最適な曲線当てはめとその信頼性評価

金谷健一 † 金澤 靖 ‡
† 群馬大学 工学部 情報工学科 ‡ 群馬工業高等専門学校電子情報工学科

Abstract: Curve fitting is formalized as statistical estimation by introducing a model of image noise. We first show that a theoretical accuracy bound can be obtained independently of solution techniques. Then, a fitting scheme that can attain that bound is presented. We formulate a technique for visualizing the reliability of the computed fit by means of the *primary deviation pair*. It is shown that if the curve is written in the *canonical form*, an efficient algorithm called *renormalization* can be applied. It is also shown that our fitting procedure leads to the *geometric AIC* for selecting an appropriate curve model from multiple candidates. Our theory is illustrated by real-image examples of line and conic fitting.

1. 序論

画像理解の最初の処理の一つはエッジ検出によって物体境界をなす画素を見つけ、それらに曲線 (直線を含む) を当てはめて物体領域の 2 次元表現を得ることである [42]。このため過去に曲線当てはめのさまざまな手法が研究されたが、いろいろな手法を発見的に構成しては例題に適用し、その性能を主観的に評価するのが普通であった。しかし、よい当てはめ法を追及するだけでなく、得られた当てはめの精度を定量的に評価することもまた重要である。なぜなら、当てはめの精度がそれから復元した 3 次元形状の精度に直接的に影響するからである [21]。これに対する本論文のアプローチは次の通りである。

1. 問題を、単にデータ点に "なるべく近い曲線" を求めるのではなく、誤差の挙動をモデル化し、"正しい曲線" を "推定" する統計的推定とみなす。
2. 当てはめ手法によらない精度の限界を理論的に導出する。
3. 精度の理論限界を達成する "真に最適な" 当てはめ手法を構成する。

そして、このアプローチの応用としてさらに次のことを示す。

- 当てはめ曲線を標準形に表すと、効率的に最適解を計算するくりこみ法が適用できる。
- 得られた解の信頼性が定量的に評価できると同時に、それを標準偏位として視覚化できる。
- 当てはめの過程から、複数の当てはめ曲線の候補から適切なものを選ぶ基準となる幾何学的ＡＩＣが計算できる。

Optimal Curve Fitting and Reliability Evaluation

Kenichi Kanatani† and Yasushi Kanazawa‡
†Department of Computer Science, Gunma University
‡Department of Information and Computer Engineering, Gunma College of Technology

以下、まず一般論を述べ、それを直線当てはめとコニック当てはめに応用し、実画像例を示す。

2. 曲線当てはめ

問題は平面上に与えられた N 点 (x_1, y_1), ..., (x_N, y_N) にパラメータ $\boldsymbol{u}$ (n 次元ベクトル) をもつ曲線

$$F(x, y, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{1}$$

を当てはめることである。従来はこれをデータ点 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ に "なるべく近い" 曲線を求める問題と解釈するとともに、その "近さ" を定義し、それを最小にするパラメータ $\boldsymbol{u}$ を数値的に計算していた。そしてさまざまな評価関数を発見的に定義しては、得られた当てはめを視覚的に評価していた。本論文ではこれを次のように理論化する。

データ点 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ の "真の位置" を $\{(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)\}$ とし、次のように書く。

$$x_\alpha = \bar{x}_\alpha + \Delta x_\alpha, \qquad y_\alpha = \bar{y}_\alpha + \Delta y_\alpha \tag{2}$$

誤差 $(\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha)$ は各 α ごとに独立で期待値 $(0, 0)$ の正規分布に従う確率変数とみなし、その共分散行列を次のように置く ($E[\cdot]$ は期待値を表す)。

$$V[x_\alpha, y_\alpha] = \begin{pmatrix} E[\Delta x_\alpha^2] & E[\Delta x_\alpha \Delta y_\alpha] \\ E[\Delta y_\alpha \Delta x_\alpha] & E[\Delta y_\alpha^2] \end{pmatrix} \tag{3}$$

誤差の分布は一般に非一様 (分布が各点ごとに異なる)、非等方 (分布が方向によって異なる) である。このとき問題は次のように定式化できる。

【問 題 1】 観測データ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ から

$$F(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}}) = 0, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{4}$$

