

3次元復元のためのバンドル調整の実装と評価

岩元祐輝^{†1} 菅谷保之^{†2} 金谷健一^{†1}

多画像から3次元形状復元を行うバンドル調整のアルゴリズムを最新の研究に基づいて詳細に記述する。本論文で着目するのはカメラ回転の適切な取扱い方、および特徴点と画像数が多いときの計算とメモリの効率化であり、これらがバンドル調整実装の骨子となる。そして、2画像からの基礎行列の計算、および多画像からの3次元復元に対する実験行い、その性能を評価する。

Bundle Adjustment for 3-D Reconstruction: Implementation and Evaluation

YUUKI IWAMOTO,^{†1} YASUYUKI SUGAYA^{†2}
and KENICHI KANATANI^{†1}

We describe in detail the algorithm of bundle adjustment for 3-D reconstruction from multiple images based on our latest research results. The main focus of this paper is the handling of camera rotations and the efficiency of computation and memory space usage when the number of feature points and the number of frames are large. An appropriate consideration of these is the core of the implementation of bundle adjustment. Doing experiments of fundamental matrix computation from two images and 3-D reconstruction from multiple images, we evaluate the performance of bundle adjustment.

1. ま え が き

「バンドル調整」とは多画像間の対応点からシーンの3次元形状を計算する基本的な手法であり、その原理は計算した3次元形状を計算したカメラパラメータによって画像面に再投影したとき観測データになるべく一致するようにすべての未知数（カメラの内部、外部パラメータ、および3次元形状）を探索することである^{(15),(16),(20),(21)}。しかし、その計算

過程が複雑であり、パラメータの扱い方（特にカメラ回転）が研究者によって異なるため、原理のみが記述され、その実装の詳細が記述されていないことが多い。本論文の目的は、バンドル調整のこれまでの研究成果を総合して、その実装法を最も合理的と考えられる形で記述する。特に着目するのはカメラ回転の適切な取扱い方、および特徴点と画像数が多いときの計算とメモリの効率化であり、これらがバンドル調整の実装の骨子となる。そして、2画像からの基礎行列の計算、および多画像からの3次元復元に対する実験行い、その性能を評価する。

2. 透視投影と再投影誤差

バンドル調整ではカメラの撮像を透視投影によってモデル化する。「透視投影」とは空間の点 (X, Y, Z) が次式によって画像上の位置 (x, y) に投影されるとみなすものである。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f_0 \end{pmatrix} \simeq P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

記号 \simeq は両辺が非零の定数倍を除いて等しいことを表し、 f_0 は任意に固定したスケール定数である^{*1}。P は「投影行列」と呼ばれる 3×4 行列である。焦点距離が f 画素、光軸点が (u_0, v_0) のカメラを固定した世界座標系に対してレンズ中心を t に置き、向きを R (回転行列) だけ回転した位置に置くと、投影行列は次のように表される⁴⁾。

$$P = KR^T \begin{pmatrix} I & -t \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} f/f_0 & 0 & u_0/f_0 \\ 0 & f/f_0 & v_0/f_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

ここに I は単位行列である。K は「内部パラメータ行列」と呼ばれる³⁾。ただし、アスペクト比は1で画像歪はないと仮定している。式(1)の成分を取り出すと次のよう書ける。

$$x = f_0 \frac{P^{11}X + P^{12}Y + P^{13}Z + P^{14}}{P^{31}X + P^{32}Y + P^{33}Z + P^{34}}, \quad y = f_0 \frac{P^{21}X + P^{22}Y + P^{23}Z + P^{24}}{P^{31}X + P^{32}Y + P^{33}Z + P^{34}} \quad (3)$$

