \dots \dots (24)$$

$$(1-l_0^2\Delta)\mathbf{B}' = -\frac{l_0^2}{\mu}\mathbf{b} + \frac{l_0^4}{\mu}\nabla\nabla\cdot\mathbf{b} \dots\dots\dots(25)$$

これを式(13)へ適用すると、結局、 $\mathbf{u}$ がポテンシャル関数  $\mathbf{B}$ ,  $B_0$ ,  $\mathbf{B}'$ ,  $B_1$ により次のように表せる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \alpha\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} + B_0) - \beta\nabla\nabla\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}' + \nabla B_1 \dots\dots\dots(26)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu\Delta\mathbf{B} &= -\mathbf{b} \\ \mu\Delta B_0 &= \mathbf{r}\cdot\mathbf{b} \\ \mu(1-l_0^2\Delta)\mathbf{B}' &= -l_0^2\mathbf{b} + l_0^4\nabla\nabla\cdot\mathbf{b} \\ \mu(1-l_1^2\Delta)B_1 &= -\alpha'l_1^4\nabla\cdot\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4(1-\sigma)}, \quad \beta = -\frac{l_0^2(1-4\sigma)(5-8\sigma)}{4(1-\sigma)^2} \\ \alpha' &= \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

式(26)を用いて式(2), (10)より  $\theta^j$ を  $\mathbf{B}$ ,  $B_0$ ,  $\mathbf{B}'$ ,  $B_1$ で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \theta &= 5\mu l_0^2 \left[ \frac{1-4\sigma}{2(1-\sigma)} \nabla\nabla\cdot\mathbf{B} \right. \\ &\quad \left. + 2\nabla\nabla\cdot\mathbf{B}' + \frac{1}{l_0^2}\mathbf{B}' + \frac{3}{l_1^2}\nabla B_1 \right] \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

ところで式(26)において  $\mathbf{B}'=0$ ,  $B_1=0$ とおいたものが弾性場の解であるが、この射影的微細構造をもつ場に、弾性解による変位  $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \alpha\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} + B_0)$ を仮定して二次応力を計算すると式(29)より

$$\theta = 5\mu l_0^2 \frac{1+4\sigma}{2(1-\sigma)} \nabla\nabla\cdot\mathbf{B} \dots\dots\dots(30)$$

となる。これをみると  $\sigma=1/4$ のとき  $\theta^j=0$ となることわかる。したがって、つりあい方程式(7)と境界条件式(8)を満たす。すなわち、 $\sigma=1/4$ のときの解は弾性解と一致する。これは  $\sigma=1/4$ のときの弾性場の各点の近傍の変形がきわめて一次変形に近いので二次応力が発生しないからと解釈できる。

4. 無限場における一般解

式(27)は積分することができる。よく知られているようにポアソン方程式  $\Delta\varphi = \rho$ の解は

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \oint \left( \frac{1}{r} \nabla\varphi - \varphi \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot n dS \dots\dots\dots(31)$$

で与えられる(グリーンンの公式)。  $r$ は観測点と積分点との間の距離である。同様に方程式  $(1-l_0^2\Delta)\varphi = \rho$ の解は次のように与えられる<sup>(3)</sup>。

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{4\pi l_0^3} \int \phi\left(\frac{r}{l_0}\right) \rho dV \\ &\quad + \frac{1}{4\pi l_0} \oint \left\{ \varphi \nabla \phi\left(\frac{r}{l_0}\right) - \phi\left(\frac{r}{l_0}\right) \nabla \varphi \right\} \cdot n dS \end{aligned} \dots\dots\dots(32)$$

$$\phi(r) = -\frac{1}{r} e^{-r} \dots\dots\dots(33)$$

特に無限場では式(27)の積分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} B_i &= \frac{1}{4\pi\mu} \int \frac{b^i}{r} dV \\ B_0 &= -\frac{1}{4\pi\mu} \int \frac{x_j b^j}{r} dV \\ B_i' &= \frac{1}{4\pi\mu l_0} \int \phi\left(\frac{r}{l_0}\right) (b_j - l_0^2 \partial_j \partial_i b^j) dV \\ B_1 &= \frac{\alpha' l_1}{4\pi\mu} \int \phi\left(\frac{r}{l_1}\right) \partial_j b^j dV \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

