

画像理解の幾何学的方法

これが群論の威力だ

金谷 健一

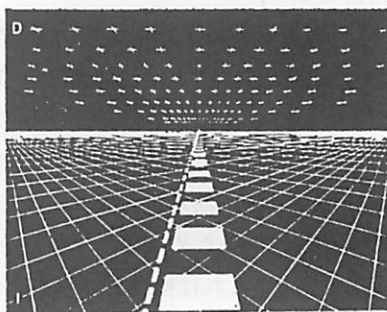
1. 群論は幾何なのか代数なのか？

幾何と代数はよく聞くことばだが、現代の数学のいろいろな分野について、何が幾何で何が代数かをいうことは難しい。いえるとすれば、それぞれの理論について、幾何的側面と代数的側面のどちらの色彩がより強いかということであろう。数学の重要な一分野である群論についても同じことがいえる。群論はいったい幾何だろうか、それとも代数だろうか？ どちらの側面がより強いのだろうか？

2. 群論の醍醐味はこれだ

——対称性のある固有値問題

群論が数学者だけでなく物理学や工学のいろいろな分野の研究者にとって重要なのは、群論が物理学や工学の多くの問題に直接深く結びついているからである。代表的な応用は、考えている現象の対称性の利用である。対称性とはその現象にある変換群を作用させても、その現象が本質的に同一であることである。(本節の以下では大ざっぱにしか説明しないが、次節以降に関係しないから、わからないところは気軽に飛ばして読んで下さい。)たとえば円板はその中心の回りに任意の回転(2次元回転群)をほどこしても本質的に同じである。正方形板は2次元回転群の、90°の整数倍(負でもよい)の回転からなる部分群をほどこしてもよい。あるいは板に表と裏の区別がなければ裏返しに相当する反転を加えてもよい。無限に広がる



コンタクト・アナログ

物質は、任意の並進(3次元並進群)をほどこしても本質的に同一なら一樣(または均一)であるといい、ある点の回りに任意の回転(3次元回転群)をほどこしても同一であれば、その点に関して等方であるという。規則的な格子状の構造をもつ物質は、3次元並進群の有限個の元の生成する部分群に関する対称性をもっている。

群論が決定的な役割を果たすのは、対称性をもつ現象の物理法則が固有値問題として表せる場合である。すなわち、その現象の状態を抽象的に ξ とすると、ある線形作用素 H があって、物理的に可能な状態は $H\xi = \lambda\xi$ (λ は実数または複素数) の解として与えられることである。たとえば分子の電子軌道を定めるシュレジンガー方程式(H はハミルトニアン)、弾性体やバネで結合された系の振動や座屈の方程式は固有値問題であり、その他にも電磁気学、流体力学など多くの分野で固有値問題として表せる現象は数多い。

詳細は省略するが、固有値問題 $H\xi = \lambda\xi$ として表せる現象がある変換群に関する対称性をもつということは、作用素 H がその変換群のすべての元と可換であることと等価である。このとき、固有値問題の解はその変換群の既約表現の基底になっている。これは「可換な作用素同志は不変部分空間を共有する」という線形代数でよく知られた事実に立脚している。このことを利用すれば、解(分子軌道、振動モード、座屈モード、…)を求めるのに複雑な方程式(シュレジンガー方程式、振

動の方程式、座屈の方程式、…)を解く必要がない。系のもつ対称性を規定する変換群の既約表現を純粹に(たとえば指標の直交性などに基いた)“代数的”操作によって構成すればよい。その意味で、このような群論の利用を“代数的応用”とよんでよいであろう。

3. しかし、群論は情報工学には無力?

このような群論の物理学や工学への応用は古くからよく研究されていて、名著とよばれる書物も多い(しかし、理工系の学部のカリキュラムとしては難しすぎて、学生の目には“深遠な奥義”としか写らないのが現実かもしれない)。確かに、物理法則を表す方程式などを解く必要がなく、対称性のみから解が定まるということは、群論の威力をまざまざと見せつけて、物理学や工学の研究者を引きつけて離さない魅力である。

しかし、このような群論の応用の最大の弱みは、問題が固有値問題の形をしていないと、さっぱり威力がないことである。確かに物理学(古典力学、量子力学、電磁気学、…)や、物理学と直接に結びついた工学の分野(量子化学、固体物性、流体力学、弾塑性論、…)では固有値問題として表せる現象がたいへん多い。一方、情報工学に関連した分野では、情報理論、パタン認識、画像理解、数値計画法、統計解析など数理的手法の活躍する問題が多いにもかかわらず、固有値問題として表せるものは限られている(多変量解析や確率過程としての信号の相関の解析ぐらい)。これは、これらの分野が対象とする“信号”や“データ”は人為的に作り出されるもので、何らかの“物理法則”に支配されているわけではないためである。