が厳密に成立するパラメータ値 $\bar{\boldsymbol{u}}$ を推定せよ。

現実の問題ではデータ点の共分散行列を事前に正確に予測することは困難であるが、どの部分の点の誤差が相対的に大きいとか、どの方向に誤差が生じやすいなどという定性的な傾向をつかむことが可能なことは多い。そこで共分散行列 $V[x_\alpha, y_\alpha]$ は定数倍を除いて既知と仮定し、

$$V[x_\alpha, y_\alpha] = \epsilon^2 V_0[x_\alpha, y_\alpha] \tag{5}$$

と置く。そして、誤差の相対的な挙動を示す $V_0[x_\alpha, y_\alpha]$ は既知であるが、絶対的な大きさを示す ϵ は未知であるとする。ϵ をノイズレベル、$V_0[x_\alpha, y_\alpha]$ を正規化共分散行列と呼ぶ。

3. 精度の理論限界

問題 1の解 $\bar{\boldsymbol{u}}$ のある不偏推定量を $\hat{\boldsymbol{u}}$ とする ($E[\hat{\boldsymbol{u}}] = \bar{\boldsymbol{u}}$)。そして、その共分散行列を次のように定義する ($\top$ は転置を表す)。

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] = E[(\hat{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}})(\hat{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{u}})^\top] \tag{6}$$

このとき、次の下界が存在することが証明できる*[23, 26, 27]。

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] \succ \epsilon^2 \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha)(\nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha)^\top}{(\nabla \bar{F}_\alpha, V_0[x_\alpha, y_\alpha] \nabla \bar{F}_\alpha)} \right)^{-1} \tag{7}$$

ただし $\succ$ は左辺と右辺の差が半正値対称行列であることを意味し、ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書く。バーは真の値における評価を表し、次のように略記する。

$$\nabla \bar{F}_\alpha = \begin{pmatrix} \partial F(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}})/\partial x \\ \partial F(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}})/\partial y \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\nabla_{\mathbf{u}} \bar{F}_\alpha = \begin{pmatrix} \partial F(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}})/\partial u_1 \\ \vdots \\ \partial F(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha, \bar{\boldsymbol{u}})/\partial u_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

4. 当てはめの計算法

問題 1の解法として次の方法が考えられる。

最小集合法: パラメータ $\boldsymbol{u}$ は n 自由度をもつから、n 個の点から曲線が一意的に定まる。その座標を式 (4) 代入した

$$F(x_\alpha, y_\alpha, \boldsymbol{u}) = 0, \quad \alpha = 1, ..., n \tag{10}$$

を $\boldsymbol{u}$ に関する連立方程式とみなして解く。

最小二乗法: すべての観測点を式 (4) に代入して、左辺の重み付き二乗和 ($W_\alpha > 0$)

$$J_{\rm LS} = \sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha F(x_\alpha, y_\alpha, \boldsymbol{u})^2 \tag{11}$$

を最小にする $\boldsymbol{u}$ を計算する。

最尤推定: 式 (4) を拘束条件としてマハラノビス距離の二乗和

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha - x_\alpha \\ \bar{y}_\alpha - y_\alpha \end{pmatrix}, V_0[x_\alpha, y_\alpha] \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha - x_\alpha \\ \bar{y}_\alpha - y_\alpha \end{pmatrix} \right) \tag{12}$$

を最小にするように真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ を推定し、それに対する J が最小になる $\boldsymbol{u}$ を計算する。

最小集合法は最小集合 (直線当てはめなら 2 点、コニック当てはめなら 5 点、等) の取り方によって解が変動し、精度は極めて低い。しかし、最小集合をランダムに多数選んで投票で解を定めるロバスト推定に応用できる [9]。最小二乗法は解の性格があいまいであり、$F(x, y, \boldsymbol{u})$ が (x, y) の非線形関数の場合は一般に解に統計的偏差が生じ [23]、精度が悪い。それに対して最尤推定は第 1 近似において (すなわち $O(\epsilon^4)$ を除いて) 不偏かつ式 (7) の精度の理論限界を達成することが証明できる†[20, 23]。

式 (12) を最小にする解は第 1 近似において次の解をもつ。

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} - \frac{F_\alpha V_0[x_\alpha, y_\alpha] \nabla F_\alpha}{(\nabla F_\alpha, V_0[x_\alpha, y_\alpha] \nabla F_\alpha)} \tag{13}$$

ただし F_α, ∇F_α は式 (8), (9) で真の値 $\bar{x}_\alpha$, $\bar{y}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{u}}$ をそれぞれデータ x_α, y_α、および変数 $\boldsymbol{u}$ に置き換えたものである。上式を式 (12) の $\bar{x}_\alpha$, $\bar{y}_\alpha$ に代入すると次のようになる。

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{F_\alpha^2}{(\nabla F_\alpha, V_0[x_\alpha, y_\alpha] \nabla F_\alpha)} \tag{14}$$

