

# 最高精度の基礎行列計算法

菅谷 保之\*      金谷 健一†

\* 豊橋技術科学大学情報工学系      † 岡山大学大学院自然科学研究科

ノイズのある 2 画像の対応点データから基礎行列を計算する三つのアプローチ（事後補正法，内部接近法，外部接近法）を比較し，最高精度の方法はどれかを実験的に検証する．その結果，結論として，これらはどれもほぼ同精度の最適解を計算するものの，(i) 事後補正法は精度がやや低下することがあるが常にノイズにロバストであり，(ii) 内部接近法は精度が高いが局所解に陥りやすく，(iii) 外部接近法は最も高精度でかつロバストであることを示す．さらに，事後補正法と内部接近法を組み合わせれば，外部接近法と同等な精度が得られることを示す．

## Highest Accuracy Fundamental Matrix Computation

Yasuyuki Sugaya\* and Kenichi Kanatani†

\*Department of Information and Computer Sciences,  
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

†Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

In search of the highest accuracy methods for computing the fundamental matrix from noisy point correspondences over two images, we experimentally compare the three approaches: a posteriori correction, internal access, and external access. It is observed that although all produce optimal solutions of almost equivalent accuracy, (i) the a posteriori correction may not have the highest accuracy but is always robust to noise, (ii) the internal access can reach the highest accuracy but may fall into local minima, and (iii) the external access exhibits the highest accuracy and robustness to noise. It is also shown that a combination of the a posteriori correction and the internal access achieves accuracy comparable to the external access.

### 1. まえがき

画像間の特徴点の対応から基礎行列を計算することはカメラ校正，密な対応探索，3次元形状復元，新しい視点からの画像生成など多くの処理の出発点である [6]．ノイズを含むデータからの基礎行列の計算は，基礎行列がランク 2 であるという制約付き最小化問題となり，この制約条件をどう処理するかによって解法は次の 3 種類に大別される．

**事後補正法** 制約を考慮しない最適解を計算し，それを制約を満たすように補正する．

**内部接近法** 制約が満たされるように解をパラメータ化し，その低次元パラメータ空間を探索する．

**外部接近法** 制約を満たさない解から出発し，制約が次第に満たされるような反復を行い，最適解に収束させる．

著者らは以前から事後補正法による基礎行列の高精度計算のさまざまな手法を研究してきた [9, 10, 17]．一方，内部接近法も多くの研究者によって研究され

[1, 15, 19]，著者らも前報 [18] で新しい効率的な内部接近法を提案し，事後補正法との性能比較を行った．

外部接近法は Chojnacki ら [4] によって提唱されたアプローチであり，彼らは「CFNS 法」と呼ぶ方法を提案した．しかし，著者らは前報 [13, 18] で，彼らの CFNS 法は必ずしも正しい解に収束しないことを実験例によって示した．そして，最適解に収束する新しい方法（「拡張 FNS 法」）を提案した．

本論文はこれら 3 種類のアプローチを比較し，どれが最高精度の方法かを実験的に検証する．

### 2. 基礎行列の最適計算

#### 2.1 エピ極線方程式

同一シーンを異なる位置から撮影した 2 画像において，第 1 画像の点  $(x, y)$  と第 2 画像の点  $(x', y')$  がシーンの同一点であれば，次のエピ極線方程式が成り立つ [6]．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ f_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

\*441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1

sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

†700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173

kanatani@suri.it.okayama-u.ac.jp

以下、ベクトル  $a, b$  の内積を  $(a, b)$  と書く。行列  $F = (F_{ij})$  は基礎行列と呼ばれ、2 台のカメラの相対的位置とそれらの内部パラメータのみによって定まる（シーンにはよらない）ランク 2 の行列である。式 (1) 中の  $f_0$  は任意の定数である<sup>1</sup>。

新しいベクトル  $u, \xi$  を

$$u = (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33})^\top \quad (2)$$

$$\xi = (xx', xy', xf_0, yx', yy', yf_0, f_0x', f_0y', f_0^2)^\top \quad (3)$$

と置けば、式 (1) は次のように書ける。

$$(u, \xi) = 0 \quad (4)$$

明らかに  $u$  の大きさは不定であり、以後  $\|u\| = 1$  と正規化する。

ノイズを含む対応点が  $N$  組得られたとき、それらを式 (3) によって 9 次元ベクトルに変換したものを  $\{\xi_\alpha\}$  とする。基礎行列の計算は  $\{\xi_\alpha\}$  から式 (4) を満たす 9 次元ベクトル  $u$  を推定する問題となる。