してみると、物理学やそれに関連した工学であれば威力のあった群論も情報工学に関係する分野では何の役にも立たないのか? しかし、役に立たないと決めつけてしまうにはあまりにも魅力的である。これが筆者の昔、群論をかじったところに深刻に感じた悩みであった。

4. 群論のもうひとつの意義

しかし、これは数学の専門家ではない筆者の皮相な理解にすぎなかった。よく考えてみると、もし群論の応用が固有値問題に限られるのなら、群論という学問がガロア (Évariste Galois: 1811-1832)による代数方程式の代数的解法という“実際の”研究に端を発し、今日の物理学の最先端の統一場理論でも群論が中心的役割を果たしている事実をどう説明すればよいのか。

そう考えているうちに、実は群論の“精神”はもっと深いところにあることに気がついた。群論を応用するには固有値問題である必要はなく、対称性さえも必ずしも必要ではない。ただ残念なのは、先にあげた固有値問題への応用のように明確なことで説明するのが難しいことである。述べようとするとどうしても抽象的な表現になってしまう。あとで具体的な例を出す、それまではとりあえず“感覚的”に感じとって頂きたい。(パタン認識に詳しい人はパタン認識を、量子力学に詳しい人は量子力学をイメージしておいて下さい。)ひとくちでいえば、群によって現象の特徴量を“選別”するということである。

ある現象を他の類似の現象と区別する量、これを特徴量とよぶことにするが、それをどのように選んだらよいかという問題を考えよう。ひとつの現象に対して特徴量はいろいろ考えられるであろう。たとえば何らかの大きさを表す量、何らかの向きを表す量、何らかの形を表す量、などいろいろありうる。さらにそれらの量を任意に(和や積をとるなどして)組み合わせたものもやはり特徴量となるから、無数に考えられる。しかし、それらはすべて必要なのか? むだなものは何か? もっとも“本質的”なものとは何か? なるべく少ない数の特徴量で、しかも本質的な“意味”をもっているものを選ぶにはどうしたらよいだろうか?

このようなことを知るには、いろいろな特徴量の間の“構造”を発見する必要がある。ここで“群”が登場する。(もっとも、考えられる限りの特徴量を羅列して、主因子分析などの多変量統計解析手法に訴える手があるが、そのような直接的な手段

は、現象に対する深い理解のないまま強引に適用しても益のないことが多い。）

5. 何が不変か？ 特徴量を選別する

さて、 $\xi_1, \xi_2, \dots$ を考えられる代表的な特徴量としよう。これらを単にながめていても、互にどう違うかよくわからない。そこで、これらの特徴量を選別するために、現象にある変換群（並進、回転、一次変換、要素間の置換、…）をほどこしてみよう。（どういう変換群をほどこせばよいかは7節で議論する。）ほどこした結果に対して前と同じ特徴量を測定したところ $\xi'_1, \xi'_2, \dots$ であったとする。その変化の仕方をみて、特徴量を区別することができる。特にまったく変化を受けない特徴量を、その変換群に対する不変量という。

ここで誤解してはならないのは、ほどこす変換群はまったく仮想的なものでよく、実際にそのような変換が生じるという意味ではないことである。（ちょうど剛体のつりあい条件式を導くのに仮想変位を加える仮想仕事の原理のようなものである。“剛体”は定義により変形しないはず！）

たとえ話をすれば、教室にいる生徒達はながめただけでは誰が落ちつき者で誰があわて者か区別がつかない。そこで突然サイレンを鳴らし、大声で「火事だ」と叫ぶ。その結果、あわてふためく者、少し驚いただけで気をとり直す者、まったく何とも思わない者（“不変量”）、…と分類することができる。人間の社会では差別はあってはならないことだが、理工学では量を性質によって区別し、それに応じて異なった取り扱いをすることが本質的に重要なことである。

6. 特徴量の不変な集合——それは可約か既約か？

まず最初のステップとして、特徴量 $\xi_1, \xi_2, \dots$ をその変換が互に他とは無関係であるようなグループにわけることができるであろう。たとえば $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, $\{\xi_{n+1}, \dots, \xi_m\}$, …とわけるということは、変換後の $\xi'_1, \dots, \xi'_n$ は $\xi_1, \dots, \xi_n$ には依存するが $\xi_{n+1}, \dots, \xi_m$ にはよらず、また変換後の $\xi'_{n+1}, \dots, \xi'_m$ は $\xi_{n+1}, \dots, \xi_m$ には依存するが $\xi_1,$