外力  $b^i$ が原点付近の小領域  $\Omega$ に局在しているとすれば  $\Omega \rightarrow 0$ ,  $b^i \rightarrow \infty$ かつ  $\lim_{\Omega \rightarrow 0} \int_{\Omega} b^i dV = f^i$ であるような極限をとると式(34)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} B_i &= \frac{1}{4\pi\mu r} f_i, \quad B_0 = 0 \\ B_i' &= \frac{1}{4\pi\mu} \left[ \left( \frac{\phi_0}{l_0} - \frac{\phi_0'}{r} \right) \delta_{ji} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\phi_0'}{r^3} - \frac{\phi_0''}{l_0 r^2} \right) x^j x^j \right] f_j \\ B_1 &= -\frac{\alpha'}{4\pi\mu} \frac{\phi_1'}{r} x^j f_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \phi_0 &= \phi\left(\frac{r}{l_0}\right), \quad \phi_0' = \phi'\left(\frac{r}{l_0}\right) \\ \phi_0'' &= \phi''\left(\frac{r}{l_0}\right), \quad \phi_1' = \phi'\left(\frac{r}{l_1}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

とおいた。式(35)を(26)へ代入すると  $u_i$ は次のように表せることがわかる。

$$u_j = \frac{1}{4\pi\mu} \mathcal{O}_{ji} f^i \dots\dots\dots(37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{ji}(r) &= \left[ \frac{3-4\sigma}{4(1-\sigma)} \frac{1}{r} - \frac{(1-4\sigma)(5-8\sigma)}{4(1-\sigma)^2} \frac{l_0^2}{r^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{l_0} \psi_1\left(\frac{r}{l_0}\right) - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \frac{1}{l_1} \psi_2\left(\frac{r}{l_1}\right) \right] \delta_{ji} \\ &\quad + \left[ \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{1}{r^3} + \frac{3(1-4\sigma)(5-8\sigma)}{4(1-\sigma)^2} \frac{l_0^2}{r^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{l_0^3} \psi_3\left(\frac{r}{l_0}\right) + \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \frac{1}{l_1^3} \psi_3\left(\frac{r}{l_1}\right) \right] x^j x^i \end{aligned} \dots\dots\dots(38)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(r) &= \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{-r} \\ \psi_2(r) &= \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{-r} \\ \psi_3(r) &= \left( \frac{1}{r^3} + \frac{3}{r^4} + \frac{3}{r^5} \right) e^{-r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

重ね合わせの原理により、一般の外力場  $b^i$ のもとではこの  $\mathcal{O}_{ji}$ を用いて解が次のように表せる。

$$\mathbf{u}(r) = \frac{1}{4\pi\mu} \int \mathcal{O}(r-r') \mathbf{b}(r') d\mathbf{r}' \dots\dots\dots(40)$$

5. 円筒空どうと球状空孔の応力集中

4 章までの理論を適用して、具体的な変形問題を考える。われわれは微小構造を表す定数  $l_0$  が小さい場合を想定しているのであるから、方程式 (11) の解は弾性場の解に対する摂動である。しかし、そこでは  $l_0^2 \Delta$  という形で摂動項がはいっているの、これは特異摂動とよばれるものになっており、このとき解の摂動を受ける範囲は境界面より  $l_0$  のオーダーの部分に限られることはよく知られている<sup>(9)</sup>。したがって、通常の変形問題では境界付近が影響をうける以外は弾性論による解が十分な精度で適用される。しかし、表面付近の摂動が重要となる場合もあり、その代表的なものが空孔のある場の応力分布である。そのような表面付近の特異現象をみるために、まず  $z$  軸方向に無限に長い、半径  $a$  の円筒空どうのある場に、 $x$  軸方向に単純引張り  $\tau$  を作用させた場合を考えよう (図 2)。空どうのない場合の応力は

$$\sigma^{xx} = \tau, \quad \sigma^{yy} = \dots = \sigma^{zz} = 0 \quad \dots\dots\dots(41)$$