## 2.2 解の共分散行列

各データベクトル  $\xi_\alpha$  を  $\xi_\alpha = \bar{\xi}_\alpha + \Delta\xi_\alpha$  と書き、 $\bar{\xi}_\alpha$  はノイズを含まない値、 $\Delta\xi_\alpha$  はノイズの項とする。この  $\xi_\alpha$  の共分散行列を次のように定義する。

$$V[\xi_\alpha] = E[\Delta\xi_\alpha \Delta\xi_\alpha^\top] \quad (5)$$

$E[\cdot]$  はノイズの分布に関する期待値を表す。各対応点の各座標に期待値 0、標準偏差  $\sigma$  のノイズが独立に加わっているとき、式 (3), (5) から共分散行列  $V[\xi_\alpha]$  は  $O(\sigma)^4$  を除いて  $V[\xi_\alpha] = \sigma^2 V_0[\xi_\alpha]$  と書ける。ただし、

$$V_0[\xi_\alpha] = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 + \bar{x}'_\alpha{}^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}'_\alpha & f_0 \bar{x}'_\alpha & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}'_\alpha \bar{y}'_\alpha & \bar{x}_\alpha^2 + \bar{y}'_\alpha{}^2 & f_0 \bar{y}'_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 \bar{x}'_\alpha & f_0 \bar{y}'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & \bar{y}_\alpha^2 + \bar{x}'_\alpha{}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & \bar{x}'_\alpha \bar{y}'_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_0 \bar{x}'_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}'_\alpha \bar{y}'_\alpha & f_0 \bar{x}'_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y}_\alpha^2 + \bar{y}'_\alpha{}^2 & f_0 \bar{y}'_\alpha & 0 & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 \bar{y}'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

<sup>1</sup>数値計算の安定性のためのスケールの調節である [5]。本論文の実験では  $f_0 = 600$  とした。

と置き、正規化共分散行列と呼ぶ。上式中の  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha), (\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$  はデータ点  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  の真の位置であり、最適化の計算においては  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  に置き換えて計算する<sup>2</sup>。

ノイズを含むデータから計算した推定量  $\hat{u}$  の共分散行列  $V[\hat{u}]$  を次のように定義する [13, 18]。

$$V[\hat{u}] = E[(P_U \hat{u})(P_U \hat{u})^\top] \quad (7)$$

ここに  $P_U$  は 9 次元パラメータ空間において  $\|u\| = 1, \det F = 0$  の定める多様体  $U$  への射影行列である。射影行列  $P_U$  は次のように計算できる。

多様体  $U$  は 9 次元空間  $\mathcal{R}^9$  の 8 次元単位球面  $S^8$  に含まれるから、 $u$  は  $U$  の単位法線ベクトルでもある。一方、 $\det F = 0$  の表す超曲面の法線ベクトルは  $\nabla_u \det F$  であり、これを単位ベクトルへ正規化すると、次のように書ける。

$$u^\dagger \equiv N \begin{bmatrix} u_5 u_9 - u_8 u_6 \\ u_6 u_7 - u_9 u_4 \\ u_4 u_8 - u_7 u_5 \\ u_8 u_3 - u_2 u_9 \\ u_9 u_1 - u_3 u_7 \\ u_7 u_2 - u_1 u_8 \\ u_2 u_6 - u_5 u_3 \\ u_3 u_4 - u_6 u_1 \\ u_1 u_5 - u_4 u_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

ただし、 $N[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化を表す。その中身は  $u$  の表す基礎行列  $F$  の余因子行列  $F^\dagger$  の転置  $F^{\dagger\top}$  の 9 次元ベクトル表現（式 (2)）になっている。ゆえに制約  $\det F = 0$  は次のようにも書ける。

$$(u^\dagger, u) = 0 \quad (9)$$

$\{u, u^\dagger\}$  が制約多様体  $U$  に直交する正規直交系となっていることから、射影行列  $P_U$  は次のように表せる ( $I$  は単位行列)。

$$P_U = I - uu^\top - u^\dagger u^{\dagger\top} \quad (10)$$

## 2.3 KCR 下界

ノイズ  $\Delta\xi_\alpha$  の分布を期待値 0、共分散行列  $\sigma^2 V_0[\xi_\alpha]$  の独立な正規分布とみなせば、 $\hat{u}$  の任意の不偏推定量に対して次の不等式が成り立つ [8, 10, 12]。

$$V[\hat{u}] \succ \sigma^2 \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{(P_U \bar{\xi}_\alpha)(P_U \bar{\xi}_\alpha)^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha] u)} \right)_8 \quad (11)$$

ただし、 $\succ$  は左辺から右辺を引いたものが半正値対称行列であることを意味し、 $(\cdot)_r$  はランク  $r$  の一般逆行

<sup>2</sup>そうしても後のシミュレーション実験結果が左右されないことが確認される。

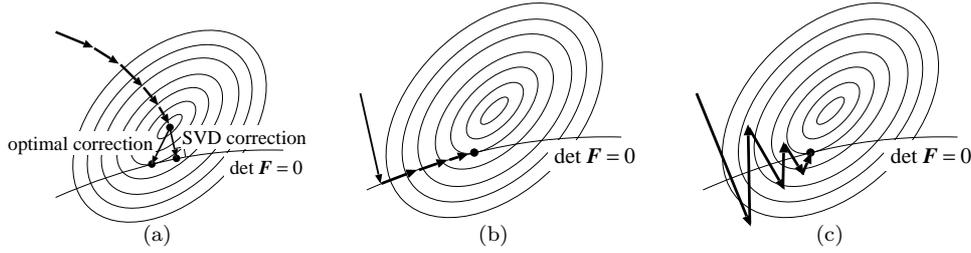


図 1: (a) 事後補正法．関数  $J$  の最小位置を求め，解  $F$  を  $\det F = 0$  となる最も近い点に移動する（SVD 補正），あるいは  $J$  の増加が最小になるように移動する（最適補正）．(b) 内部接近法．解  $F$  が  $\det F = 0$  を満たすようにパラメータ化し，制約を満たす空間内で関数  $J$  を最小化する．(c) 外部接近法． $\det F \neq 0$  の解から出発し， $\det F$  が次第に 0 に近づくように反復して最適解に収束させる．