したがって、最適化には正規化共分散行列 $V_0[x_\alpha, y_\alpha]$ のみを知ればよく、ノイズレベル ϵ は必要ない。式 (14) は文献 [3, 46, 47] の評価関数を一般化したものに相当しており、誤差が一様 (分布がどの点も同じ)、等方 (分布がどの方向にも同じ) であればそれらに一致する‡。

5. 当てはめの信頼性評価

式 (14) の最小値を $\hat{J}$ と書き、残差と呼ぶ。このとき $\hat{J}/\epsilon^2$ が第 1 近似において自由度 $N - n$ の χ^2 分布に従

---

*式 (7) は統計学におけるクラメル・ラオの下界の導出と共通する考え方で導ける。したがって式 (7) の右辺を “クラメル・ラオの下界” と呼ぶことも可能であるが、統計学におけるクラメル・ラオの下界とは別物である。

†本論文ではアウトライアを除去する “ロバスト推定法” (投票法、M推定、最小メジアン法、他) は論じないが、そのような手法でアウトライアを除去したデータに対しては上述の最尤推定が真に最適な計算法である。

‡ただし、文献 [3, 46, 47] では誤差の統計モデルは考慮していない。

うことがわかる [23]。したがって二乗ノイズレベルの不偏推定量が次のように得られる。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{\hat{J}}{N-n} \tag{15}$$

最適解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の共分散行列は第 1 近似において式 (7) の理論的下界に一致するから、解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ とそれを式 (13) に代入して計算した $(\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha)$ を真の値 $\bar{\boldsymbol{u}}$ と真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ に代入し、ϵ^2 を式 (15) によって推定することによって、解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{u}}]$ が事後的に評価できる。

得られた $V[\hat{\boldsymbol{u}}]$ の固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ とし、対応する単位ベクトルの作る正規直交系を $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ とすると、$\boldsymbol{u}_1$ は最も誤差を生じやすい方向であり、$\sqrt{\lambda_1}$ がその方向の標準偏差である。したがって、パラメータ $\boldsymbol{u}$ の最も生じやすい変動が二つの値

$$\boldsymbol{u}^{(+)} = \hat{\boldsymbol{u}} + \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}^{(-)} = \hat{\boldsymbol{u}} - \sqrt{\lambda_1}\boldsymbol{u}_1 \tag{16}$$

で代表される。これらを曲線の式に代入すると二つの曲線

$$F(x, y, \boldsymbol{u}^{(+)}) = 0, \quad F(x, y, \boldsymbol{u}^{(-)}) = 0 \tag{17}$$

が得られる。これを当てはめた曲線 $F(x, y, \hat{\boldsymbol{u}}) = 0$ の標準偏位と呼ぶ。これによって当てはめの信頼性が視覚的に表示できる。

6. 標準形とくりこみ法

実際の応用においては曲線が次の形に書けることが多い。

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = 0 \tag{18}$$

ここに $\boldsymbol{u}$ は n 次元ベクトルであり、$\boldsymbol{a}$ は x, y の "多項式" を成分とする n 次元ベクトルである。この形を標準形と呼ぶ。例えば直線 $Ax + By + C = 0$ は

$$\boldsymbol{a} = (x, y, 1)^\top, \quad \boldsymbol{u} = (A, B, C)^\top \tag{19}$$

と置くと式 (18) の標準形となる。またコニック $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= (x^2, 2xy, y^2, 2x, 2y, 1)^\top \\ \boldsymbol{u} &= (A, B, C, D, E, F)^\top \end{aligned} \tag{20}$$

と置くと標準形となる。ベクトル $\boldsymbol{a}$ は座標 (x, y) の非線形関数であるが、その期待値と共分散行列が計算できれば、これを新しいデータとみなすことができる§。正規分布に従う変数の多項式の誤差の期待値や分散は、x, y の誤差をそれぞれ Δx_1, Δx_2 と書き、$E[\Delta x_i \Delta x_j] = \Sigma_{ij}$ と置くと、次の関係から計算できる。

$$\begin{aligned} &E[\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k] = 0 \\ &E[\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k \Delta x_l] = \Sigma_{ij}\Sigma_{kl} + \Sigma_{ik}\Sigma_{jl} + \Sigma_{il}\Sigma_{jk} \\ &E[\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k \Delta x_l \Delta x_m] = 0 \\ &E[\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k \Delta x_l \Delta x_m \Delta x_n] = \cdots \end{aligned} \tag{21}$$

§元の (x, y) の誤差分布が一様等方でも、変換した $\mathbf{a}$ の誤差分布は一般に非一様、非等方である。

これから、ベクトル $\boldsymbol{a}$ の共分散行列 $V[\boldsymbol{a}]$ が (x, y) の関数として表せる。したがって、$\boldsymbol{a}$ の分布を正規分布で近似すると標準形に対して一般論が適用でき、計算や解析が容易になる。ただし、注意が必要である。