ただし、P の (ij) 要素を P^{ij} と書いた。シーン中の N 個の点 $(X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)$ を M 台のカメラで撮影したとき、これが第 κ 画像上の $(x_{\alpha\kappa}, y_{\alpha\kappa})$ に観測されたとする ($\kappa = 1, \dots, M$, $\alpha = 1, \dots, N$)。第 κ 画像に対する投影行列が P_κ のとき、各点の投影されるべき位置と観測位置のずれの二乗和をすべての点について、それが見えている画像に渡って総和したものを「再投影誤差」と呼ぶ。これは式(3)より次のように書ける。

^{†1} 岡山大学大学院自然科学研究科
Department of Computer Science, Okayama University

^{†2} 豊橋技術科学大学情報・知能工学系
Department of Computer Science and Engineering, Toyohashi University of Technology

*1 画像座標 x, y と同じオーダーにとると有限長計算による誤差が減少する³⁾。本研究では $f_0 = 600$ 画素とした。

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\kappa=1}^M I_{\alpha\kappa} \left[\left(\frac{p_{\alpha\kappa}}{r_{\alpha\kappa}} - \frac{x_{\alpha\kappa}}{f_0} \right)^2 + \left(\frac{q_{\alpha\kappa}}{r_{\alpha\kappa}} - \frac{y_{\alpha\kappa}}{f_0} \right)^2 \right] \quad (4)$$

ここに $I_{\alpha\kappa}$ は可視性指標であり、第 α 点が第 κ 画像に写っているとき 1、そうでないとき 0 である。また、画像上のずれを f_0 を 1 とする距離で測り、次のように置いた。

$$\begin{aligned} p_{\alpha\kappa} &= P_{\kappa}^{11} X_{\alpha} + P_{\kappa}^{12} Y_{\alpha} + P_{\kappa}^{13} Z_{\alpha} + P_{\kappa}^{14}, & q_{\alpha\kappa} &= P_{\kappa}^{21} X_{\alpha} + P_{\kappa}^{22} Y_{\alpha} + P_{\kappa}^{23} Z_{\alpha} + P_{\kappa}^{24} \\ r_{\alpha\kappa} &= P_{\kappa}^{31} X_{\alpha} + P_{\kappa}^{32} Y_{\alpha} + P_{\kappa}^{33} Z_{\alpha} + P_{\kappa}^{34} \end{aligned} \quad (5)$$

バンドル調整の目的は、観測した $(x_{\alpha\kappa}, y_{\alpha\kappa})$, $\alpha = 1, \dots, N$, $\kappa = 1, \dots, M$ に対して式 (4) を最小にする 3 次元位置 $(X_{\alpha}, Y_{\alpha}, Z_{\alpha})$ と投影行列 P_{κ} の要素を計算することである^{(15),(16),(20),(21)}。

3. 変数の記述とその補正量の表現

バンドル調整の原理は仮定した 3 次元位置 $(X_{\alpha}, Y_{\alpha}, Z_{\alpha})$ と投影行列 P_{κ} を式 (4) の E が減少するように微小に補正し、これを収束するまで反復することである。3 次元位置の補正量を $(\Delta X_{\alpha}, \Delta Y_{\alpha}, \Delta Z_{\alpha})$ とする。投影行列 P_{κ} は式 (2) より、焦点距離 f_{κ} 、光軸点 $(u_{0\kappa}, v_{0\kappa})$ 、並進 $t_{\kappa} = (t_{\kappa 1}, t_{\kappa 2}, t_{\kappa 3})^{\top}$ 、および回転 R_{κ} で指定される。焦点距離、光軸点、および並進の補正量をそれぞれ Δf_{κ} , $\Delta u_{0\kappa}$, $\Delta v_{0\kappa}$, $\Delta t_{\kappa 1}$, $\Delta t_{\kappa 2}$, $\Delta t_{\kappa 3}$ とする。問題となるのは回転行列 R_{κ} の補正量をどう表現するかである。