列<sup>3</sup>を表す．Chernov ら [2] は式 (11) の右辺を KCR (Kanatani-Cramer-Rao) 下界 と呼んだ．そして， $\hat{u}$  が不偏推定量でなくても， $\sigma \rightarrow 0$  で  $\hat{u} \rightarrow u$  であれば  $O(\sigma^4)$  を除いて式 (11) が成立することを示した．

## 2.4 基礎行列の最尤推定

ノイズ  $\Delta \xi_\alpha$  の分布を期待値 0，共分散行列  $\sigma^2 V_0[\xi_\alpha]$  の独立な正規分布とみなすと，この問題の最尤推定は，制約条件  $(u, \bar{\xi}_\alpha) = 0$ ， $\alpha = 1, \dots, N$  のもとでマハラノビス距離の二乗和

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V_0[\xi_\alpha]^{-1} (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (12)$$

を最小にする  $u$ ， $\bar{\xi}_\alpha$  を計算することである<sup>4</sup>．ラグランジュ乗数を導入して制約条件を除去すれば，式 (12) は次式となる [10, 12]．

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha)^2}{(u, V_0[\xi_\alpha] u)} \quad (13)$$

最尤推定量  $\hat{u}$  はこれを条件  $\|u\| = 1$ ， $(u^\dagger, u) = 0$  のもとで最小にするものである．その共分散行列  $V[\hat{u}]$  は KCR の下界（式 (11) の右辺）に  $O(\sigma^4)$  を除いて一致する [10, 12]．

## 3. 事後補正法

### 3.1 制約なしの最尤推定

ランクを考慮せずに式 (13) を最小化する方法としては Chojnacki ら [3] の FNS 法 (Fundamental Numerical Scheme)，Leedan ら [14] の HEIV 法 (Heteroscedastic Errors-in-Variable)，菅谷ら [17] の射影ガウス・ニュートン法がある．また金谷 [7, 10, 11] のくりこみ法によってもほぼ同精度の解が得られる．

<sup>3</sup> スペクトル分解して大きい  $r$  個の固有値を逆数に置き換え，残りの固有値を 0 に置き換えた行列．

<sup>4</sup> 9 次元空間  $\mathcal{R}^9$  の  $N$  点  $\{\xi_\alpha\}$  に式 (4) の超平面を各点の共分散行列  $V_0[\xi_\alpha]$  に反比例する重み付き距離の二乗和が最小になるように当てはめる問題と解釈できる．

これらはすべて反復解法であり，初期値が必要である．これには通常は最小二乗法が用いる．これは精度は低いが，最も効率的である [17]．より精度の高い解を計算するには Taubin 法が適している [17]．ただし，計算時間が余計にかかる．

### 3.2 ランク補正法

ランク制約を満たさない行列  $F$  を  $\det F = 0$  とする簡単な方法は，特異値分解して，その最小特異値を 0 に置き換えることである．これによって行列ノルムで測って  $F$  から“最も近い”行列式 0 の行列が得られる（図 1(a)）．これを SVD 補正と呼ぶ [13, 18]．

より高精度の解を得るには，解を  $J$  の増加量が最も少なくなる方向に移動して制約が満たされるようにする必要がある（図 1(a)）．関数  $J$  が尤度関数から導かれているので，このことは解の確率的な変動の可能性が最も高い方向に移動することを意味する．統計的最適化理論 [8, 10] により， $J$  を最小にする解の共分散行列が計算できるので，これは次の手順となる [18]．

1. 次の  $9 \times 9$  行列  $\tilde{M}$  を計算する．

$$\tilde{M} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\xi_\alpha \xi_\alpha^\top}{(\tilde{u}, V_0[\xi_\alpha] \tilde{u})} \quad (14)$$

2. 正規化共分散行列  $V_0[\tilde{u}]$  を次のように計算する．

$$V_0[\tilde{u}] = \tilde{M}_8^{-1} \quad (15)$$

3. 解  $\tilde{u}$  を次のように更新する<sup>5</sup>．

$$\tilde{u} \leftarrow N[\tilde{u} - \frac{1}{3} \frac{(\tilde{u}, \tilde{u}^\dagger) V_0[\tilde{u}] \tilde{u}^\dagger}{(\tilde{u}^\dagger, V_0[\tilde{u}] \tilde{u}^\dagger)}] \quad (16)$$

4.  $(\tilde{u}, \tilde{u}^\dagger) \approx 0$  なら  $\tilde{u}$  を返して終了する．そうでなければ正規化共分散行列  $V_0[\tilde{u}]$  を次のように更新して，ステップ 3 に戻る．

$$P_{\tilde{u}} = I - \tilde{u} \tilde{u}^\dagger, \quad V_0[\tilde{u}] \leftarrow P_{\tilde{u}} V_0[\tilde{u}] P_{\tilde{u}} \quad (17)$$