- 共分散行列 $V[\boldsymbol{a}]$ は n 次元行列であるが、誤差 $(\Delta x, \Delta y)$ の自由度は 2 であるから、ランク 2 の特異行列となる。
- 式 (18) の両辺を何倍しても同じ曲線を表すので、ベクトル $\boldsymbol{u}$ には定数倍の不定性がある。そこで $\boldsymbol{u}$ を単位ベクトルに正規化する。すなわち最適化における $\boldsymbol{u}$ の定義域は n 次元空間 $\mathcal{R}^n$ 全体ではなく、その中の $(n-1)$ 次元単位球面 S^{n-1} である。

これらの問題は球面への射影行列 $\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top$ ($\boldsymbol{I}$ は単位行列) や (ムーア・ペンローズの) 一般逆行列を用いることによって対処できる [20, 23]。そのようにして標準形を扱う利点は、最適解が次のくりこみ法 [18, 30, 31] と呼ぶ手法で効率よく系統的に計算できることにある。

1. $c = 0$, $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1, \ldots, N$ と置く。
2. 次の行列を計算する。

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \boldsymbol{a}_\alpha \boldsymbol{a}_\alpha^\top, \quad \boldsymbol{N} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha V_0[\boldsymbol{a}_\alpha] \tag{22}$$

3. 次の行列の最小固有値 λ と対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を計算する。

$$\hat{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} - c\boldsymbol{N} \tag{23}$$

4. $\lambda \approx 0$ であれば $\boldsymbol{u}$, c, $\hat{\boldsymbol{M}}$ を返して終了する。そうでなければ次のように c, W_α を更新してステップ 2 に戻る。

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{N}\boldsymbol{u})}, \quad W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{a}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{24}$$

収束は速く、通常は 3, 4 回の反復で十分である。返された $\boldsymbol{u}$ の値を $\hat{\boldsymbol{u}}$ とすると、式 (14) を直接に数値的に最小化して得られる値と同じオーダの精度があることが証明できる [23]。また、返された c の値から二乗ノイズレベルが次のように推定できる。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - 2/N} \tag{25}$$

さらに、返された行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ の値から推定値 $\hat{\boldsymbol{n}}$ の共分散行列が次のように評価できる。

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] = \frac{\hat{\epsilon}^2}{N}\left(\hat{\boldsymbol{M}}\right)_{n-1}^{-} \tag{26}$$

演算 $(\cdots)_r^-$ は行列の標準形において大きい r 個以外の固有値を 0 に置き換えて (ムーア・ペンローズの) 一般逆行列を計算することを意味する¶。

¶理論的にはくりこみ法が収束した時点で $\hat{\mathbf{M}}$ の最小固有値が 0 であるから通常の一般逆行列でよいのであるが、数値計算のため最小固有値が厳密に 0 とは限らないことを考慮した措置である。

(a) (b)

図 1: (a) エッジ片 (15 画素)。(b) 最適に当てはめた直線 (実線) とその標準偏位 (破線)。

7. 幾何学的ＡＩＣ

当てはめる曲線として複数のモデル

$$F_1(x,y,\boldsymbol{u}_1)=0,\quad F_2(x,y,\boldsymbol{u}_2)=0,\quad \ldots \tag{27}$$

が与えられたとき、どれを選択するかという問題も生じる。素朴な考えは、それぞれのモデルを最適に当てはめ、式 (12) の J の残差

$$\hat{J}=\sum_{\alpha=1}^{N}(\begin{pmatrix}\hat{x}_\alpha-x_\alpha\\ \hat{y}_\alpha-y_\alpha\end{pmatrix},V_0[x_\alpha,y_\alpha]\begin{pmatrix}\hat{x}_\alpha-x_\alpha\\ \hat{y}_\alpha-y_\alpha\end{pmatrix}) \tag{28}$$

が最も小さいものを選ぶことであろう。ここに $\{(\hat{x}_\alpha,\hat{y}_\alpha)\}$ は最適に当てはめた曲線のパラメータ $\hat{\boldsymbol{u}}$ を用いて式 (13) から計算したその曲線上の点であり、真の位置 $\{(\bar{x}_\alpha,\bar{y}_\alpha)\}$ の最尤推定量である。