であるから、円筒座標では次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{rr} &= \frac{\tau}{2}(1 + \cos 2\theta), & \sigma^{\theta\theta} &= \frac{\tau}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \sigma^{r\theta} &= -\frac{\tau}{2}\sin 2\theta, & (\text{その他の成分は } 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

求める解をこの解に重ね合わせて得るとすれば、重ね合わされるべき解の満たすべき境界条件は  $r=a$  で

$$\left. \begin{aligned} \theta_r &= 0, & \theta_\theta &= 0 \\ t_r &= -\frac{\tau}{2}(1 + \cos 2\theta), & t_\theta &= \frac{\tau}{2}\sin 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

かつ  $r \rightarrow \infty$  で  $u \rightarrow 0$  である。まずポテンシャル関数を次の形におく。

$$\left. \begin{aligned} B &= \{B(r, \theta), 0, 0\}, & B_0 &= B_0(r, \theta) \\ B' &= \{B'(r, \theta), 0, 0\}, & B_1 &= B_1(r, \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

$B, B_0$  の満たすべき式は式 (27) より

$$\Delta B = 0, \quad \Delta B_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(45)$$

であり、 $r \rightarrow \infty$  で  $u \rightarrow 0$  を考慮すると基本解は  $1, \log r, r^{-n} \cos n\theta, r^{-n} \sin n\theta$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) であるが

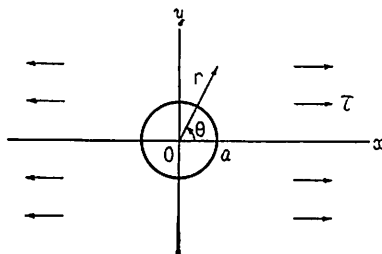


図 2 円筒空どうの応力集中

境界条件式 (43) の形より  $3\theta$  以上の角成分は必要でない。一方、 $B', B_1$  の満たすべき式は

$$(1-l_0^2 \Delta)B' = 0, \quad (1-l_1^2 \Delta)B_1 = 0 \quad \dots\dots\dots(46)$$

である。 $(1-\Delta)\varphi=0$  の解で  $r \rightarrow \infty$  で  $\varphi \rightarrow 0$  となるものは  $K_0(r), K_n(r) \sin n\theta, K_n(r) \cos n\theta$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) である。 $K_n$  は  $n$  次の第 2 種変形ベッセル関数であるが、やはり  $3\theta$  以上の角成分は不要である。

以上より  $B, B_0, B', B_1$  を次の形におく。

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{A_1}{r} \cos \theta, & B_0 &= A_2 \log r + \frac{A_3}{r^2} \cos 2\theta \\ B' &= A_4 K_1\left(\frac{r}{l_0}\right) \cos \theta \\ B_1 &= A_5 K_0\left(\frac{r}{l_1}\right) + A_6 K_2\left(\frac{r}{l_1}\right) \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

これより式 (29) から  $\theta'$  が計算できる。また式 (26) から  $u_i$  が、したがって、式 (10) より  $\sigma^{ij}$  が計算できる。境界条件は  $r=a$  で

$$\left. \begin{aligned} \theta_r &= 0, & \theta_\theta &= 0 \\ \sigma^{rr} - S_r &= -\frac{\tau}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \sigma^{r\theta} - S_\theta &= \frac{\tau}{2}\sin 2\theta \\ S_r &= \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}\partial_r \theta_r + \frac{\theta_r}{r} + \frac{1}{r}\partial_\theta \theta\right) \\ S_\theta &= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{r}\partial_\theta \theta_r + \frac{1}{2}\partial_r \theta_\theta - \frac{\theta_\theta}{r}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