<sup>5</sup>  $\tilde{u}^\dagger$  は式 (8) を  $\tilde{u}$  に関して計算したもの．

これを最適補正と呼ぶ。得られる解は高次の誤差項を除いて、式 (13) を条件  $\det F = 0$  のもとで最小化した解と一致する [9, 10]。

#### 4. 内部接近法

基礎行列  $F$  を  $\det F = 0$  となるようにパラメータ化して、ランク制約を満たす空間内で関数  $J$  を最小化するのが内部接近法である (図 1(b))。そのようなパラメータ化はいろいろ提案されているが [1, 15, 19]、一般に式が非常に複雑になる。その中で最も簡明なのは Bartoli ら [1] が用いた、特異値分解形をそのまま最適化する方法である。ただし、Bartoli ら [1] は各特徴点の 3 次元位置、2 台のカメラの内部パラメータ、およびその配置まで未知数として、“仮の 3 次元復元” の再投影誤差を最小にするバンドル調整を行っている。それに対して前報 [18] では  $F$  の特異値分解形とリー代数の方法 [1, 16] を用いて式 (13) の  $J$  を直接に LM (レーベンバーグ・マーカート) 法によって最小化する手順を提案した。これは次のように書ける [18]。

1.  $\det F = 0$ ,  $\|F\| = 1$  となる初期値  $F$  を与え,  $F = U \text{diag}(\cos \theta, \sin \theta, 0) V^T$  と表す。
2. 式 (13) の  $J$  を計算し,  $c = 0.0001$  と置く。
3. 式の行列  $F_U$ ,  $F_V$  とベクトル  $u_\theta$  を計算する。

$$F_U = \begin{pmatrix} 0 & F_{31} & -F_{21} \\ 0 & F_{32} & -F_{22} \\ 0 & F_{33} & -F_{23} \\ -F_{31} & 0 & F_{11} \\ -F_{32} & 0 & F_{12} \\ -F_{33} & 0 & F_{13} \\ F_{21} & -F_{11} & 0 \\ F_{22} & -F_{12} & 0 \\ F_{23} & -F_{13} & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$F_V = \begin{pmatrix} 0 & F_{13} & -F_{12} \\ -F_{13} & 0 & F_{11} \\ F_{12} & -F_{11} & 0 \\ 0 & F_{23} & -F_{22} \\ -F_{23} & 0 & F_{21} \\ F_{22} & -F_{21} & 0 \\ 0 & F_{33} & -F_{32} \\ -F_{33} & 0 & F_{31} \\ F_{32} & -F_{31} & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$u_\theta = \begin{pmatrix} \sigma_1 u_{12} v_{12} - \sigma_2 u_{11} v_{11} \\ \sigma_1 u_{12} v_{22} - \sigma_2 u_{11} v_{21} \\ \sigma_1 u_{12} v_{32} - \sigma_2 u_{11} v_{31} \\ \sigma_1 u_{22} v_{12} - \sigma_2 u_{21} v_{11} \\ \sigma_1 u_{22} v_{22} - \sigma_2 u_{21} v_{21} \\ \sigma_1 u_{22} v_{32} - \sigma_2 u_{21} v_{31} \\ \sigma_1 u_{32} v_{12} - \sigma_2 u_{31} v_{11} \\ \sigma_1 u_{32} v_{22} - \sigma_2 u_{31} v_{21} \\ \sigma_1 u_{32} v_{32} - \sigma_2 u_{31} v_{31} \end{pmatrix} \quad (20)$$

4. 式の行列  $X$  を計算する。

$$X = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\xi_\alpha \xi_\alpha^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha] u)} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha)^2 V_0[\xi_\alpha]}{(u, V_0[\xi_\alpha] u)^2} \quad (21)$$

5. 次のように関数  $J$  の 1 階微分および 2 階微分 (ガウス・ニュートン近似) を計算する。

$$\nabla_\omega J = F_U^\top X u, \quad \nabla_{\omega'} J = F_V^\top X u \quad (22)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = (u_\theta, X u) \quad (23)$$

$$\nabla_\omega^2 J = F_U^\top X F_U, \quad \nabla_{\omega'}^2 J = F_V^\top X F_V \quad (24)$$

$$\nabla_{\omega \omega'} J = F_U^\top X F_V, \quad \frac{\partial J^2}{\partial \theta^2} = (u_\theta, X u_\theta) \quad (25)$$

$$\frac{\partial \nabla_\omega J}{\partial \theta} = F_U^\top X u_\theta, \quad \frac{\partial \nabla_{\omega'} J}{\partial \theta} = F_V^\top X u_\theta \quad (26)$$

6. 次の行列  $H$  を計算する。

$$H = \begin{pmatrix} \nabla_\omega^2 J & \nabla_{\omega \omega'} J & \partial \nabla_\omega J / \partial \theta \\ (\nabla_{\omega \omega'} J)^\top & \nabla_{\omega'}^2 J & \partial \nabla_{\omega'} J / \partial \theta \\ (\partial \nabla_\omega J / \partial \theta)^\top & (\partial \nabla_{\omega'} J / \partial \theta)^\top & \partial J^2 / \partial \theta^2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

7. 次の連立 1 次方程式を解いて  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\Delta \theta$  を計算する。

$$(H + cD[H]) \begin{pmatrix} \omega \\ \omega' \\ \Delta \theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_\omega J \\ \nabla_{\omega'} J \\ \partial J / \partial \theta \end{pmatrix} \quad (28)$$