回転行列 R_{κ} は 9 個の要素を持つが、制約条件 $R_{\kappa} R_{\kappa}^{\top} = I$ より自由度は 3 である。したがって、回転の変化は 3 パラメータで指定できる。重要なことは回転 R_{κ} 自体を 3 パラメータで表現する必要はないということである。回転 R_{κ} の変化率 (= 微分) が 3 パラメータで表現できればよい。制約 $R_{\kappa} R_{\kappa}^{\top} = I$ より R_{κ} の微小変化 ΔR_{κ} は第 1 近似において $\Delta R_{\kappa} R_{\kappa}^{\top} + R_{\kappa} \Delta R_{\kappa}^{\top} = O$ を満たす。これは $(\Delta R_{\kappa} R_{\kappa}^{\top})^{\top} = -\Delta R_{\kappa} R_{\kappa}^{\top}$ 、すなわち $\Delta R_{\kappa} R_{\kappa}^{\top}$ が反対称行列であることを表す。ゆえにある $\omega_{\kappa 1}$, $\omega_{\kappa 2}$, $\omega_{\kappa 3}$ が存在して

$$\Delta R_{\kappa} R_{\kappa}^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{\kappa 3} & \omega_{\kappa 2} \\ \omega_{\kappa 3} & 0 & -\omega_{\kappa 1} \\ -\omega_{\kappa 2} & \omega_{\kappa 1} & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

と書ける。このような第 1 近似の微小回転は数学では「無限小回転」と呼ばれ、その全体は 3 パラメータ $\omega_{\kappa 1}$, $\omega_{\kappa 2}$, $\omega_{\kappa 3}$ の張る線形空間であり、3 次元回転群 $SO(3)$ の「リー代数」 $so(3)$ と呼ばれる^{*1(6)}。ベクトル a と行列 T の積 $a \times T$ を a と T の各列のベクトル積を列とする行列と定義すると⁷⁾、式 (6) の右辺はベクトル $\omega_{\kappa} = (\omega_{\kappa 1}, \omega_{\kappa 2}, \omega_{\kappa 3})^{\top}$ と単位行列

I の積 $\omega_{\kappa} \times I$ である。恒等式 $(a \times I)b = a \times b$, $(a \times I)T = a \times T$ が成り立つことに注意。式 (6) に右から R_{κ} を掛けると次のようになる。

$$\Delta R_{\kappa} = \omega_{\kappa} \times R_{\kappa} \quad (7)$$

左辺を微小時間 Δt で割って $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると回転の瞬間変化率 dR_{κ}/dt となる。このとき ω_{κ} は「角速度」と呼ばれる。式 (7) は「リー代数による方法」とも呼ばれ、回転を未知数に含む最適化の標準的な方法である⁷⁾。物理学では古くから用いられているが、難解そうな呼称のためかコンピュータビジョンの分野ではあまり知られていないようである。多くのビジョン研究者はオイラー角、各座標軸周りの回転角、四元数表現などを用いて回転をパラメータ化し、そのパラメータを微分するというような直観的な方法を採用している^{(17),(19)}。このため計算式の記述が長くなり、これがバンドル調整アルゴリズムがあまり公表されていない理由の一つであろう。一方、式 (7) を用いれば、以下に示すように計算式をすべて陽に、かつ簡潔に書き下すことができる。