である。式 (48) が満たされるような  $A_1 \sim A_6$  の条件は代数方程式となり、これを解き  $A_1 \sim A_6$  を定めて解を得る。しかし、式が複雑なため  $A_1 \sim A_6$  の形を直接定めることは非常に困難である。そこで、これらの計算は計算機で直接数値的に処理することにより解を計算する。

空どう上で  $\sigma^{\theta\theta}/\tau$  は  $\theta = \pm\pi/2$  で最大となるが、これと  $l_0/a$  との関係調べると、 $l_0/a$  が 0 に近いあたりでは図 3 のようになる。 $l_0/a=0$  の極限が古典弾性論の場合であるが、 $l_0/a$  が 0 でないときには結果はポアソン比  $\sigma$  に依存する。2 章で述べたように  $\sigma=1/4$  では弾性解に一致する。通常物質のポアソン比は 0.3 程度の場合が多いが、このときには応力集中の緩和が見られる。 $\sigma$  が  $1/4$  より小さいときは逆に応力集中が強化されている。その原因が射影的な二次応力  $\theta_r$  の符号が  $\sigma=1/4$  で反転することにあることは式 (30) より明らかである (図 4)。Mindlin らのコッセラモデルでは円筒空どう、球状空孔の引張りによる応力集中が常に緩和されるので、本モデルでポアソン比によっては応力集中が強化されることは不自然な印象を受ける。しかし、基礎となるモデルが異な

るので結果の単純な比較はできない。Mindlin らのコッセラ連続体では付加された自由度として  $\partial_k[\mu_{ij}]$  をとる。これは物質がそれ自身は一様な微小な塊から成っていると考えるもので、たとえば多結晶体の結晶粒のようなものを想定している。そして、それらの塊の間の界面の作用が隣接する塊の回転に影響を与えるようなモデルと考えられる。一方、本論文のモデルはひとつの微小要素が骨組構造であり、その変形の非一様性に着目したものであり、コッセラモデルと基本的に異なっている。しかし、コッセラモデルでも Muki ら<sup>(10)</sup>は、場の幾何学的形状によっては応力集中がポアソン比により強化されることを報告している

ので、本論文の結果がそれほど特異な現象とはいえないであろう。

次に、原点中心、半径  $a$  の球状の空孔がある場に、 $z$  軸方向の単純引張り  $\tau$  をかけた場合を考えよう(図5)。重ね合わせられるべき解の孔上での条件は

$$\left. \begin{aligned} \theta_r = 0, \quad \theta_\theta = 0 \\ t_r = -\frac{\tau}{2}(1 + \cos 2\theta), \quad t_\theta = \frac{\tau}{2}(1 + \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50)$$

である。ポテンシャル関数を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} = (0, 0, B(r, \theta)), \quad B_0 = B_0(r, \theta) \\ \mathbf{B}' = (0, 0, B'(r, \theta)), \quad B_1 = B_1(r, \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

