

カメラキャリブレーションの数理

——最良格子パタンはどのようにして導かれたか——

その3(最終回) 最良格子パタン

金谷 健一

1 はじめに

前々回, 前回はカメラの焦点距離の意味とそのキャリブレーションの原理について述べ, デジタル画像処理から求まる消失点の信頼性を考慮すれば, 格子パタンの最適な配置が理論的に定まることを示した。しかし, これですべてが解決されたわけではない。普通, 工学の問題では必ず“次の問題”が控えているものである。今回はさらにほかの条件を考慮して, 実際に使いやすい装置にまで高める道筋を示す。その過程で得られるのが, 今回のメインテーマ“最良格子パタン”である。

2 格子パタンの変形

これまでの道筋をよく考えてみると, 焦点距離の計算を格子パタンの消失点の計算に帰着させることは焦点距離の意味に基づく本質的なプロセスであるが, 格子の直交性を利用することに本質的な意味はないことに気づく。これは単に空間中での角度情報を利用していただけであり, 任意の角度でよい。例えば格子線が角度 α で交差しているとすると, 前々回に示した焦点距離を定める式は

$$xx' + yy' + f^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + f^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + f^2} \cos \alpha \quad (1)$$

となる。両辺を2乗して整理すると f^2 は2次方程式

$$AX^2 + BX + C = 0 \quad (2)$$

の解として求まる。ただし, 係数 A, B, C はそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned} A &= \sin^2 \alpha \\ B &= 2(xx' + yy') - (x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2) \cos^2 \alpha \\ C &= (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

2次方程式(2)は二つの解をもつが, これは式(1)の両辺を2乗したからである。偽の解は式(1)で右辺と左辺とで符号が異なるものの解である。したがって, 二つの解を式(1)に代入して右辺と左辺の“符号が同じ”ものを選べば正しい解が得られる。

余談になるが, なぜ式(1)を“満たす”ものを選ぶと書かなかったかという点, 例えば計算機プログラムで(左辺) - (右辺) = 0 かどうかの判定を行なうと, 計算機の丸め誤差(例えば平方根が無限小数となる場合は適当な桁で打ち切られる)のため, 完全に0にならず, 誤った判定が行なわれる可能性があるためである。このように数学を離れた考察が必要となるのも工学の問題に特有のことであり, 工学の研究をおもしろくしている要素の一つである。

しかし前々回に指摘したように, 消失点の座標値を計算に用いるのは計算機による計算に不都合であり, 理論的解析にも不便である。これも計算上および理論上都合のよい形に書き直すことができるが, 詳細は省略する。直交格子の場合と同様に図1のようにパタンを設置すると, 直交格子の場合と同じような解析により, 計算される焦点距離 f の分散は, 最終的に式(4)

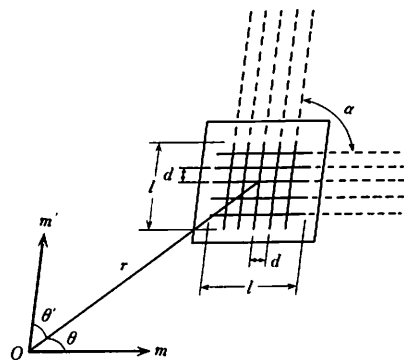


図1 格子パタンの配置

$$V[f] = \frac{72\epsilon^2 r^5 (\sin \theta (\cos \theta' - \cos \theta \cos \alpha)^2 + \sin \theta' (\cos \theta - \cos \theta' \cos \alpha)^2)}{N(N^2-1)\rho f^3 d^2 l^3 (2 \cos \theta \cos \theta' - (\cos^2 \theta + \cos^2 \theta') \cos \alpha)^2 g(\theta, \theta')} \quad (4)$$

$$g(\theta, \theta') = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\sin^4 \alpha - (\cos \theta - \cos \theta' \cos \alpha)^2 - (\cos \theta' - \cos \theta \cos \alpha)^2 - 2(\cos \theta - \cos \theta' \cos \alpha)(\cos \theta' - \cos \theta \cos \alpha) \cos \alpha) \quad (5)$$

$$\theta = \theta' = \sin^{-1} \sqrt{\frac{1 + \sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) + 14 \sin^2(\alpha/2) + 1}}{6}} \quad (6)$$

$$\beta = \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - 5 \sin^2(\alpha/2) + \sqrt{\sin^4(\alpha/2) + 14 \sin^2(\alpha/2) + 1}}{6 \cos^2(\alpha/2)}} \quad (7)$$