$\dots, \xi_n$ にはよらないということである。（たとえば平面上のある点の座標 (x, y) は平面を原点の回りに角度 θ だけ回転すれば $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$, $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$ となり、変換後の x', y' は x, y の両方に関係するので分離できない。）

そのようなひとまとまりのグループを特徴量の不変な集合とよぶことにすれば、不変な集合に属す特徴は全体として何らかの意味を表している、別の不変な集合とは表す意味が区別されると解釈できる。

次のステップとして、不変な集合 $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ に属す特徴量を（加減乗除などして）組み合わせて、別のもので置き換えることを考える。このようにしてもやはり不変な集合が得られ、全体としての意味も同じである。（たとえば $\{\xi_1, \xi_2\}$ のかわりに $\bar{\xi}_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\bar{\xi}_2 = \xi_1 - \xi_2$ としても $\{\xi_1, \xi_2\}$ と $\{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2\}$ とはどちらも全体としては等価である。）そのような等価な操作をほどこして $\{\xi_1, \dots, \bar{\xi}_n\}$ としたところ、これが $\{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r\}$, $\{\bar{\xi}_{r+1}, \dots, \bar{\xi}_n\}$ とふたつの不変な集合に分離したとする。すなわち、変換後の $\bar{\xi}'_1, \dots, \bar{\xi}'_r$ は $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r$ だけに係り、変換後の $\bar{\xi}'_{r+1}, \dots, \bar{\xi}'_n$ は $\bar{\xi}_{r+1}, \dots, \bar{\xi}_n$ だけに係ることがわかったとする。このことは、はじめ全体としてひとつの意味をもつと思われたものが、実はふたつの異なった意味をあわせて表していたと解釈できる。このような分離のできる不変な集合を可約であるといい、どのような操作をほどこしてもそのように分離できないものは既約であるという。（ただし、ほどこしてもよい“操作”の範囲はあらかじめ指定してあるとする。）

このことから、可約な特徴量はあるひとつの意味を表しているとはみなせない。既約であってはじめて何か“ひとつ”の意味を表していると考えられる。最後のステップとして、このようにして得られた既約な特徴量を、その変換の仕方によって分類することができる。変換の仕方が違うということは、その表す意味に“本質的”な違いがあることを示唆している。

7. かくれた対称性をさがせ

それでは特徴量を選別するのにどのような変換群をほどこせばよいのか。それを決めるのは、考えている現象に対する深い理解である。その現象が（等方性物質のように）もともと何らかの対称性をもっていれば、その現象に関する記述はその対称性を定義する変換群に対して不変な意味をもっていなければならない。したがって、そのような変換群をほどこして特徴量を選別することができる。しかし、そのような表面的な対称性がある必要は必ずしもない。

考えている特徴量は、それを用いて何らかの関係を記述したり、何らかの別の量を導いたりするのに用いるはずである。もしかりにその現象がいま考えているものと何らかの意味で異なっていたとしても、特徴量から関係や別の量を導く“手続き”が論理的には同じ“はず”であると見抜ければ、そのような別の現象に移す“仮想的な”変換の群を考えることができる。そのような仮想的な変換群をかくれた対称性とよぼう。

このようなかくれた対称性に関して何らかの不変な意味をもつ特徴量を選別したとすれば、それによって表される関係式の形も不変な意味をもつはずである。たとえば右辺と左辺は同じ形の変換を受ける特徴量でなければならないし、また同じ形の変換をうける特徴量しか足したり引いたりすることができない。（抽象的で分かりにくいかもしれないが、そうでないと関係式の意味がおかしくなる。）これを利用して関係式の合理性を確認したり、場合によってはそのような“形式的合理性”のみから関係式を引き出したりすることができる（そのような理論は“美しい理論”とよばれている）。

しかし、かくれた対称性を見抜くには、現象に対する深い理解と洞察力が必要である。ガロアは n 次代数方程式の n 個の根から作られるさまざまな式が n 個の根に置換（ n 次対称群およびその部分群）をほどこしたときどのような変換を受けるかということに着目して、後にガロア理論とよばれる代数方程式の代数的可解性の理論を構築し

た。アインシュタイン（Albert Einstein：1879-1955）は慣性系での物理法則には時空のローレンツ変換、一般の物理法則には時空の局所ローレンツ変換というかくれた対称性があることを見抜き、特殊相対性理論および一般相対性理論を導いた。これはほとんど形式的合理性のみをもとにした“美しい理論”の典型的な例であり、今日の最先端の統一場理論でも基本的な考え方となっている。たとえば場の方程式に関するネーターの定理をもとにして、時空および場の状態空間（のつくるファイバーバンドル）のかくれた対称性（ゲージ変換）を見抜くことによっていろいろなゲージ場（ゲージ粒子）を導くことができる。