しかし、パラメータ $\hat{\boldsymbol{u}}$ の自由度の大きい曲線ほど残差が小さく、十分自由度の大きい曲線はすべてのデータ点を通過する。そのよう曲線はよい当てはめとはいえない。なぜなら、それはたまたま加わった誤差に追従しているからである。望ましいのは誤差がどのように生じてもあまり影響を受けないことである。これを測るために、現在観測しているデータの誤差とは独立な、しかし統計的には同じ性質をもつ誤差が加わった仮想的なデータ $\{(x^*_\alpha,y^*_\alpha)\}$(これを将来のデータと呼ぶ) を想定し、次の量を考える。

$$\hat{J}^*=\sum_{\alpha=1}^{N}(\begin{pmatrix}\hat{x}_\alpha-x^*_\alpha\\ \hat{y}_\alpha-y^*_\alpha\end{pmatrix},V_0[x_\alpha,y_\alpha]\begin{pmatrix}\hat{x}_\alpha-x^*_\alpha\\ \hat{y}_\alpha-y^*_\alpha\end{pmatrix}) \tag{29}$$

これは確率変数であり、その期待値は次のようになる。

$$E[\hat{J}^*]=E[\hat{J}]+2(N+n)\epsilon^2 \tag{30}$$

いい換えれば、現在の残差 $\hat{J}$ は、この残差が最小になるように当てはめを行なったため、将来の残差 $\hat{J}^*$ より平均的に $2(N+n)\epsilon^2$ だけ小さくなるということである。そこでこの分を補正した

$$AIC=\hat{J}+2(N+n)\epsilon^2 \tag{31}$$

(a) (b)

図 2: (a) エッジ片 (9 画素)。(b) 最適に当てはめた直線 (実線) とその標準偏位 (破線)。

を幾何学的ＡＩＣと呼び、これが小さいほどよいモデルであるとみなす[∥] [22, 25]。

式 (31) の評価にはノイズレベル ϵ を知る必要がある[**]。しかし、これが未知でも包含関係にあるモデルの比較はできる。モデル $\mathcal{S}_1$: $F_1(x,y,\boldsymbol{u}_1)=0$ とモデル $\mathcal{S}_2$: $F_2(x,y,\boldsymbol{u}_2)=0$ があり、モデル $\mathcal{S}_2$ はモデル $\mathcal{S}_1$ の特別な場合であるし、次のように書く[††]。

$$\mathcal{S}_2\succ\mathcal{S}_1 \tag{32}$$

そして $\mathcal{S}_1$ を弱いモデル、$\mathcal{S}_2$ を強いモデルと呼ぶ。未知パラメータ数をそれぞれ n_1, n_2 とし、残差がそれぞれ $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ となるとする。弱いモデルは強いモデルが成立してもしなくても成立するなら、ノイズレベル ϵ は弱いモデルの残差から式 (15) によって推定できる。これをそれぞれの幾何学的 AIC の式に代入し、比の平方根をとると次の量を得る。

$$K=\sqrt{\frac{N-n_1}{3N+n_1}\left(\frac{\hat{J}_2}{\hat{J}_1}+\frac{2(N+n_2)}{N-n_1}\right)} \tag{33}$$

$K<1$ であれば強いモデル $\mathcal{S}_2$ が選択される。

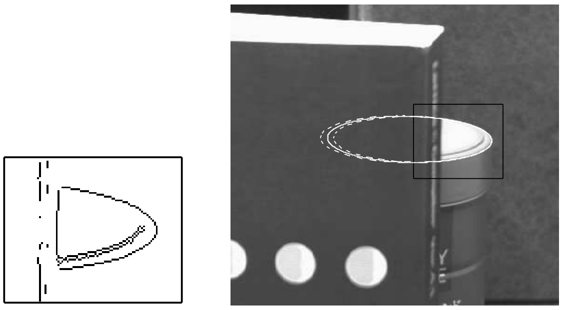
8. 直線当てはめ

室内シーンは境界が直線からなる物体が多いので、直線当てはめはもっとも基本的な当てはめ問題である。またシーン中で平行な辺のエッジ点に当てはめた直線の交点として消失点を計算すれば 3 次元復元の手掛かりとなる [16]。過去に種々の当てはめ手法が提案されているが [14, 34, 49, 51]、当てはめた直線の信頼性は発見的な手段で評価されるのが普通であった [5, 15, 17]。本論文の理論を用いれば、最適な当てはめ直線が得られるだけでなく、その信頼性が定量的に評価でき、かつ視覚的に表示できる [32]。

[∥]これは統計学における (赤池の) ＡＩＣ [1] と同じ考え方に基づくものであり、式 (1) の形の推定に拡張したものである。特にデータ点数 N に依存する点が特徴的である (AIC はデータ数には依存しない)。