$B, B_0$  の満たすべき式は式(45)であり、 $B', B_1$  は式(46)を満たす。 $r \rightarrow \infty$  で 0 となる調和関数は  $r^{-n-1}P_n(\cos \theta)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) である。 $P_n$  はルジャンドル関数であるが、やはり  $3\theta$  以上の角成分は不要なので  $n=0, 1, 2$  で十分である。また  $(1-\Delta)\varphi=0$  の解で、 $r \rightarrow \infty$  で  $\varphi \rightarrow 0$  となるものは  $r^{-1/2}K_{n+1/2}(r)P_n(\cos \theta)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) であり、 $n=0, 1, 2$  で十分である。 $K_{n+1/2}$  は初等関数で表されるから、次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} B = \frac{A_1}{r^2} \cos \theta, \quad B_0 = \frac{A_2}{r} + \frac{A_3}{r^3} (1 + 3 \cos 2\theta) \\ B' = A_4 \left\{ \frac{l_0}{r} + \left( \frac{l_0}{r} \right)^2 \right\} e^{-r/l_0} \cos \theta \\ B_1 = A_5 \frac{l_1}{r} e^{-r/l_1} + A_6 \left\{ \frac{l_1}{r} + 3 \left( \frac{l_1}{r} \right)^2 + 3 \left( \frac{l_1}{r} \right)^3 \right\} e^{-r/l_1} (1 + 3 \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(52)$$

式(29)より  $\theta^i$  が、式(10)より  $\sigma^i$  が計算できる。境界条件の形は式(48)と同じである。ただ式(49)のかわりに次のものを用いる。

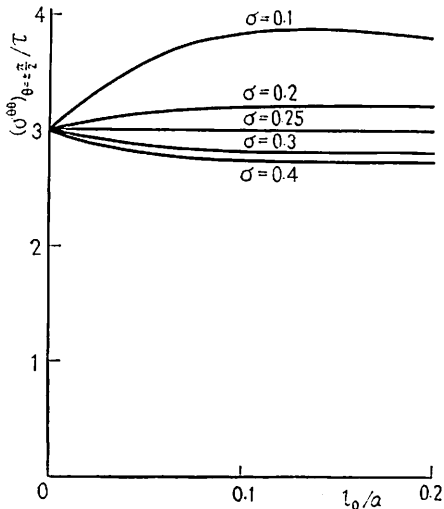


図3 円筒空どう上の応力  $\sigma^{\theta\theta}$

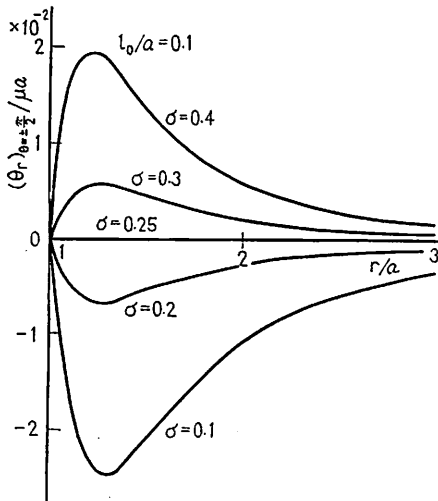


図4 円筒空どう周辺の二次応力  $\theta_r$

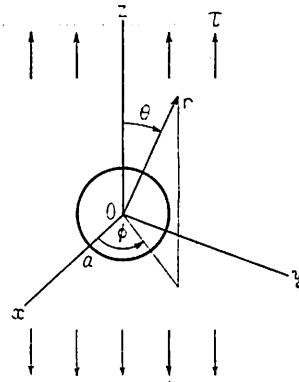


図5 球状空孔の応力集中

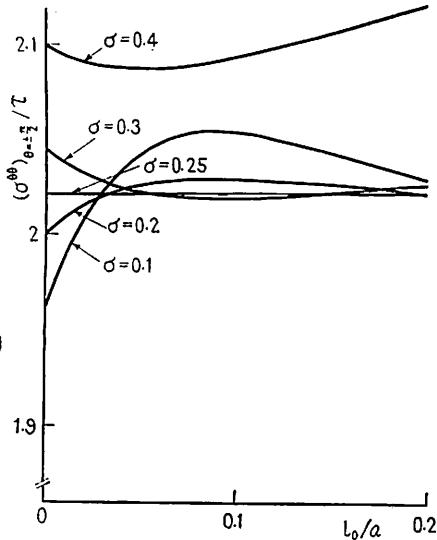


図 6 球状空孔上の応力  $\sigma^{\theta\theta}$

$$\left. \begin{aligned} S_r &= \frac{2}{5} \left\{ \frac{3}{2} \partial_r \theta_r + \frac{2}{r} \theta_r + \frac{1}{r} \left( \partial_\theta \theta + \frac{\theta_\theta}{\tan \theta} \right) \right\} \\ S_\theta &= \frac{2}{5} \left( \frac{1}{r} \partial_\theta \theta_r + \frac{1}{2} \partial_r \theta_\theta - \frac{\theta_\theta}{r} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