ただし、 $D[\cdot]$  は対角要素のみを取り出した対角行列を表す。

8.  $U$ ,  $V$ ,  $\theta$  を次のように更新する。

$$U' = \mathcal{R}(\omega) U, \quad V' = \mathcal{R}(\omega') V, \quad \theta' = \theta + \Delta \theta \quad (29)$$

ただし、 $\mathcal{R}(\omega)$  は回転軸  $N[\omega]$  の周りの右ねじ方向の回転角  $\|\omega\|$  の回転である。

9.  $F$  を次のように更新する。

$$F' = U' \text{diag}(\cos \theta', \sin \theta', 0) V'^T \quad (30)$$

10.  $F'$  に対する式 (13) の値を  $J'$  とする。
11.  $J' < J$  または  $J' \approx J$  でなければ  $c \leftarrow 10c$  としてステップ 7 に戻る。
12.  $F' \approx F$  なら  $F'$  を返して終了。そうでなければ  $F \leftarrow F'$ ,  $U \leftarrow U'$ ,  $V \leftarrow V'$ ,  $\theta \leftarrow \theta'$ ,  $c \leftarrow c/10$  としてステップ 3 に戻る。

## 5. 外部接近法

ランク制約を満たさない解  $F$  から出発し,  $\det F$  が次第に 0 に近づくように反復して, 最適解に収束させるのが外部接近法である (図 1(c)). これは Chojnacki ら [4] によって提唱されたアプローチであるが, 彼らが提案した CFNS 法 (Constrained Fundamental Numerical Scheme) は必ずしも正しい解に収束しないことを前報 [13] で示した. そして最適解に収束する新しい方法 (拡張 FNS 法) を提案した. これは変数間の任意個数の制約条件に対する一般的な方法であるが, 基礎行列の場合には次のようになる.

1.  $u$  の初期値を与える.
2. 式 (21) の行列  $X$  を計算する.
3. 次の行列  $P_{u^\dagger}$  を計算する.

$$P_{u^\dagger} = I - u^\dagger u^{\dagger T} \quad (31)$$

ここに  $u^\dagger$  は式 (8) で定義するベクトルである.

4. 次の行列  $Y$  を計算する.

$$Y = P_{u^\dagger} X P_{u^\dagger} \quad (32)$$

5. 固有値問題

$$Yv = \lambda v \quad (33)$$

の絶対値の小さい 2 個の固有値に対応する単位固有ベクトル  $v_1, v_2$  を求める.

6. 次のベクトル  $\hat{u}$  を計算する

$$\hat{u} = (u, v_1)v_1 + (u, v_2)v_2 \quad (34)$$

7. 次の  $u'$  を計算する.

$$u' = N[P_{u^\dagger}\hat{u}] \quad (35)$$

8.  $u' \approx u$  なら  $u'$  を返して終了する. そうでなければ  $u \leftarrow N[u + u']$  としてステップ 2 に戻る.

これは, ランク制約のない場合 ( $P_{u^\dagger} = I$ ) がそのまま Chojnacki ら [3] の FNS 法になっているという意味で FNS の拡張である. 一方, Chojnacki ら [4] の CFNS 法は FNS 法とは直接の関係はない.

## 6. シミュレーション実験

図 2 はシーン中で角度  $60^\circ$  をなす 2 枚の平面格子を異なる 2 方向から見た画像である. これは  $600 \times 600$  画素を想定し, 焦点距離は 1200 画素である. 画像中の格子点を特徴点として, 各点の  $x, y$  座標に平均 0, 標準偏差  $\sigma$  画素の正規分布に従う乱数ノイズを独立に加え, これから次の方法で基礎行列を計算した.

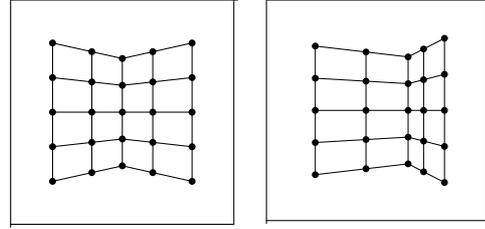


図 2: 2 枚の平面格子シミュレーション画像.

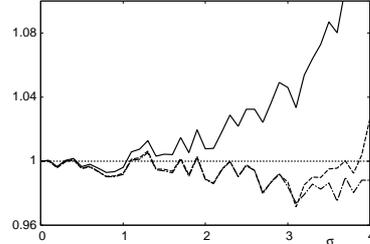


図 3: 図 2 に対する解の平方平均二乗誤差の KCR 下界に対する比. 横軸はノイズの標準偏差  $\sigma$ . 実線: 事後補正法. 破線: 内部接近法. 鎖線: 外部接近法.

1. 事後補正法: 菅谷ら [17, 18] の最適補正を用いる.
  2. 内部接近法: 菅谷ら [18] の方法を用いる.
  3. 外部接近法: 金谷ら [13] の拡張 FNS 法を用いる.
- 反復の初期値には最小二乗法を用い,  $F$  の更新量がノルムで測って  $10^{-6}$  以下を収束条件とした.