4. バンドル調整の原理

前節の記述法により、再投影誤差 E を減少させるための補正量は ΔX_{α} , ΔY_{α} , ΔZ_{α} , $\alpha = 1, \dots, N$, Δf_{κ} , $\Delta t_{\kappa 1}$, $\Delta t_{\kappa 2}$, $\Delta t_{\kappa 3}$, $\Delta u_{0\kappa}$, $\Delta v_{0\kappa}$, $\omega_{\kappa 1}$, $\omega_{\kappa 2}$, $\omega_{\kappa 3}$, $\kappa = 1, \dots, M$ の合計 $3N + 9M$ 個であり、通し番号をつけて $\Delta \xi_1, \Delta \xi_2, \dots, \Delta \xi_{3N+9M}$ とする。補正 $\Delta \xi_k$ による変化の第 1 近似 (すなわち $\Delta \xi_k$ の 2 次以上の項を無視したもの) が「微分」であり、 $\partial/\partial \xi_k$ で表す。式 (4) の再投影誤差 E の微分は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \xi_k} &= 2 \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\kappa=1}^M \frac{I_{\alpha\kappa}}{r_{\alpha\kappa}^2} \left[\left(\frac{p_{\alpha\kappa}}{r_{\alpha\kappa}} - \frac{x_{\alpha\kappa}}{f_0} \right) \left(r_{\alpha\kappa} \frac{\partial p_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_k} - p_{\alpha\kappa} \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{q_{\alpha\kappa}}{r_{\alpha\kappa}} - \frac{y_{\alpha\kappa}}{f_0} \right) \left(r_{\alpha\kappa} \frac{\partial q_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_k} - q_{\alpha\kappa} \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_k} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

ガウス・ニュートン近似⁹⁾ を用いると、2 階微分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi_k \partial \xi_l} &= 2 \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\kappa=1}^M \frac{I_{\alpha\kappa}}{r_{\alpha\kappa}^4} \left[\left(r_{\alpha\kappa} \frac{\partial p_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_k} - p_{\alpha\kappa} \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_k} \right) \left(r_{\alpha\kappa} \frac{\partial p_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_l} - p_{\alpha\kappa} \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_l} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(r_{\alpha\kappa} \frac{\partial q_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_k} - q_{\alpha\kappa} \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_k} \right) \left(r_{\alpha\kappa} \frac{\partial q_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_l} - q_{\alpha\kappa} \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial \xi_l} \right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

この結果 $\Delta \xi_k$ に関する E の 1 階微分 $\partial E/\partial \xi_k$ および 2 階微分 $\partial^2 E/\partial \xi_k \partial \xi_l$ を計算するには $p_{\alpha\kappa}$, $q_{\alpha\kappa}$, $r_{\alpha\kappa}$ の 1 階微分 $\partial p_{\alpha\kappa}/\partial \xi_k$, $\partial q_{\alpha\kappa}/\partial \xi_k$, $\partial r_{\alpha\kappa}/\partial \xi_k$ さえ与えられればよい。以下、これらを具体的に示す。

*1 厳密には「交換子積」演算を加えた代数系を「リー代数」と呼ぶ⁽⁶⁾。ここでは交換子積は考慮する必要がない。

5. 3次元位置に関する微分

式(5)より $p_{\alpha\kappa}$, $q_{\alpha\kappa}$, $r_{\alpha\kappa}$ の $(X_\beta, Y_\beta, Z_\beta)$ に関する微分は次のようになる。ただし, $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカデルタである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\alpha\kappa}}{\partial X_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{11}, & \frac{\partial p_{\alpha\kappa}}{\partial Y_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{12}, & \frac{\partial p_{\alpha\kappa}}{\partial Z_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{13} \\ \frac{\partial q_{\alpha\kappa}}{\partial X_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{21}, & \frac{\partial q_{\alpha\kappa}}{\partial Y_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{22}, & \frac{\partial q_{\alpha\kappa}}{\partial Z_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{23} \\ \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial X_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{31}, & \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial Y_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{32}, & \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial Z_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} P_\kappa^{33} \end{aligned} \quad (10)$$

6. 焦点距離に関する微分

式(2)の P を f で微分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial f} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^\top (I - t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} K^{-1} K R^\top (I - t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_0/f_0 \\ 0 & 1 & -v_0/f_0 \\ 0 & 0 & f/f_0 \end{pmatrix} P = \frac{1}{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_0/f_0 \\ 0 & 1 & -v_0/f_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P \\ &= \frac{1}{f} \begin{pmatrix} P^{11} - u_0 P^{31}/f_0 & P^{12} - u_0 P^{32}/f_0 & P^{13} - u_0 P^{33}/f_0 & P^{14} - u_0 P^{34}/f_0 \\ P^{21} - v_0 P^{31}/f_0 & P^{22} - v_0 P^{32}/f_0 & P^{23} - v_0 P^{33}/f_0 & P^{24} - v_0 P^{34}/f_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