これらより  $A_1 \sim A_0$  が定まり、解が求まるが、この場合も計算機で直接数値的に処理せざるを得ない。空孔上で  $\sigma^{\theta\theta}/\tau$  が最大となるのは  $\theta = \pm\pi/2$  であるが、その  $l_0/a$  に対する値は図 6 のようになる。傾向は円筒空孔の場合とほぼ同じである。弾性論の結果から予想されるように、円筒の場合に比べてそれほど著しい応力集中の変化はない。図 7 に二次応力  $\theta_r$  を示すが、その挙動は前の場合とほぼ同じである。

6. 結 論

大規模なトラスの連続体モデルとして構成された、微小変形要素が射影変形を受ける連続体について、場の性質を調べるため、部材がランダムに結合されているトラスに相当する等方性構成方程式のもとに理論的解析を行い、古典弾性場と比較した。一般解を Mindlin らと同様の手法を用いポテンシャル関数によって表示した。これより、ポアソン比が 1/4 のとき場は微細構造の影響を受けないことがわかった。ま

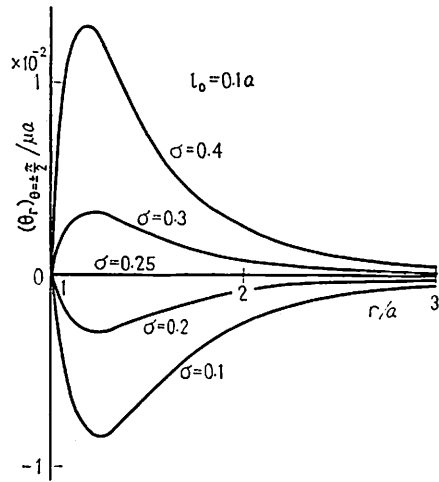


図 7 球状空孔周辺の二次応力  $\theta_r$

た、無限場における一般の外力場のもとでの解を表示した。さらに、表面付近の特異現象を調べるために、円筒空孔、および球状空孔の応力集中を計算した。その結果として、ポアソン比が 1/4 より大きい場合は応力集中の緩和がみられたが 1/4 より小さい場合は逆に応力集中が強化されることがわかった。

最後に、この研究をまとめるにあたって、指導、助言をいただいた東京大学教授 大島信徳先生に深く感謝します。計算には東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 システムを使用した。

文 献

- (1) Kröner, E. 編, *Mechanics of Generalized Continua*, (1962), Springer-Verlag.
- (2) Stojanović, R., *Mechanics of Polar Continua*, (1969), Int. Center Mech. Sci.
- (3) Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F., *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11 (1962), 415.
- (4) Oshima, N., *RAAG Memoirs*, 1-D-VI (1955), 563.
- (5) 大島, 材料科学, 9-5-6 (昭 48-12), 294.
- (6) Eringen, A.C. and Suhubi, E.S., *Int. J. Engng. Sci.*, 2 (1964), 189.
- (7) Eringen, A.C. 編, *Continuum Physics*, Vol. IV, (1976), Academic Press.
- (8) 金谷, 機論, 44-383 (昭 53-7), 2244.
- (9) van Dyke, M., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, (1975), Academic Press.
- (10) Muki, R. and Sternberg, E., *Z. Angew. Math. u. Phys.*, 16 (1965), 611.