精度の評価尺度として, 各  $\sigma$  に対して 10000 回の独立に試行し, 式 (7) に対応する平方平均二乗誤差  $D$

$$D = \sqrt{\frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \|P_u \hat{u}^{(a)}\|^2} \quad (36)$$

を計算した. ただし  $\hat{u}^{(a)}$  は  $a$  回目の試行の解  $\hat{F}^{(a)}$  のベクトル表現であり,  $P_u$  は式 (10) の射影行列である. 図 3 は  $\sigma$  を横軸にとり, 式 (36) の  $D$  と対応する KCR 下界  $D_{\text{KCR}}$  ( $=$  式 (11) の右辺のトレース) との比  $D/D_{\text{KCR}}$  をプロットしたものである.

図 4 は図 3 に対応する式 (13) の残差  $J$  の平均値を見やすくするために  $(N-7)\sigma^2$  ( $N$  は対応点数) からの差としてプロットしたものである. これは  $J/\sigma^2$  が第 1 近似として自由度  $N-7$  の  $\chi^2$  分布に従い, したがって  $J$  の期待値がほぼ  $(N-7)\sigma^2$  に等しいと期待されるからである.

図 3, 4 から分かるように, 事後補正はノイズが増えるとともに精度が次第に低下する. しかし, 残差は増えていない. これは式 (16) の補正式が第 1 近似であることと, 最適解の近傍では式 (13) の値がほぼ一定であることが原因であると思われる.

それに対して内部接近法は, 逆にノイズが増えてもよい精度は保たれているのに残差が増えている.

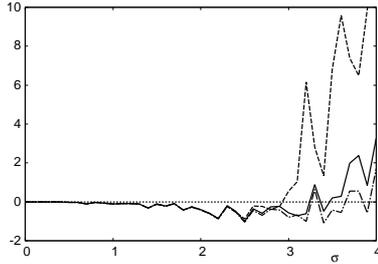


図 4: 図 2 に対する解の比較平均残差．横軸はノイズの標準偏差  $\sigma$ ．実線：事後補正法．破線：内部接近法．鎖線：外部接近法．

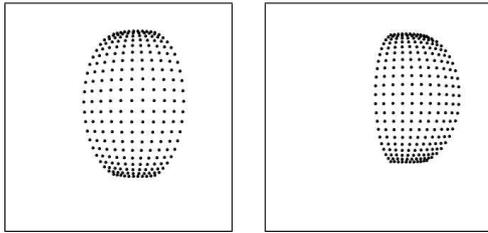


図 5: 2 枚の球面格子シミュレーション画像．

これは LM 法による探索が局所解に陥るための思われる．

一方，外部接近法は常に精度が高く，かつ残差が最小の最適解を与えている．

図 5 は球面上の格子パターンを 2 方向からみたシミュレーション画像である（サイズ  $600 \times 600$ ，焦点距離 1200）．この場合の図 3, 4 に対応する結果が図 6, 7 である．

この例では図 2 に対するのと同じ傾向がより顕著に現れている．すなわち，事後補正法はノイズが大きくなるにつれて精度が低下しているが，残差は増加していない．

それに対して内部接近法は，ノイズが小さいときは非常に精度がよいように見えるが，残差は他の方法と差がなく，ノイズが大きくなるにつれて精度が急速に悪化し，残差も急速に増えている．これはノイズが小さいときは LM 法による探索が真値の周囲の局所解に陥り，ノイズが大きくなるにつれて真値から離れた局所解に陥る割合が大きくなるためと考えられる．

一方，外部接近法は常に高精度で残差が小さい．

## 7. 各手法の特徴

上述の実験およびそれ以外の多数の実験（詳細省略）から次のことが結論される．

- ランク制約を考慮しないと，式 (13) の関数  $J$  は比較的単純で，局所解がほとんど存在しない<sup>6</sup>．

<sup>6</sup>我々の実験した限りでは誤った解が得られた事例はなかった．

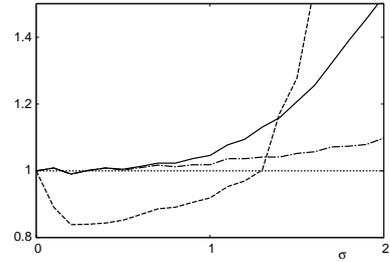


図 6: 図 5 に対する解の平方平均二乗誤差の KCR 下界に対する比．横軸はノイズの標準偏差  $\sigma$ ．実線：事後補正法．破線：内部接近法．鎖線：外部接近法．

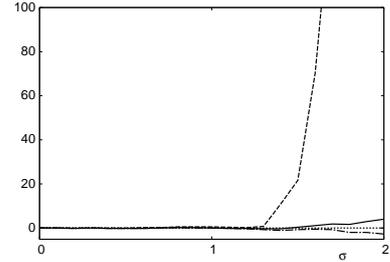


図 7: 図 5 に対する解の比較平均残差．横軸はノイズの標準偏差  $\sigma$ ．実線：事後補正法．破線：内部接近法．鎖線：外部接近法．

そして，どの計算法を用いても，どのように初期値を選んでも，少数の反復で同一の解に収束する<sup>7</sup>．

- 事後補正はノイズが小さいときは非常に高い精度を与えるが，ノイズが増加すると，第 1 近似による補正の限界が現れ，次第に精度が低下する．しかし，残差はほとんど増加しない．
- 内部接近法はノイズが小さいと非常によい精度を与える．しかし，ランク制約を取り入れたパラメータ空間には局所解が多く，局所解に陥ることが多い．ただし，これが見かけの精度に反映されるとは限らない．しかし，ノイズが増えたと急速に精度が低下する．
- 内部接近法の精度は初期値に依存し，よい初期値から出発すると高精度，低残差の解が得られる（実験の詳細は省略）．
- 外部接近法は局所解に陥ることもなく，ほぼ常に最適解が得られている．