の形に表される。ただし、分母に現われる関数 $g(\theta, \theta')$ は上式(5)で定義する。式(4)の分散 $V[f]$ が最小になる角度 θ, θ' を計算してみると、上式(6)の値が得られる。このとき、パタンは画像面に対して角度 β をなす(上の式(7))。

このように置いた格子パタンを撮影すると、画像の中央で格子線は次の角度 γ で交わるように見える。

$$\gamma = \pi - \cos^{-1} \frac{2 \sin^2(\alpha/2) - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \quad (8)$$

3 最良格子パタン

このように一般化すると、交差角 α を適切に選べば直交格子パタンよりよい結果が得られるのではないかという期待が生じる。図2(a)は、式(4)に式(6)の角度 θ, θ' を代入したものを交差角 α についてプロットしたものである。ただし、縦軸は $\alpha = \pi/2$ のとき1になるようなスケールを用いている。これを見ると $V[f]$ は確かに $\pi/2$ より小さいある角度で最小となり、直交格子に比べて改善の可能性があることがわかる。実際にその角度を解析的に計算してみると次のようになる。

$$\alpha = 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{3}{10}} = 66.42182152 \dots^\circ \quad (9)$$

このときの分散は直交格子の場合を1とするスケールで0.78196029...である。誤差の大きさは標準偏差(=分散の平方根)で評価できるから、このことは焦点距離の誤差が直交格子の場合に比べて約85%になることを意味している。

この最適な α の値に対して、式(6)の最適なパタンの傾きの角度は次のようになる。

$$\theta = \theta' = \sin^{-1} \sqrt{\frac{3}{5}} = 50.76847951 \dots^\circ \quad (10)$$

図2(b)は最適な α の値に対して、分散 $V[f]$ の逆数の等高線を θ - θ' 平面に図示したものである。定義域は図の直線で囲まれた部分である。逆数で示したのは境界上で無限大になるためである。これをみれば式(10)の θ, θ' の値のとき $V[f]$ が最小になる様子がよくわかる。

このように最適に傾けたとき、式(7)で与えられるパタンと画像面との角度 β は次のようになる。

$$\beta = \cos^{-1} \sqrt{\frac{3}{7}} = 49.1066053 \dots^\circ \quad (11)$$

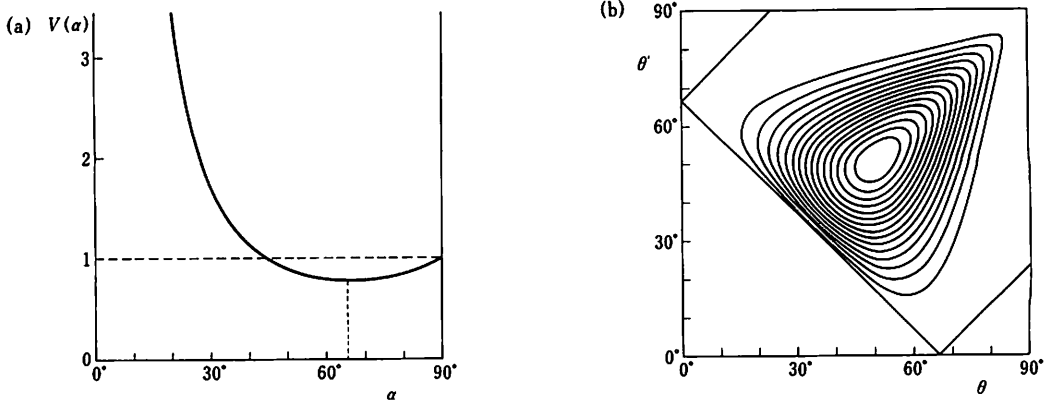


図2 (a) 格子線の交差角 α に対する分散 $V[f]$.
(b) パタンの向きと計算の信頼性の関係を表す等高線。

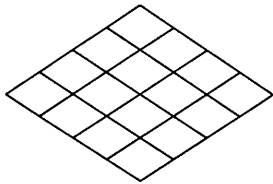


図3 最良格子パタン

このときの格子線の像は画像の中央で式(8)の角度 γ で交わるが、式(9)の最適な α の値を代入してみるとちょうど $\pi/2$ になる。すなわち、パタンを最適に傾けると、格子線は画像の中央でちょうど直交するように見える。この事実は式(9)の角度に数学的に普遍的意味があることを示唆している。そこで、式(9)の角度で交差する格子を最良格子パタンと呼ぶ(図3)。