8. 変換群を見抜く、それが幾何学だ！

かくれた対称性としての変換群はひと通りとは限らない。ある変換群がかくれた対称性ならその部分群もそうである。すると、ある特徴量は全体の変換群に対しては不変量ではないが、ある部分群に対しては不変量であるかもしれない。（極端な場合として恒等変換のみからなる部分群を考えれば、あらゆる量は不変量となる。）また、各々の特徴量に、それが不変量となるような部分群が対応しているとすれば、それらの部分群の包含関係によってそのような特徴量を系統的に分類できる。このようにして、変換群の“階層構造”から特徴量の“階層構造”を導くことができる。

これはガロア理論の基本的理念であるが、物理学でも古くから着目されていた。たとえばキュリー（Pierre Curie：1859-1906、夫人の Marie Curie：1867-1934 ではない）は「物理系の応答は対称性の群を縮小することはない」（たとえばスカラー入力によってベクトル応答が生じることはない）というキュリーの法則を示した。近代的な熱統計力学、物性物理学でも、いろいろな臨界現象が変分原理に基いて、諸量を不変にする変換群の構造から説明され、統一場理論でも場の生成消滅がかくれた対称性としての変換群の構造変化（対称性の破れ）と結びつけられている。

ドイツの数学者クライン（Felix Klein：1849-

1925)は有名なエルランゲン大学教授就任講演(エルランゲン目録)の中で、幾何学とは種々の変換群に対する不変性の構造を研究する学問であると宣言し、射影幾何学はそれを不変にする変換群(射影変換群)を適当に限定することによってユークリッド幾何学やいろいろの非ユークリッド幾何学が実現できることを示した。この意味から、これまで述べてきた群論の応用はまさに“幾何学的応用”とよぶのがふさわしいであろう。固有値問題への“代数的応用”に対するものとして筆者がいったかったのはこのことである。

以下で、“画像理解”への群論の幾何学的応用の例を示す。くわしく説明できないが、“フィーリング”だけでも感じとってほしい。

9. オプティカルフローの変換

“画像理解”とは画像から、そこに写っている物体や情景に関する3次元的情報を引き出す研究であり、画像を用いた製品検査・自動組立、移動ロボットの制御などに関連して今日最も注目を集めている分野のひとつである。すでに実理的な技法がいろいろ開発されているが、ここでは特殊な理論的問題をとりあげる。

固定したカメラに対して物体が運動すると(あるいは固定した物体に対してカメラを移動させると)画像面(すなわちカメラの撮像面)に物体像の2次元運動が生じる。これをオプティカルフローという。もし物体表面に細かい斑点があれば、シャッターを短時間開放しておくことにより、フィルム上に短い線分からなる流れの像が得られ、オプティカルフローを“可視化”することができる(図1)。

いま、物体が平面であるとする。画像上に画像の中心(カメラのレンズの中心軸に対応する点)を原点とする xy 座標系をとると、平面物体によって生じるオプティカルフロー (u, v) は必ず次の形をしていることが証明できる。

$$\begin{aligned} u &= u_0 + Ax + By + (Ex + Fy)x \\ v &= v_0 + Cx + Dy + (Ex + Fy)y \end{aligned} \quad (1)$$

8個の定数 $u_0, v_0, A, B, C, D, E, F$ がオプティカルフローを完全に特徴づける特徴量である。これらをフローパラメータとよぼう。たとえば画像上の4点 (x_i, y_i) でのフロー $(u_i, v_i), i = 1, 2, 3, 4$, がわかれば8個の方程式が得られ、フローパラメータ $u_0, \dots, F$ は一意に定まる。あるいは最小二乗法などによるあてはめを行なってもよ