ゆえに $p_{\alpha\kappa}$, $q_{\alpha\kappa}$, $r_{\alpha\kappa}$ の f_λ に関する微分は次のようになる。

$$\frac{\partial p_{\alpha\kappa}}{\partial f_\lambda} = \frac{\delta_{\kappa\lambda}}{f_\kappa} \left(p_{\alpha\kappa} - \frac{u_0}{f_0} r_{\alpha\kappa} \right), \quad \frac{\partial q_{\alpha\kappa}}{\partial f_\lambda} = \frac{\delta_{\kappa\lambda}}{f_\kappa} \left(q_{\alpha\kappa} - \frac{v_0}{f_0} r_{\alpha\kappa} \right), \quad \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial f_\lambda} = 0 \quad (12)$$

7. 光軸点に関する微分

式(2)の P を u_0 で微分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial u_0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^\top (I - t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} K^{-1} K R^\top (I - t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{f} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_0/f_0 \\ 0 & 1 & -v_0/f_0 \\ 0 & 0 & f/f_0 \end{pmatrix} P = \frac{1}{f_0} \begin{pmatrix} P^{31} & P^{32} & P^{33} & P^{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

同様に v_0 で微分すると次のようになる。

$$\frac{\partial P}{\partial v_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R^\top (I - t) = \frac{1}{f_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ P^{31} & P^{32} & P^{33} & P^{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

ゆえに $p_{\alpha\kappa}$, $q_{\alpha\kappa}$, $r_{\alpha\kappa}$ の $(u_{0\lambda}, v_{0\lambda})$ に関する微分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\alpha\kappa}}{\partial u_{0\lambda}} &= \frac{\delta_{\kappa\lambda} r_{\alpha\kappa}}{f_0}, & \frac{\partial q_{\alpha\kappa}}{\partial u_{0\lambda}} &= 0, & \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial u_{0\lambda}} &= 0, \\ \frac{\partial p_{\alpha\kappa}}{\partial v_{0\lambda}} &= 0, & \frac{\partial q_{\alpha\kappa}}{\partial v_{0\lambda}} &= \frac{\delta_{\kappa\lambda} r_{\alpha\kappa}}{f_0}, & \frac{\partial r_{\alpha\kappa}}{\partial v_{0\lambda}} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

8. 並進に関する微分

並進 t に関係するのは式(2)の投影行列 P の第4列であり, 次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} P^{14} \\ P^{24} \\ P^{34} \end{pmatrix} = -K R^\top t = - \begin{pmatrix} (fR^{11} + u_0R^{13})t_1 + (fR^{21} + u_0R^{23})t_2 + (fR^{31} + u_0R^{33})t_3 \\ (fR^{12} + v_0R^{13})t_1 + (fR^{22} + v_0R^{23})t_2 + (fR^{32} + v_0R^{33})t_3 \\ f_0(R^{13}t_1 + R^{23}t_2 + R^{33}t_3) \end{pmatrix} \quad (16)$$

これから次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} \begin{pmatrix} P^{14} \\ P^{24} \\ P^{34} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} fR^{11} + u_0R^{13} \\ fR^{12} + v_0R^{13} \\ f_0R^{13} \end{pmatrix}, & \frac{\partial}{\partial t_2} \begin{pmatrix} P^{14} \\ P^{24} \\ P^{34} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} fR^{21} + u_0R^{23} \\ fR^{22} + v_0R^{23} \\ f_0R^{23} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial t_3} \begin{pmatrix} P^{14} \\ P^{24} \\ P^{34} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} fR^{31} + u_0R^{33} \\ fR^{32} + v_0R^{33} \\ f_0R^{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