これでめでたしめでたしと思えるが、工学の研究ではこれで終わりということはない。いくら頭の中で考えてこれで十分と思っても、実際に実現して現場で使用してみると、必ず何かの問題点が見つかるものである。しかも、それは時には思いもよらないものであることもあり、工学の研究の魅力でもある。以下、これについて述べる。

4 格子パタンの形状

最良格子パタンは式(11)の最適な角度 β で傾ける限り、どちらの方向に傾けてもよい。特に水平軸の周りに傾けて、パタンが斜め上を向くようにすると、照明が天井にある場合は影ができないので都合がよい。あるいは内部に光源を置いて、下から照明してもよい。しかしその画像を見ると、カメラの位置を前後に調節してパタンの手前の部分が正方形のディスプレイ面ちょうどいっぱいに写るようにしても、奥行き方向にパタンが縮むので右上および左上で大きく欠けてしまう(図4)。

これを解決するためには、格子パタンを逆台形の領域に描いて、最適な角度に傾けたときちょうど正方形になるようにすればよい。いまディスプレイ面の画角を 2Ω とする。正方形のディスプレイ面が $M \times M$ 画素で、焦点距離が f 画素であるとする、 Ω は次のように与えられる(図5(a))。

$$\Omega = \tan^{-1} \frac{M}{2f} \quad (12)$$

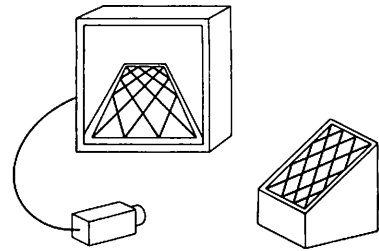


図4 長方形領域だと画像の欠損が起こる。

もちろん、焦点距離 f はこれからキャリブレーションしようとするときには正確には未知である。しかし、ある範囲にあることはあらかじめわかるので、その推定値を用いればよい。いま、図5(b)のような台形領域を考える。これを角度 β だけ傾けると、横から見ると図6(a)のようになっている。三角形 $\triangle OPQ$ に三角関数の正弦法則を適用すると

$$\frac{QP}{\sin \Omega} = \frac{OP}{\sin (\pi/2 - \beta)} = \frac{OP}{\sin (\pi/2 - \Omega + \beta)} \quad (13)$$

となる。したがって

$$PQ = \frac{\sin \Omega}{\cos (\Omega - \beta)}, \quad OP = \frac{\cos \beta}{\cos (\Omega - \beta)} OQ \quad (14)$$