以上の考察により，外部接近法は特に欠点がないのに対して，事後補正法と内部接近法はその長短が互いに補完的であることがわかる．すなわち，事後補正は安定で常により解を与えるが，ノイズとともに精度が低下するのに対して，内部接近法は正しく収束すれば最適解が得られるが，初期値とノイズに

<sup>7</sup>たとえランダムに初期値を与えても正しく収束する．ただし，前報 [17] に示したように，FNS 法と HEIV 法の反復では絶対値最小の固有値ではなく最小固有値を選ぶ必要がある．

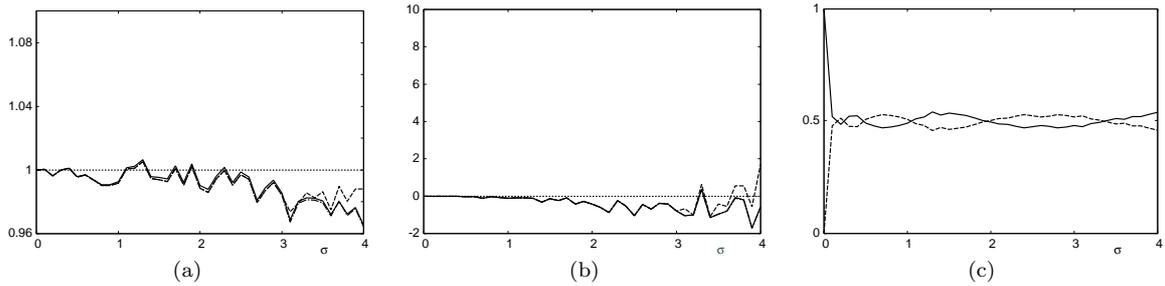


図 8: 図 2 に対する (a) 解の平方平均二乗誤差, (b) 比較平均残差, および (c) 混合法で選択される手法の割合 (%). 横軸はノイズの標準偏差  $\sigma$ . 実線: 事後補正法+内部接近法. 破線: 外部接近法. 鎖線: 混合法.

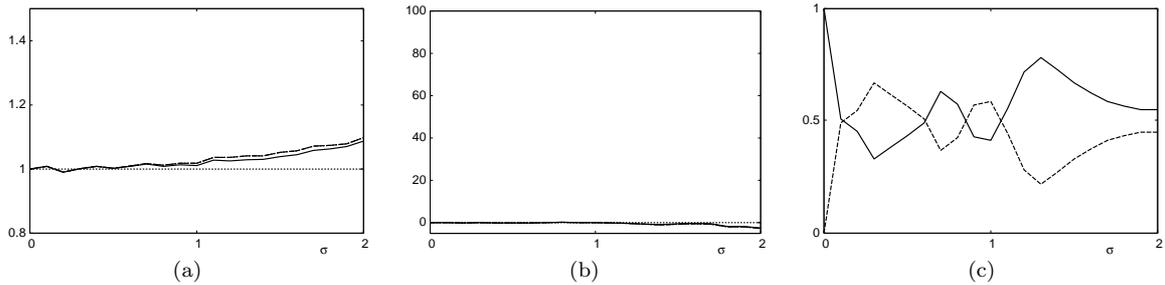


図 9: 図 5 に対する (a) 解の平方平均二乗誤差, (b) 比較平均残差, および (c) 混合法で選択される手法の割合 (%). 横軸はノイズの標準偏差  $\sigma$ . 実線: 事後補正法+内部接近法. 破線: 外部接近法. 鎖線: 混合法.

依存して局所解に陥る可能性が高い.

そこで考えられるのが事後補正法と内部接近法を組み合わせる, すなわち, 事後補正法の解を初期値として内部接近法の探索を行うことである. これによって外部接近法と同等な性能が得られると期待される.

図 8(a), 8(b) は図 2 の例に対して, 事後補正法を初期値とする内部接近法と外部接近法に対する精度と比較残差を示したものである. これは比較しやすいように, それぞれ図 3, 4 と同じスケールでプロットしている.

さらに両者の優劣を判断するために, これらの両方の計算を行い, 残差の小さい解を採用するという「混合法」も同時に比較した. 図 8(c) はそれぞれが採択される割合 (%) を示したものである.

図 9 は図 5 に対して同様なプロットを行ったものである.

これらから分かるように, 事後補正法を初期値とする内部接近法を用いれば図 3, 4 および図 6, 7 に見られたような外部接近法との差がほぼ消失している. 混合しても選ばれるのはほぼ半々であり, 優劣の差がない.