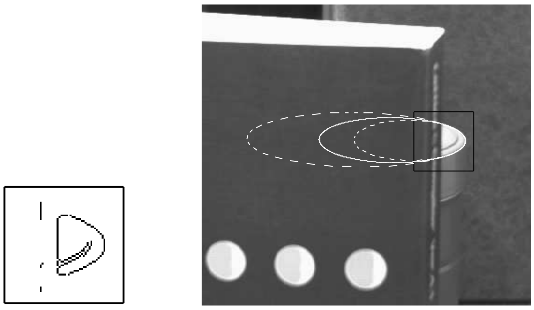
[**]誤差が小さければ残差のみで比較してよいが、誤差が大きいと自由度の少ない単純なモデルを採用するということである。

[††]例えば直線は 2 次曲線の 2 次の係数が 0 の場合であり、2 次曲線は 3 次曲線の 3 次の係数が 0 の場合である。



(a)　(b)

図 3: (a) エッジ片。(b) 最適に当てはめたコニック (実線) とその標準偏位 (破線)。



(a)　(b)

図 4: (a) エッジ片。(b) 最適に当てはめたコニック (実線) とその標準偏位 (破線)。

図 1(a) は実画像中に 15 画素分のエッジを示したものである。図 1(b) にくりこみ法によって当てはめた直線を実線で、標準偏位を破線で示す。図 2はより短いエッジ (9 画素) に対するものである。このようにエッジの長さによって当てはめた直線の信頼性が変化する様子が定量的に評価できる。これによって、当てはめた直線から消失点を計算して 3 次元復元やカメラキャリブレーションを行なう場合に、その復元形状やキャリブレーションの精度が定量的に評価できる [15, 29]。

9. コニック当てはめ

人工物には円や球から成る形状が多く、その境界は画像上でコニックとして現われる。したがってコニック当てはめも直線当てはめに次いで重要な当てはめ問題あり、これを利用した物体認識システムがいろいろ試みられている [10, 43, 44]。さらに物体形状が円あるいは既知の形状の楕円であることがわかっていれば、1 画像からその 3 次元位置を計算することもできる [28]。このため過去に種々のコニック当てはめ手法が提案された。これにはハフ変換に基づくもの [7, 11, 48]、さまざまなパラメータ化と最小二乗法との組み合わせ [4, 6, 36, 37, 41, 45]、エッジ強度や濃淡値やその他の情報を発見的手法と組み合わせるもの [2, 8, 38, 40, 44] などがある (これらは文献 [42] に総括されている)。

しかし、当てはめ手法の考案する際に誤差の統計的挙動が考慮されることは少なかった。例外は Porril [39] であり、一様等方な正規分布を仮定し、データ点を順次追加しては解を (ベイズ推定の意味で) 最適に更新する手法を導入し、これを「拡張カルマンフィルタ」と呼んだ。一方 Joseph [13] と Werman ら [50] は古典的な統計解析手法を適用して、データ点数無限大の極限における当てはめ方程式の各係数の漸近的挙動を解析した。本論文の手法は対照的に、データ点数を固定して微小誤差に対する第 1 近似を解析する。これを用いると最適な当てはめコニックが得られるだけでなく、その信頼性が定量的に評価でき、かつ視覚的に表示できる。その基本形は文献 [19] に、より洗練された手法が文献 [33] に示されている。Leedan ら [35] は誤差が大きい場合の比較実験も行なわれ、その方法が優秀であることが示している。

図 3(a) はエッジ画像の一部である。その中の楕円弧にくりこみ法で当てはめたコニックを原画像上に重ねて実線で表示したものが図 3(b) であり、破線はその標準偏位である。図 4は長さの異なるエッジに当てはめた例である。このように、最適な当てはめが得られるだけでなく、その信頼性を定量的に評価し、視覚的に表示することができる。図 3, 4からわかるように、当てはめたコニックの信頼性はエッジが短くなると急速に低下している。この信頼性の計算には誤差の大きさに関する知識を必要としない。

円弧はコニックにおいて x^2 と y^2 の係数が等しく、かつ xy の係数が 0 となるものであるから、未知数にそのような制約を課せば精度の理論限界も、くりこみ法による最適当てはめも、標準偏位の計算も同様にできる。曲率の小さいエッジセグメントを表現するのに直線で近似するか、円弧で近似するか、コニックで近似するかの判断も重要である [42]。これも幾何学的 AIC によって判別できる [24]。