が得られる。同様に三角形 $\triangle OP'Q$ に三角関数の正弦法則を適用して

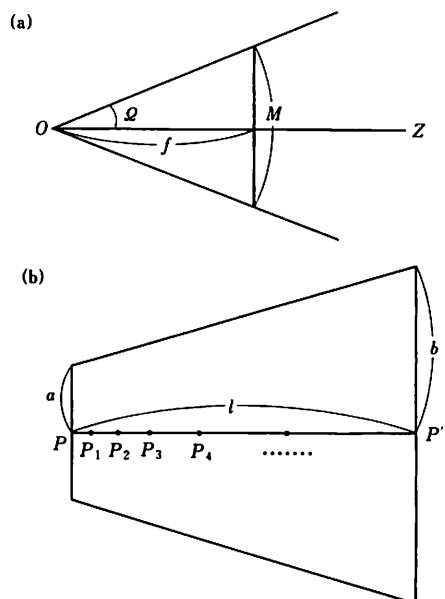


図5 (a)ディスプレイ面の画角。(b)台形領域。

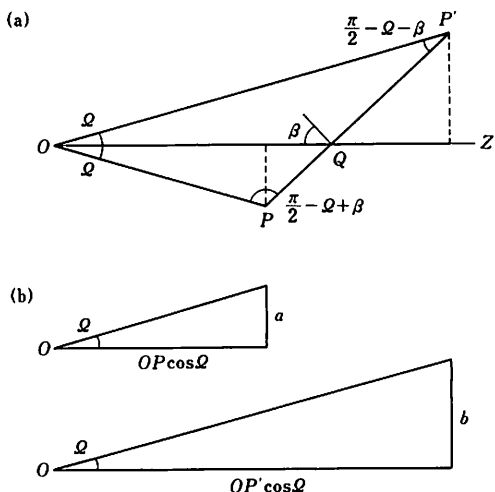


図6 視点 O からみたパタンの関係。

$$P'Q = \frac{\sin \Omega}{\cos(\Omega + \beta)}, \quad OP' = \frac{\cos \beta}{\cos(\Omega + \beta)} OQ \quad (15)$$

が得られる。図6(b)より、図5(b)の台形の底辺の半分 a, b は $a = OP \sin \Omega, b = OP' \sin \Omega$ となるから、それぞれ次のようになる。

$$a = \frac{\sin \Omega \cos \beta}{\cos(\Omega - \beta)}, \quad b = \frac{\sin \Omega \cos \beta}{\cos(\Omega + \beta)} \quad (16)$$

一方、台形の高さ l は $l = PQ + P'Q$ であるから、

$$l = \sin \Omega \left(\frac{1}{\cos(\Omega + \beta)} + \frac{1}{\cos(\Omega - \beta)} \right) OQ \quad (17)$$

となる。以上より、比 $a:b:l$ は次のようになる。

$$a:b:l = \cos \beta \cos(\Omega + \beta) : \cos \beta \cos(\Omega - \beta) : \cos(\Omega + \beta) + \cos(\Omega - \beta) \quad (18)$$

これで画像の欠損の問題は解決した。先ほど述べたようにこの台形の形は画角に依存するので、キャリブレーションしたいカメラの種類に応じて、例えば“望遠用”、“標準用”、“広角用”のように複数用意する必要がある。どれを使えばよいかは画像をながめればすぐ見当のつくことであるが、もしわからなければ“標準用”を使えばよい。原理的にはどれを使っても(信頼性のわずかな違いを除いて)結果に大差ない。

5 格子線の太さ

しかし、このようにディスプレイ面いっぱいに写るようにしても、画像をよく見ると、当然のことながら

格子線が遠方に行くほど細くなり、遠方の部分では画像処理が難しくなることがあるのに気がつく。これは格子線を太くすれば解決できるが、そうすると手前の部分が太すぎて直線当てはめの精度が低下する。少し考えると、格子線を画像に投影したときに一定の太さになるように、手前部分を細く、遠方部分を太くしておけばよいことを思いつく。

線が一定の太さに投影されるには、線の太さが視点からの距離に比例すればよい。厳密に計算するのは大変なので(というより、それほど厳密に計算する意味もないので)、奥行き方向のみに注目すれば、図6(a)より最も手前の部分と最も遠方の部分で線の太さの比が $OP:OP'$ になるようにすればよい。式(14)、(15)より、線の太さの比

$$\cos(\Omega + \beta) : \cos(\Omega - \beta) \quad (19)$$

とすればよいことがわかる。

6 格子線の間隔

これでほとんどの問題が解決され、パタンの画像を見るとディスプレイ面いっぱいに太さ一定の直線が美しく写っていることが確かめられる。しかしこれも当然であるが、手前部分では格子が粗く遠方部分では密になっている。格子の数が多ほど精度が向上する。しかし、格子線の数を増やすと手前部分では依然として粗であっても遠方部分で密になりすぎて画像処理に不都合である。これも少し考えると、投影すると一定間隔になるように格子間隔を手前部分では狭く、遠方部分では広くすればよいことに気づく。

格子の間隔を図5の台形の中心線 PP' 上の切片で測ることにすると、この上に点 $(P=)P_0, P_1, \dots, P_N(=P')$ をとって、これらが等間隔に写るようにするには図6(a)より、点 P からの距離を $k=0, 1, \dots, N$ に対