討 論

【質問】 倉 茂 道 夫 (東北大学工学部)

ポアソン比に相当する材料定数  $\sigma$  が  $\sigma=1/4$  のとき、確かに式 (30) により  $\theta^j=0$  となり、解は古典

弾性論の解と一致することは理解できる。しかしながら、最初の基礎式 [運動学的関係式 (2), (3), 力学的条件式 (7)~(8), 構成式 (10)] において  $\sigma=1/4$

としても、 $\nu \neq 0$  である限り、古典弾性論の基礎式と一致せず、解も一致しないものと思われる。したがって、式 (29) から式 (30) を得るときの「射影的微小構造をもつ場に、弾性解による変位  $u = B - \alpha \nabla \cdot (r \cdot B + B_0)$  を仮定して」という仮定は適当ではないように思われるがいかがか。

また、結論の「ポアソン比が 1/4 のとき場は微小構造の影響をうけない」は、上記の仮定が成立するときのみ言えることではないか。

〔回答〕 ご指摘のとおり、「弾性解による変位  $u = B - \alpha \nabla \cdot (r \cdot B + B_0)$  を仮定して」考察を進めたが、仮定できない場合について触れなかったのは確かに不十分だった。ここに補足させていただく。基礎方程式は変位  $u$  を用いて結局式 (11) と表されるが、 $\sigma = 1/4$ 、すなわち  $\alpha = 2$  とおくと

$$\Delta u + 2 \nabla \nabla \cdot u + \frac{1}{\mu} b = l_0^2 (\Delta u + 8 \nabla \nabla \cdot u) \dots\dots\dots (i)$$

となる。したがって、左辺=0 となる  $u$  が右辺をも 0 にするには  $b$  が ( $u$  に関係しない) ある微分方程式を満たす必要がある。左辺 = 0 の  $\nabla \cdot$  をとり

$$\Delta \nabla \cdot u = -\frac{1}{3\mu} \nabla \cdot b$$

となる。また  $\Delta$  をとりこれを用いると

$$\Delta \Delta u = -\frac{1}{\mu} \Delta b + \frac{2}{3\mu} \nabla \nabla \cdot b$$

である。ゆえに式 (i) の右辺が 0 となる条件は

$$\Delta b - \frac{5}{3} \nabla \nabla \cdot b = 0$$

である。 $b$  が保存力であれば  $b = -\nabla \varphi$  と表せるが、このとき  $\varphi$  の満たすべき条件は

$$\nabla \Delta \varphi = 0$$

である。このときには弾性解が仮定できて、 $\theta^i = 0$  となるので境界条件も満たされる。したがって、重力などのように  $\Delta \varphi = 0$  が成立する力であれば十分であり、また本文中の応力集中の計算では  $b = 0$  としているので問題はない。

〔質問〕 倉茂道夫

回答にある式  $\Delta b - (5/3) \nabla \nabla \cdot b = 0$  \* は、式 (i) の左辺 = 0 となる  $u$  が右辺をも 0 にするための必要条件ではあるが、十分条件ではない様に思われる。従って、一般的に、 $\sigma = 1/4$  であっても、式 (i) は古典弾性論のナビエの式と一致せず (従って、その解

も一致せず)、 $l_0 \neq 0$  である限り、微小構造の影響をうける様に思われるが、いかがか。

〔回答〕 ご指摘のとおり、式 \* は

$$\Delta b + 2 \nabla \nabla \cdot b = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

の誤りであった。

しかし、これは、式 (i) の左辺 = 0 となる解が右辺をも 0 にするための必要十分条件だと思いがいかか。式 (i) の左辺 = 0 のとき

$$\text{右辺} = -\frac{1}{\mu} (\Delta b + 2 \nabla \nabla \cdot b)$$

となるから、これが 0 になる条件として式 (ii) を得たわけである。もちろん式 (i) とナビエの式は微分の階数が異なるから、方程式として一致することはないが、ナビエの式の解が同時に式 (i) の解でもある条件が式 (ii) であり、このとき、 $\sigma = 1/4$  に対して二次応力が 0 となるという性質により境界条件も満たされ、その解が、われわれの求める解である、というのが前回の回答の意味である。