10. まとめ

本論文では曲線当てはめの一般理論を与えた。これは誤差の挙動をモデル化し、当てはめを統計的推論とみなすものである。まず当てはめ手法によらない精度の理論限界が得られることを示し、次にその限界を達成する解法を与えた。この意味で解は真に最適であり、もはや改良できない。このことは、当てはめの信頼性が解析的に計算できることを意味する。本論文では「標準偏位」によって信頼性を視覚的に表示する手法を示した。さらに実際問題によく現われる曲線の「標準形」を定義し、これに対して効率的に最適解を計算する「くりこみ法」の手順を示した。そして直線当てはめ、コニック当てはめの場合の実画像例を示した。また、この当てはめ過程より、複数の当てはめ曲線の候補から適切なものを選ぶ基準となる幾何学的ＡＩＣが計算できることを示した。本論文の理論は空間の平面や曲面の当てはめ [30, 31] や折れ線からなる図形の推定 [12] にも拡張できる。

謝辞： 本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究 C (2) (No. 09680352) によった。

参考文献

[1] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Trans. Automation Control*, vol. 19, no. 6, pp. 176–723, 1974.

[2] A. Albano, "Representation of digitized contours in terms of conic arcs and straight-line segments," *Comput. Graphics Image Process.*, vol. 3, no. 1, pp. 23–33, 1974.

[3] R. M. Bolle and B. C. Verumi, "On three-dimensional surface reconstruction methods," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 13, no. 1, pp. 1–13, 1991.

[4] F. L. Bookstein, "Fitting conic sections to scattered data," *Comput. Graphics Image Process.*, vol. 9, no. 1, pp. 56–71, 1979.

[5] B. Brillault-O'Mahony, "New method for vanishing point detection," *CVGIP: Image Understanding*, vol. 54, no. 2, pp. 289–300, 1991.

[6] D. B. Cooper and N. Yalabik, "On the computational cost of approximating and recognizing noise-perturbed straight lines and quadratic arcs in the plane," *IEEE Trans. Comp.*, vol. 25, no. 10, pp. 1020–1032, 1976.

[7] E. R. Davies, "Finding ellipses using the generalised Hough transform," *Patt. Recog. Lett.*, vol. 9, pp. 87–96, 1989.

[8] T. Ellis, A. Abboot and B. Brillault, "Ellipse detection and matching with uncertainty," *Image Vision Comput.*, vol. 10, no. 5, pp. 271–276, 1992.

[9] M. A. Fischler and R. C. Bolles, Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography, *Comm. ACM*, vol. 24, no. 6, pp. 381–395, 1981.

[10] D. Forsyth, J. L. Mundy, A. Zisserman, C. Coelho, A. Heller and C. Rothwell, "Invariant descriptors for 3-D object recognition and pose," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 13, no. 10, pp. 971–991, 1991.

[11] C. L. Huang, "Elliptical feature extraction via an improve Hough transform," *Patt. Recog. Lett.*, vol. 10, no. 2, pp. 93–100, 1989.

[12] Iman Triono, N. Ohta and K. Kanatani, "Automatic recognition of regular figures by geometric AIC," *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol. E81-D, no. 2, pp. 224–226, 1998.

[13] S. H. Joseph, "Unbiased least squares fitting of circular arcs," *CVGIP: Graphical Models Image Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 424–432, 1994.

[14] B. Kamgar-Parsi, B. Kamgar-Parsi and N. Netanyahu, "A nonparametric method for fitting a straight line to a noisy image," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 11, no. 9, pp. 998–1001, 1989.

[15] K. Kanatani, "Statistical analysis of focal-length calibration using vanishing points," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 8, no. 6, pp. 767–775, 1992.

[16] 金谷健一, "画像の 3 次元解釈の統計的信頼性," 情報処理学会論文誌, vol. 34, no. 10, pp. 2062–2070, 1993.

[17] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[18] 金谷健一, "コンピュータビジョンのためのくりこみ法," 情報処理学会論文誌, vol. 35, no. 2, pp. 201–209, 1994.

[19] K. Kanatani, "Statistical bias of conic fitting and renormalization," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 16, no. 3, pp. 320–326, 1994.

[20] 金谷健一, "当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界," 情報処理学会論文誌, vol. 36, no. 8, pp. 1865–1873, 1995.

[21] 金谷健一, "画像理解のための統計学: 画像の幾何学的解釈の信頼性評価," 情報処理, vol. 37, no. 1, pp. 52–60, 1996.

[22] 金谷健一, "情報量基準による幾何学的モデル選択," 情報処理学会論文誌, vol. 37, no. 6, pp. 1073–1080, 1996.

[23] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, 1996.

[24] K. Kanatani, "Comments on 'Nonparametric Segmentation of Curves into Various Representations'," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 19, no. 12, pp. 1391–1392, 1997.

[25] K. Kanatani, Geometric information criterion for model selection, *Int. J. Comput. Vision*, vol. 26, no. 3, pp. 171–189, 1998.