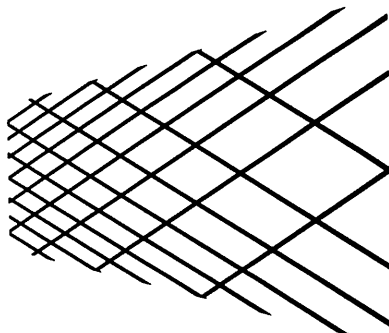
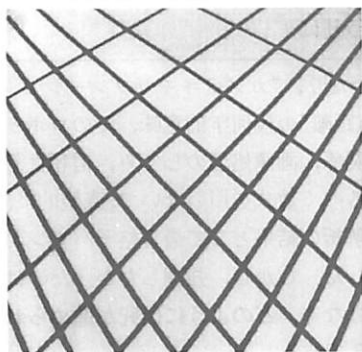
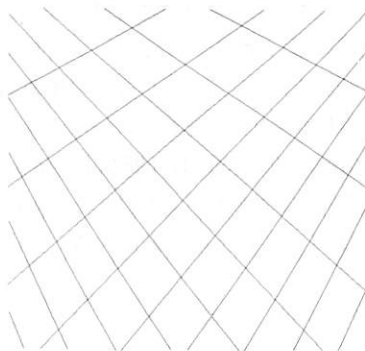


図7 形状、線の太さ、間隔を考慮した最良格子パターン。

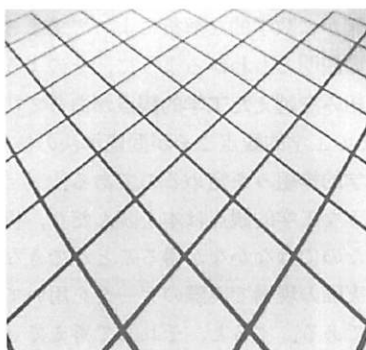


(a)

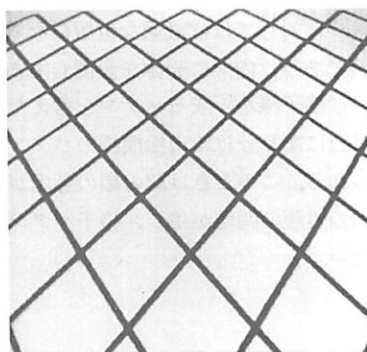


(b)

図8 (a)図7のパターンを撮影した画像、(b)画像処理によって抽出した直線。



(a)



(b)

図9 (a)線の太さも間隔も考慮しない場合、(b)線の太さを考慮して間隔を考慮しない場合。

して次のようにとればよいことが計算できる。

$$PP_k = \frac{l \cos(\Omega + \beta)}{\cos(\Omega + \beta) + \cos(\Omega - \beta)} \times \left(1 - \frac{\sin(\Omega - 2\Omega k/N) \cos(\Omega - \beta)}{\sin \Omega \cos(\Omega - \beta - 2\Omega k/N)} \right) \quad (20)$$

図7はこのようにして作成したパターンである。これを撮影した画像が図8(a)である。比較のために線の太さも間隔も考慮しない場合、線の太さを考慮して間隔を考慮しない場合をそれぞれ図9(a)、(b)に示す。

7 画素精度の推定

焦点距離の信頼性を最大にするにはパターンの形状とカメラに対するパターンの傾きを最適に決めればよく、画像の精度そのものには関係しない。しかし、計算した焦点距離の信頼性を定量的に、例えば水準95%の信頼区間として評価しようとする、前回の解説で定義した、エッジの各画素の精度を表す定数(画素精度) ε

(単位は画素)とエッジ密度 ρ (単位は1/画素)の値を推定しなければならない。画素精度 ε のおおざっぱな推定値としては、画像上に格子線の平均幅の半分を用いればよいであろう。平均幅は、格子画像を2値化した白黒画像において黒画素の数を数えて格子線の(デジタルな)“面積”を計算し、細線化した後の格子線の総長で割ったもので近似すればコンピュータで処理しやすい。またエッジ密度 ρ は、エッジ画素の総数を格子線の全長で割れば求まる。

これらが推定できれば、最適に推定した焦点距離 f の分散 $V[f]$ が理論的に計算できる。このとき f の標準偏差は $\sqrt{V[f]}$ であり、 f の例えば水準95%の信頼区間は

$$[f - 1.96\sqrt{V[f]}, f + 1.96\sqrt{V[f]}]$$

で与えられる。

図8(a)の画像を2値化、細線化し、直線当てはめ画像処理を行なうと図8(b)の線画が得られる。これから焦点距離を計算すると、 $f = 694.38$ (画素)となる。