$(t_{\lambda 1}, t_{\lambda 2}, t_{\lambda 3})$ に関する微分記号 ∇_{t_λ} を用いると, 式(5)より次のようになる。

$$\nabla_{t_\lambda} p_{\alpha\kappa} = -\delta_{\kappa\lambda} (f_\kappa r_\kappa^1 + u_0 r_\kappa^3), \quad \nabla_{t_\lambda} q_{\alpha\kappa} = -\delta_{\kappa\lambda} (f_\kappa r_\kappa^2 + v_0 r_\kappa^3), \quad \nabla_{t_\lambda} r_{\alpha\kappa} = -\delta_{\kappa\lambda} f_0 r_\kappa^3 \quad (18)$$

ただし, $r_\kappa^1, r_\kappa^2, r_\kappa^3$ を次のように置いた。

$$r_\kappa^1 = \begin{pmatrix} R_\kappa^{11} \\ R_\kappa^{21} \\ R_\kappa^{31} \end{pmatrix}, \quad r_\kappa^2 = \begin{pmatrix} R_\kappa^{12} \\ R_\kappa^{22} \\ R_\kappa^{32} \end{pmatrix}, \quad r_\kappa^3 = \begin{pmatrix} R_\kappa^{13} \\ R_\kappa^{23} \\ R_\kappa^{33} \end{pmatrix} \quad (19)$$

9. 回転に関する微分

式(2)の P の回転に関する変化は第1近似において次のように書ける。

$$\Delta P = K(\omega \times R)^\top (I - t) = KR^\top \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_2 t_3 - \omega_3 t_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_3 t_1 - \omega_1 t_3 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_1 t_2 - \omega_2 t_1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

ただし、恒等式 $(\omega \times R)^\top = -R^\top (\omega \times I)$ および $(\omega \times I)t = \omega \times t$ を用いた⁷⁾。したがって $\partial P/\partial \omega_1, \partial P/\partial \omega_2, \partial P/\partial \omega_3$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \omega_1} &= \begin{pmatrix} 0 & -fR^{31} - u_0R^{33} & fR^{21} + u_0R^{23} & f(t_2R^{31} - t_3R^{21}) + u_0(t_2R^{33} - t_3R^{23}) \\ 0 & -fR^{32} - v_0R^{33} & fR^{22} + v_0R^{23} & f(t_2R^{32} - t_3R^{22}) + v_0(t_2R^{33} - t_3R^{23}) \\ 0 & -f_0R^{33} & f_0R^{23} & f_0(t_2R^{33} - t_3R^{23}) \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial P}{\partial \omega_2} &= \begin{pmatrix} fR^{31} + u_0R^{33} & 0 & -fR^{11} - u_0R^{13} & f(t_3R^{11} - t_1R^{31}) + u_0(t_3R^{13} - t_1R^{33}) \\ fR^{32} + v_0R^{33} & 0 & -fR^{12} - v_0R^{13} & f(t_3R^{12} - t_1R^{32}) + v_0(t_3R^{13} - t_1R^{33}) \\ f_0R^{33} & 0 & -f_0R^{13} & f_0(t_3R^{13} - t_1R^{33}) \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial P}{\partial \omega_3} &= \begin{pmatrix} -fR^{21} - u_0R^{23} & fR^{11} + u_0R^{13} & 0 & f(t_1R^{21} - t_2R^{11}) + u_0(t_1R^{23} - t_2R^{13}) \\ -fR^{22} - v_0R^{23} & fR^{12} + v_0R^{13} & 0 & f(t_1R^{22} - t_2R^{12}) + v_0(t_1R^{23} - t_2R^{13}) \\ -f_0R^{23} & f_0R^{13} & 0 & f_0(t_1R^{23} - t_2R^{13}) \end{pmatrix} \quad (21) \end{aligned}$$