[26] K. Kanatani, Cramer-Rao lower bounds for curve fitting, *Graphical Models Image Process.*, vol. 60, no. 2, pp. 92–99, 1998.

[27] K. Kanatani, Statistical optimization and geometric inference in computer vision, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, ser. A, vol. 356, 1998.

[28] K. Kanatani and W. Liu, "3-D interpretation of conics and orthogonality," *CVGIP: Image Understanding*, vol. 58, no. 3, pp. 286–301, 1993.

[29] K. Kanatani and T. Maruyama, Optimal grid pattern for focal length calibration, *Advanced Robotics*, vol. 10, no. 1, pp. 81–103, 1996.

[30] Y. Kanazawa and K. Kanatani, "Direct reconstruction of planar surfaces by stereo vision," *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol. E78-D, no. 7, pp. 917–922, 1995.

[31] Y. Kanazawa and K. Kanatani, "Reliability of fitting a plane to range data," *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol. E78-D, no. 12, pp. 1630–1635, 1995.

[32] Y. Kanazawa and K. Kanatani, "Optimal line fitting and reliability evaluation," *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol. E79-D, no. 9, pp. 1317–1322, 1996.

[33] Y. Kanazawa and K. Kanatani, "Optimal conic fitting and reliability evaluation," *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol. E79-D, no. 9, pp. 1323–1328, 1996.

[34] N. Kiryati and A. M. Bruckstein, "What's in a set of points?," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 14, no. 4, pp. 496–500, 1992.

[35] Y. Leedan and P. Meer, "Estimation with bilinear constraints in computer vision," *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, January 1998, Bombay, pp. 733–738.

[36] T. Nagata, H. Tamura and K. Ishibashi, "Detection of an ellipse by use of a recursive least-squares estimator," *J. Robotics Systems*, vol. 2, pp. 163–177, 1985.

[37] Y. Nakagawa and A. Rosenfeld, "A note on polygonal and elliptical approximation of mechanical parts," *Patt. Recog. Lett.*, vol. 40, no. 2, pp. 79–94, 1979.

[38] K. A. Paton, "Conic sections in chromosome analysis," *Patt. Recog.*, vol. 2, no. 1, pp. 39–51, 1970.

[39] J. Porrill, "Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using a bias corrected Kalman filter," *Image Vision Comput.*, vol. 8, no. 1, pp. 37–41, 1990.

[40] P. L. Rosin, "Ellipse fitting by accumulating five-point fits," *Patt. Recog. Lett.*, vol. 14, pp. 661–669, 1993.

[41] P. L. Rosin, "A note on the least squares fitting of ellipses," *Patt. Recog. Lett.*, vol. 14, no. 10, pp. 799–808, 1993.

[42] P. L. Rosin and G. A. W. West, "Nonparametric segmentation of curves into various representations," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 17, no. 12, pp. 1140–1153, 1995.

[43] C. A. Rothwell, A. Zisserman, C. I. Marinos, D. A. Forsyth and J.L. Mundy, "Relative motion and pose from arbitrary plane curves," *Image Vision Comput.*, vol. 10, no. 4, pp. 250–262. 1992.

[44] S. Safaee-Rad, I. Tchoukanov, B. Benhabib, and K. C. Smith, "Accurate parameter estimation of quadratic curves from grey-level images," *CVGIP: Image Understanding*, vol. 54, no. 2, pp. 259–274, 1991.

[45] P. D. Sampson, "Fitting conic sections to "very scattered" data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm," *Comput. Graphics Image Process.*, vol. 18, no. 1, pp. 97–108, 1982.

[46] G. Taubin, "Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 13, no. 11, pp. 1115–1138, 1991.

[47] G. Taubin, F. Cukierman, S. Sullivan, J. Ponce and D. J. Kriegman, "Parameterized families of polynomials for bounded algebraic curve and surface fitting," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 16, no. 3, pp. 287–303, 1994.

[48] S. Tsuji and F. Matsumoto, "Detection of ellipses by a modified Hough transform," *IEEE Trans. Comp.*, vol. 27, no. 8, pp. 777–781, 1978.

[49] I. Weiss, "Line fitting in a noisy image," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 11, no. 3, pp. 325–329, 1989.

[50] M. Werman and Z. Geyzel, "Fitting a second degree curve in the presence of error," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 17, no. 2, pp. 207–211, 1989.

[51] Y. T. Zhou, V. Venkateswar and R. Chellappa, "Edge detection and linear feature extraction using a 2-D random field model," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, vol. 11, no. 1, pp. 84–95, 1989.