画像上の格子線の平均幅は7.22画素であり、画素精度は $\epsilon=3.62$ (画素)となる。また、エッジ密度は $\rho=0.81$ (1/画素)と推定できる。これから f の標準偏差を計算すると、 $\sqrt{V[f]}=0.91$ (画素)となる。したがって、水準95%の信頼区間は[693.47, 695.27]となる。実際、カメラやパタンの位置をわずかにずらすと計算される f の値が変動するが、その変動は大体この区間内に納まっている。

このパターンを用いて実際にキャリブレーションする場合は、あらかじめ最適な傾きになるように台を作り、それに張りつけておく。この台をカメラのほぼ正面に置き、カメラの光軸をほぼ水平にして撮影すると、パターンがカメラに対してほぼ最適な位置になる。図10はその試作例であり、内部に光源を設置してある。

これまでは格子線から成るパターンを考えたが、図11のように黒白に塗り分けた市松模様のパターンを使うことも考えられる。このときは線の幅の考慮がいらないが、また別の処理の問題が生じ、格子パターンとの優劣は断じがたい。

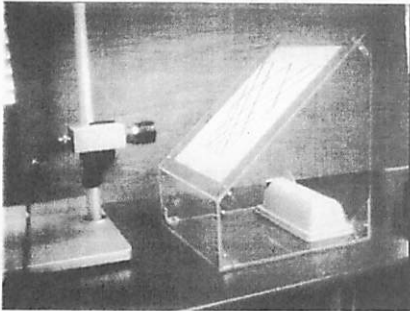


図10 試作例。

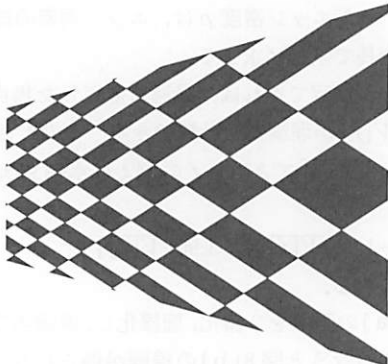


図11 市松模様による最良格子パターン。

8 おわりに

3回にわたり、“カメラキャリブレーション”とは何か、“焦点距離”の幾何学的意味、そのロボットの視覚制御との関係、画像処理のしくみ、信頼性評価の原理などをなるべく数式を用いずに、直観的に説明した。そして、解析の結果として最良格子パターンが得られることを示した。しかし、強調したかったのはそのような結果ではなく、どのように研究が進められるかというプロセスである。

ここでとりあげたのは「焦点距離の信頼性を最大にする」という、本質的に数学的な問題である。そして、その解も確かに数学的な解析によって求まる。しかし、これまでの説明でもわかるように、そのような解析は数学の枠組みを越えた工学的観点があって初めて可能になる。その工学的観点こそが問題解決の核心であり、それが数学的枠組みを定めるのである。

そのような工学的観点は本を読んだり、机の上で考えたりしたのではなかなか得ることができない。大切なことは実際の現場で実際のデータを用いて実現してみることである。すると、それまで考えてもみななかった問題があるのに気がつく。その問題を数学的に解いて、その結果を用いて試作してみると、今度はまた別の問題に気づく。このように、次から次へと新しい問題が生じてくるのが工学の問題の本質的な性質であり、数学を勉強するのとは違ったおもしろさ、楽しさである。

私のように工学の問題を数学的方法で研究していると、数学者の方から手紙を頂くことも多い。それはたいていの場合「私の研究している数学理論を工学的な問題に応用してみたいが、このような理論が使える工学的な問題にはどういうものがあるのか、どういう本を読めば懸案の諸問題がわかるのか」というものである。これには私も返答に窮する。しかし、書いた人は私がなぜ返答に窮するのかを理解できないに違いない。数学はいわば書物による学問であるから、工学についても本を読んで問題の所在がわかると考えているのかもしれない。その意味でもここでとりあげた問題を例として、物やシステムを実現する過程の中から潜在的問題を掘り当てて数学の光を当てること、その活動そのものが工学の本質であることを強調したい。

(かなたに・けんいち, 群馬大学・工学部)