〔質問〕 中 弘 恂 (埼玉大学工学部)

(1) 二次応力問題のポテンシャル関数を用いた研究および数値計算は独創的着想と思われる。

本論文中、 $\mu, \nu$  はどのような数値を用いたのか、お伺いしたい。また  $l_0/a = 0.1$  を用いた理由も併せてお教え願いたい。

(2) マイクロポーラ理論では、 $\theta_0$  に相当する応力は内力を用いるので境界条件からはぶいているのが通常であると思われる。

境界条件式 (43) において  $\theta_0 = 0$  と仮定した理由をお伺いしたい。

(3) マイクロポーラ理論では変位の二次、三次の微分項が幾何学的にはっきりしているが、式 (2) における  $c_j$  の幾何学的意味についてお伺いしたい。

〔回答〕 (1)  $\mu, \nu$  には具体的な数値を用いていない。 $l_0 = (1/5) \sqrt{\nu/\mu}$  と [式 (12)],  $l_0/a$  をパラメータとして用いた。応力集中の計算では  $l_0/a$  を限定せず計算したところ、図 3, 6 に見られるように  $l_0/a = 0.1$  付近で微小構造の影響が顕著なので、 $\theta_r$  のプロフィールを調べるため代表として  $l_0/a = 0.1$  としたにすぎない。

(2) マイクロポーラ理論と本理論は原理的に異なるため比較ができない。 $\theta^i = 0$  とした理由は、前報<sup>(6)</sup> に示したしたが、次のとおりである。式 (5), (6) を用いて仮想仕事の原理をつくると、部分積分による境界積分から、境界条件が

\* この式は計算間違いではないか。 $\Delta b + 2 \nabla \nabla \cdot b = 0$  が正しい様に思われる。なお、 $\sigma \neq 1/4 (\alpha \neq 2)$  の時も、類似の条件式  $\Delta b + [(8 - \alpha)/(1 + \alpha)] \nabla \nabla \cdot b = 0$  が得られる。

$$n_j \sigma^j = t^i + \frac{2}{5} [2n_{(j} \partial_{i)} \theta^j - n_j n_i \partial_n \theta^j \\ + \left( \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{R_\alpha} n_j n_i - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{1}{R_\alpha} l_j^{(\alpha)} l_i^{(\alpha)} \right) \theta^j + \frac{1}{2} \partial_n \theta^i] \\ \frac{1}{5} (\theta^i + 2\theta^k n_k n_i) = 0$$

となる。\$l\_j^{(\alpha)}\$ は \$\alpha\$ 番めの曲率主方向で、\$1/R\_\alpha\$ はその主曲率である。後者に \$n\_i\$ をかけて縮約すると \$n\_i n\_i = 1\$ より \$\theta^i n\_i = 0\$ したがって、再び第 2 式より \$\theta^i = 0\$ となる。第 1 式に代入して、結局、境界条件式 (8), (9) を得る。

(3) \$c\_j\$ を導入した理由は前報<sup>(8)</sup>にあるが次の理由

による。平行移動のない、すなわち原点を不変にする射影変換は非斉次座標により

$$x'^j = \frac{A_j^i x^i}{1 + A_j x^j}$$

と表される。この変換が恒等変換に近い場合には \$A\_j^i = \delta\_j^i + a\_j^i\$, \$A\_j = -(1/2)c\_j\$ とおくことができ、微小量 \$a\_j^i\$, \$c\_j\$ に関して展開し、一次の項までとったものが式 (1) である。このとき \$c\_j\$ は図 1 に示されているように \$j\$ 方向への拡大の量であることが式 (1) よりわかる。式 (1) より式 (2) を導く過程は前報<sup>(8)</sup>で詳細に議論してある。