図 10, 11 はそれぞれ図 2, 5 の例に対する実行時間 (秒) をプロットしたものである. 細い実線が事後補正法, 太い実線が事後補正法を初期値とした内部接近法, 破線が外部接近法を示す. これは各  $\sigma$  に

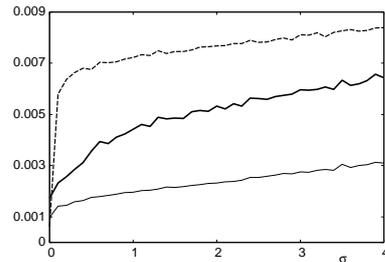


図 10: 図 2 に対する実行時間. 横軸はノイズの標準偏差  $\sigma$ . 細い実線: 事後補正法. 太い実線: 事後補正法+内部接近法. 破線: 外部接近法.

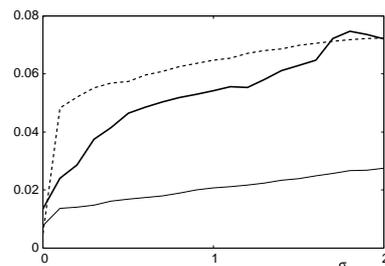


図 11: 図 5 に対する実行時間 (秒). 横軸はノイズの標準偏差  $\sigma$ . 細い実線: 事後補正法. 太い実線: 事後補正法+内部接近法. 破線: 外部接近法.

対する 10000 回の試行の平均値である. CPU には Core2Duo E6700 2.66GHz, 主メモリ 4GB, OS には Linux を用いた. 事後補正法を初期値とした内部接近法のほうが外部接近法より効率的であることがわかる.



図 12: 実画像と対応点 (100 個) .

表 1: 図 12 の実画像の対応点から求めた基礎行列の残差と実行時間 (秒) .

手法	残差	実行時間
事後補正法	45.378	.00764
内部接近法	45.382	.00300
外部接近法	45.379	.01932
事後補正+内部接近	45.378	.01704

## 8. 実画像実験

図 12 の 2 画像から図中に示した 100 個の対応点を手動で選び, それから各種の手法によって基礎行列を計算した. 表 1 はその残差  $J$  と実行時間 (秒) を示したものである. この例では内部接近法は残差が事後補正法や外部接近法よりもやや大きいまま探索が終了している. そして, 事後補正法の解から内部接近法を行っても, 残差はそれ以上減少せず, 外部接近法とほぼ同じ残差が得られている.

効率に関してはシミュレーション実験と同様に, 事後補正法を初期値とした内部接近法に比べて外部接近法のほうが多少時間がかかっている.

## 9. まとめ

本論文では 2 画像の対応点データから基礎行列を計算するための三つのアプローチ (事後補正法, 内部接近法, 外部接近法) を比較し<sup>8</sup>, 最高精度の方法はどれかを実験的に検証した.

結論として, 事後補正法は精度がやや低下することがあるが常にノイズにロバストであり, 内部接近法は精度が高いが初期値やノイズの影響を受けて局所解に陥りやすく, 外部接近法は最も高精度でかつロバストであることがわかった. ただし, 外部接近法は一般にやや計算時間を要する.

内部接近法が不利なのは, ランク制約によって変数を消去した尤度関数が多いの極小値をもつためと思われる. しかし, 事後補正法と内部接近法を組み合わせれば, 外部接近法と同等となることがわかった.

<sup>8</sup>以下にプログラムを公開している.

<http://www.iim.ics.tut.ac.jp/~sugaya/public.php>

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 17500112) の助成によった.

## 参考文献

- [1] A. Bartoli and P. Sturm, Nonlinear estimation of fundamental matrix with minimal parameters, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **26**-3 (2004-3), 426–432.
- [2] N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47**-4 (2004-11), 713–728.
- [3] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000-11), 1294–1303.
- [4] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, A new constrained parameter estimator for computer vision applications, *Image Vis. Comput.*, **22**-2 (2004-2), 85–91.
- [5] R. I. Hartley, In defense of the eight-point algorithm, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19**-6 (1997-6), 580–593.
- [6] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [7] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994-2), 201–209.
- [8] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36**-8 (1995-8), 1865–1873.
- [9] 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **37**-3 (1996-3), 363–370.
- [10] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, 2005.
- [11] 金谷健一, くりこみ法その後: 波紋と発展, 情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-139-5 (2003-7), 33–40.
- [12] 金谷健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
- [13] 金谷健一, 菅谷保之, 制約付きパラメータ推定のための拡張 FNS 法, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-158-4 (2007-3), pp. 25–32.
- [14] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37**-2 (2000-6), 127–150.
- [15] 右田剛史, 尺長健, 未校正画像対中の点对応に基づくエビポールの 1 次元探索法, 情報処理学会研究報告, CVIM-153-64 (2006-3), 413–420.
- [16] 坂本雅俊, 金谷健一, 菅谷保之, 自由に撮影した画像による全周パノラマ生成のための射影変換の最適化, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-155-28 (2006-9), 219–226.
- [17] 菅谷保之, 金谷健一, 基礎行列の高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-153-32 (2006-3), 207–214.
- [18] 菅谷保之, 金谷健一, 効率的探索によるランク拘束した基礎行列の高精度計算, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-158-3 (2007-3), pp. 17–24.
- [19] Z. Zhang and C. Loop, Estimating the fundamental matrix by transforming image points in projective space, *Comput. Vis. Image Understand.*, **82**-2 (2001-5), 174–180.