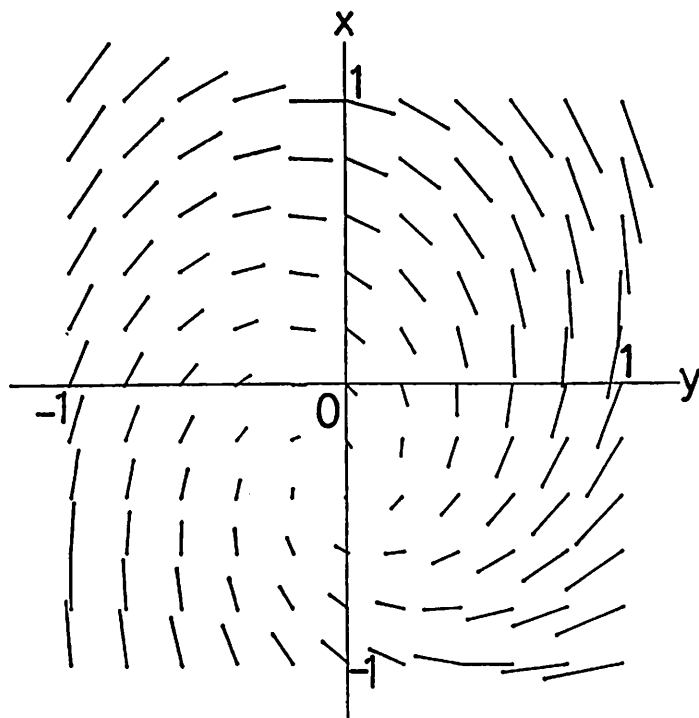


図1
オプティカルフロー

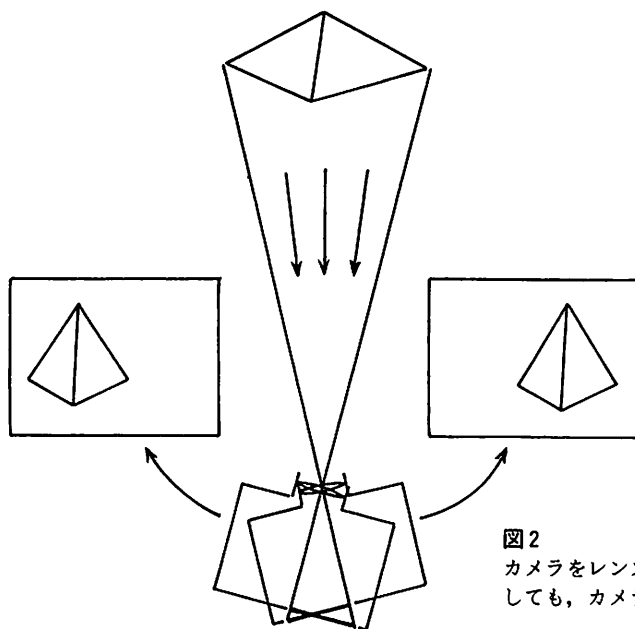


図2
カメラをレンズの中心の回りに回転しても、カメラのとらえる光は同じ。

い。このようにして画像上で測定した $u_0, \dots, F$ の値から、その平面物体が空間中のどこにあり、どのように運動しているかを知ること、すなわち 3次元解釈が課題となる。

しかし、フローパラメータの各々の“意味”は未だ明らかではない。これを調べるには“変換群”を登場させればよい。そのような変換群としては、フローパラメータから 3次元情報を引き出す 3次元解釈の“手続き”が不変であるようなものが望ましい。そこで次のような変換を仮想的に考えてみる。いまかりにカメラをレンズの中心のまわりに回転したとする。すると画像面上に現れる像は異なったものになるが、図2からわかるように、レンズのとらえる光そのものは同じである。したがって、撮像面の大きさからくる制約を考えなければ、画像のもつ情報は本質的に同じである。そこで、そのようなカメラの仮想的な回転の引き起こす画像の変換をつくる群を考えよう（群をなすことは明らかである）。

そのような仮想的な変換をオプティカルフロー(1)にほどこすとどうなるだろうか。すぐにわかるのは、カメラは依然として平面の運動をとらえているはずであるから、まったく同じ形

$$u = u'_0 + A'x + B'y + (E'x + F'y)x$$

$$v = v'_0 + C'x + D'y + (E'x + F'y)y \quad (2)$$

に書けなければならないということである。したがってフローパラメータの変換 $u_0, \dots, F \Rightarrow u'_0, \dots, F'$ が引き起こされる。これはどのような変換だろうか。

10. 微小変化はすべてを語る——リー群とリー代数

そのような変換は図2のカメラ撮像の幾何学的関係から画像の変換の式を具体的に計算すれば求まるはずであるが、実際にこれを計算しようとするれば気が遠くなるほど式が複雑になる。しかし、幸いなことに、そのようなややこしい計算をしなくてすむ功妙な方法が存在する。

カメラの回転は行列式1の直交行列 R で表せる。そのような行列の全体は 3次元回転群 $SO(3)$ (正式には“3次元特殊直交群”) という群をつくる。この $SO(3)$ が画像の変換群を引き起こし、 $SO(3)$ からの対応が準同型となっている。その変換群がフローパラメータ $u_0, \dots, F$ の変換を引き起こすが、これは9個のパラメータ $u_0, \dots, F$ のつくる9次元パラメータ空間上の $SO(3)$ の表現 (すなわち $SO(3)$ と準同型な線形写像) となっていることがわかる (詳細省略)。

3次元回転群 $SO(3)$ は3つのパラメータで指

定できることが知られている。一般に有限個の連続な値をとるパラメータによって指定される群をリー群という。SO(3)は代表的なリー群である。リー群であることの最も重要な帰結は、単位元の近傍の微小要素の代数的関係を調べれば、リー群全体に関する性質がほとんど導けるということである。この重要な性質を最初に研究したのはノルエーの数学者リー (Sophus Lie : 1842-1899) であり、微小要素の代数的構造はリー代数 (古い本ではリー環) とよばれている。これはベクトル空間に要素同志の積を導入したようなもので、線形代数の範囲で解析できるので大変扱いやすい。

以上により、フローパラメータ $u_0, \dots, F$ の変換を知るにはカメラを微小に回転したときに生じる画像の無限小変換を調べさえすればよい。5節で生徒の性格を調べるのに「火事だ」と大声で叫ぶといったが、実は小声でそっとささやくだけでよい。これを聞く生徒の顔に現れる表情のわずかな変化を観察すれば非常時の挙動がすっかりわかってしまう！

無限小変換を計算するのは極めて容易である。変換後の値を $u_0' = u_0 + \delta u_0, \dots, F' = F + \delta F$ とおいて、計算の途中で微小量 $\delta u_0, \dots, \delta F$ の2次以上の項が出るたびにそれを無視すればよい。したがって微小量 $\delta u_0, \dots, \delta F$ に関しては常に一次式の関係しかなく、1次式は線形代数の範囲で解析できる。詳細は省略するが、結論として次のことがわかる。次のように新しい特徴量 $\{a_i\}, \{b_{ij}\}$ を定義する。

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{f} + fF\right), a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{u_0}{f} + fE\right), \\ a_3 &= \frac{1}{2}(C-B) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{3}(2A-D), b_{22} = \frac{1}{3}(2D-A), \\ b_{33} &= -\frac{1}{3}(A+D), b_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{f} - fF\right), \\ b_{31} &= \frac{1}{2}\left(\frac{u_0}{f} - fE\right), b_{12} = \frac{1}{2}(B+C), \\ b_{32} &= b_{23}, b_{13} = b_{31}, b_{21} = b_{12} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

するとカメラの回転 R に対して $\{a_i\}$ はベクトルとして、 $\{b_{ij}\}$ はテンソルとして次のように変換されることがわかる (T は転置行列を表す)。

$$\begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} b_{11}' & b_{12}' & b_{13}' \\ b_{21}' & b_{22}' & b_{23}' \\ b_{31}' & b_{32}' & b_{33}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \quad (6)$$

証明は式(5)、(6)の無限小変換と、フローパラメータの定義から導かれる無限小変換とが一致することを確認するだけでよい (リー群の威力である!)。式(5)、(6)は $\{a_i\}, \{b_{ij}\}$ がいずれも特徴量の不変な集合であり、したがってそれぞれ別々の“意味”をもっているとみなすことができる。さらに、これらが既約であることも無限小変換のつくるリー代数を調べることによって証明できる ($\{a_i\}, \{b_{ij}\}$ はそれぞれ SO(3) のウェイト 1, 2 の既約表現の基底になっている)。

それでは $\{a_i\}$ と $\{b_{ij}\}$ はどういう意味をもっているのか。調べてみると次のことがわかる。物体がカメラ (のレンズの中心) に対して相対的位置関係を一定に保ったままそのまわりを回転する“軌道運動”を考える。たとえば風のように糸をつけてカメラを中心にして振り回すようなものである。このとき画像面に生じるオプティカルフローでは $\{b_{ij}\}$ がすべて 0 になる。すなわち $\{a_i\}$ は物体の軌道運動を記述する特徴量である。

物体が軌道運動をしても図2からわかるようにレンズのとらえる光は本質的に同一であるから、そのようなオプティカルフローをいくら解析しても物体の位置や向きに関する3次元情報は何も得られない。カメラに相対的な位置関係を変える運動 (近づいたり遠ざかったりする運動) によるオプティカルフローを調べて初めて3次元情報が引き出せる。すなわち $\{a_i\}$ は3次元情報を含んでいない部分、 $\{b_{ij}\}$ は3次元情報を含んでいる部分で

ある。

このことは具体的な計算によって確認することができるが、冷静に考えると次のような“形式的合理性”からも当然のことである。物体の軌道運動がオプティカルフローを引き起こすにもかかわらず3次元情報を含まないことは明白である。その軌道運動を特徴づける唯一の量はベクトルである(たとえば“角運動量”)。したがって、フローパラメータからベクトルとして変換する部分が分離できなければならないはずである。

このように、初め気がつかないかくれた理論構造が次々と明らかになるのは群論による幾何学的考察の威力である。

11. アーベル群と相対不変量——シューアの補題

フローパラメータのさらに細かい構造を知るには $SO(3)$ の部分群をほどこせばよい。そこでカメラをレンズの中心軸のまわりに回す回転からなる部分群を考えよう。これは2次元回転群(“2次元特殊直交群”) $SO(2)$ を考えることに等しい($SO(2)$ と“同型”である)。これによって引き起こされる画像の変換は原点のまわりの回転である。あるいは xy 座標系の像に相対的な回転ともみなせる。画像にはもともと固定された座標系などなく、解析の都合で便宜的に定めるものであるから、このような見かけの変換を行なっても画像自体のもつ意味は不変である。したがって、この変換群に関してフローパラメータを選別すれば、画像座標系のとり方によらない“フローそのもののもつ本質的な意味”が抽出できると期待できる。

ところで2次元回転群 $SO(2)$ と3次元回転群とでは重大な相違がひとつある。それは $SO(2)$ がアーベル群(可換群)であることである。(角度 θ の2次元回転と角度 θ' の2次元回転の合成は角度 $\theta + \theta'$ の2次元回転に等しく、合成の順序によらない。一方、互に直交する軸のまわりの3次元回転を順序を変えて合成してみるとわかるように $SO(3)$ はアーベル群ではない。) アーベル群であることの重要な帰結は、複素数の範囲で考えればすべての既約表現は1次元であることである。こ

の事実はシューアの補題として知られている(シューアの補題はいろいろのことを含んでいるが、これはそのひとつの変形である)。このことと $SO(2)$ が“完全可約”であること(これは $SO(2)$ が“コンパクト”であることから導かれる。詳細省略)とをあわせると、 $SO(2)$ のすべての表現は1次元既約表現の直和に簡約されて、その基底として、座標系の角度 θ の回転に対して

$$\xi' = e^{in\theta} \xi \quad (7)$$

と変換するような ξ がとれる。ただし i は虚数単位、 n は整数である。このように変換する量 ξ をウェイト n の相対不変量とよぶ。特に $n=0$ のものを(絶対)不変量という。

数学的なことは教科書にゆずり、フローパラメータ $u_0, \dots, F$ にこれを実行すれば次のような相対不変量が得られる。

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= u + iv, & K &= E + iF \\ T &= A + D, & R &= C - B \\ S &= (A - D) + i(B + C) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

カメラ(xy 座標系)をレンズの中心軸のまわりに角度 θ だけ回転すると、これらは次のように変換する。

$$\left. \begin{aligned} U_0' &= e^{-i\theta} U_0, & K' &= e^{-i\theta} K \\ T' &= T, & R' &= R \\ S' &= e^{-2i\theta} S \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

すなわち、 T, R は絶対不変量、 U_0, K はウェイト -1 の相対不変量、 S はウェイト -2 の相対不変量であり、それぞれが完全に独立し、自分自身で不変な集合をつくっている。このことから、それぞれがある固有の意味をもっていると期待できる。これを確かめるにはそれぞれが非零で残りが零であるようなフローを考えてみればよい。それを図示したのが図3である。これからわかるように U_0 は“並進”、 T は“発散”(わき出し)、 R は“回転”(うず度)、 S は“せん断”、 K は“扇状変形”を表している。これらは座標系のとり方によらない、フローそのものに本質的な概念であることがわかる。

フローパラメータ $u_0, \dots, F$ を用いて対象面の位置や運動を計算する3次元解釈の式が得られる

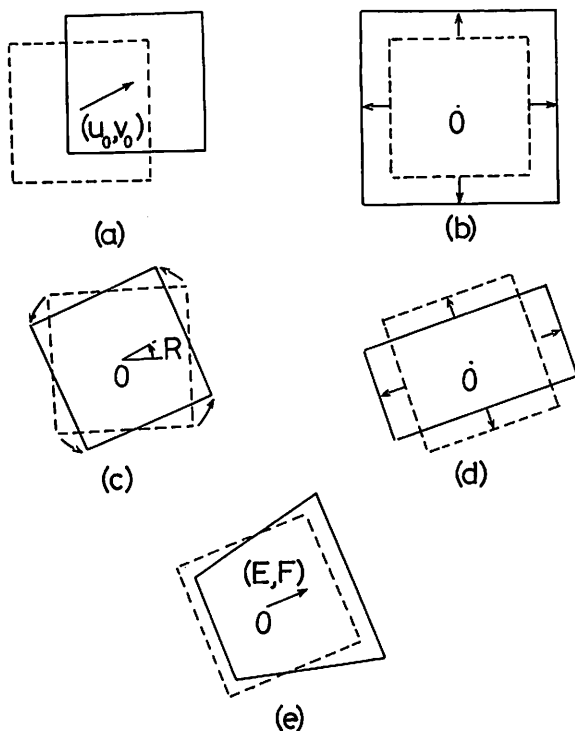


図 3

- (a) 並進
- (b) 発散
- (c) 回転
- (d) せん断
- (e) 扇状変形

これらは座標系のとり方によらない
不変な概念である。

とすれば、それらの式は相対不変量 U_0 , K , T , R , S で書き直せるはずである。すると対象面の位置や運動もまた相対不変量で表されなければならない。また方程式の両辺のウェイトは等しく、ウェイトの同じ項しか足したり引いたりすることができない。このような“形式的合理性”から3次元解釈のあるべき方程式の形がある程度予測できる。これも群論による幾何学的考察の威力である。

12. 数理科学の心

もちろん、このような群論的考察なしでも、直接的な計算によって3次元解釈の方程式を導くことは可能である。しかし、このような“かくれた理論構造”を知ることによってはるかに見通しのよい形に整理できるだけでなく、直接的計算では気づかない事実がいろいろ浮かびあがる。

上の例でも、ほどこす群はほかにも考えられる。たとえば $SO(2)$ のみでは T と R とは同じ変換をうける(絶対不変量)ので、たとえば T と R のかわりに $T+R$, $T-R$ としてもよいようであるが、実は x 軸と y 軸をとりかえる反転を考えれば

$T' = T$, $R' = -R$ と別々の形に変換するので、別々の意味をもつものとして識別できる。また扱える対象はオプティカルフローに限らない。静止物体像に関しても、それを特徴づけるパラメータを選別したり、その意味を解析したりすることができる。

何度もいうが、忘れてならないのは、ほどこす変換群は“仮想的”なものであって、実際に変換を実行するのではない点である。画像理解においても、カメラは固定し、決して回転させたりしない。画像上には xy 座標系をただひとつ固定して、決して回転させたり反転させたりしない。しかし、そのような変換を仮想的に考えることによって、かくれた理論構造を顕在化(暴露?)するのである。これが群論の幾何学的応用にほかならない。

ひとつの数理的手法は多くの具体的な問題に応用できる。それが“数理科学”の精神でもある。実際、数理的な論文では「本論文の手法は他の多くの問題に応用できると思われる」と結ぶことが多い。しかし、ある具体的な問題で成果をあげた数理的手法を他の問題へ応用することは実は容易な

ことではない。その手法を熟知するだけでなく、その背後にかくれた理念にまでさかのぼって理解しなければならないからである（これはその手法の著者自身が意識していないことも多い）。本文の例を通してこのことを何かしら感じとって頂ければ幸いである。

参考文献

1. 金谷, 対応点を用いない物体の運動認識の理論, 情報処理学会論文誌, 27-3(1986), 373-382.
2. 金谷, 3次元復元のための座標回転不変量の構式, 電子情報通信学会論文誌 D, J 70-D(5)(1987), 937-945.
3. K. Kanatani, Camera rotation invariance of image characteristics, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 39(1987), 328-354
4. K. Kanatani, Transformation of optical flow by camera rotation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10-2(1988), 131-143.

(かなたに・けんいち, 群馬大学・工学部)

コンフリクトの数理

—メタゲーム理論とその拡張—

W.ハイブル/M.フレーザー 著

岡田憲夫/福島雅夫 訳 9月発行予定

「もめごと」「紛争」「闘争」「葛藤」「対立」など、考え方や価値観、利害に衝突が生じる状態が「コンフリクト」である。本書ではそれを「ゲーム理論」の立場から数理科学的に取り上げ、分析するうえでの基本的な考え方と方法について紹介する。「コンフリクト解析学」はきわめて簡便で、実用性が高いにもかかわらず、わが国ではあまり紹介もされず、適用されてもいない。本書はこの分野のかっこうの入門書といえる。

数値微分積分法

—BASICとPADによる—

長田直樹 著

B 5 4800円

パソコンカルキュラス

—初等微積分の数値的方法—

ローゼンバーク著/武智真一訳 A 5 2900円

新修応用解析学

梶原壤二 著

B 5 3500円

物理、化学、地学、生物、古典力学、量子力学、量子化学、流体力学など基礎科学、ならびにこれらを応用する諸工学に活用される数学の解説書。例題は各企業の入社問題、諸大学院の入試問題、公務員採用試験などから精選し、詳しく解説。練習問題も豊富で、解答つき。

梶原壤二著の姉妹書——

新修解析学

B 5 2900円

新修線形代数

B 5 2900円

独修微分積分学

B 5 2900円

現代数学社 606京都市左京区鹿ヶ谷西寺ノ前町1
☎ (075)751-0727振替京都1-11144