$(\omega_{\lambda 1}, \omega_{\lambda 2}, \omega_{\lambda 3})$ に関する微分記号 ∇_{ω_λ} を用いると、式 (5) より次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla_{\omega_\lambda} p_{\alpha\kappa} &= \delta_{\kappa\lambda} (f_\kappa r_\kappa^1 + u_{0\kappa} r_\kappa^3) \times (X_\alpha - t_\kappa), \\ \nabla_{\omega_\lambda} q_{\alpha\kappa} &= \delta_{\kappa\lambda} (f_\kappa r_\kappa^2 + v_{0\kappa} r_\kappa^3) \times (X_\alpha - t_\kappa), \quad \nabla_{\omega_\lambda} r_{\alpha\kappa} = \delta_{\kappa\lambda} f_0 r_\kappa^3 \times (X_\alpha - t_\kappa) \quad (22) \end{aligned}$$

ただし、 $X_\alpha = (X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)^\top$ と置いた。

10. レーベンバーグ・マーカート法

以上のようにして再投影誤差 E の 1 階、2 階微分が得られたら、 E を最小化するレーベンバーグ・マーカート (LM) 法は次のようになる⁹⁾。

- (1) 初期値 $X_\alpha, f_\kappa, (u_{0\kappa}, v_{0\kappa}), t_\kappa, R_\kappa$ を与え、それに対する再投影誤差 E を計算し、 $c = 0.0001$ と置く。
- (2) 1 階および 2 階微分 $\partial E/\partial \xi_k, \partial^2 E/\partial \xi_k \partial \xi_l, k, l = 1, \dots, 3N + 9M$ を計算する。
- (3) 次の連立 1 次方程式を解いて $\Delta \xi_k, k = 1, \dots, 3N + 9M$ を計算する。

$$\begin{pmatrix} (1+c)\partial^2 E/\partial \xi_1^2 & \partial^2 E/\partial \xi_1 \partial \xi_2 & \cdots & \partial^2 E/\partial \xi_1 \partial \xi_{3N+9M} \\ \partial^2 E/\partial \xi_2 \partial \xi_1 & (1+c)\partial^2 E/\partial \xi_2^2 & \cdots & \partial^2 E/\partial \xi_2 \partial \xi_{3N+9M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 E/\partial \xi_{3N+9M} \partial \xi_1 & \partial^2 E/\partial \xi_{3N+9M} \partial \xi_2 & \cdots & (1+c)\partial^2 E/\partial \xi_{3N+9M}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \xi_1 \\ \Delta \xi_2 \\ \vdots \\ \Delta \xi_{3N+9M} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial E/\partial \xi_1 \\ \partial E/\partial \xi_2 \\ \vdots \\ \partial E/\partial \xi_{3N+9M} \end{pmatrix} \quad (23)$$

- (4) $X_\alpha, f_\kappa, (u_{0\kappa}, v_{0\kappa}), t_\kappa, R_\kappa$ を次のように更新する。

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\alpha &\leftarrow X_\alpha + \Delta X_\alpha, \quad \tilde{f}_\kappa \leftarrow f_\kappa + \Delta f_\kappa, \\ (\tilde{u}_{0\kappa}, \tilde{v}_{0\kappa}) &\leftarrow (u_{0\kappa}, v_{0\kappa}), \quad \tilde{t}_\kappa \leftarrow t_\kappa + \Delta t_\kappa, \quad \tilde{R}_\kappa \leftarrow \mathcal{R}(\omega_\kappa) R_\kappa \quad (24) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathcal{R}(\omega_\kappa)$ は回転軸 $\mathcal{N}[\omega_\kappa]$ の右ねじ回りの回転角 $\|\omega_\kappa\|$ の回転行列 (ロドリゲスの公式^{*1)})⁸⁾ である。

- (5) $\tilde{X}_\alpha, \tilde{f}_\kappa, (\tilde{u}_{0\kappa}, \tilde{v}_{0\kappa}), \tilde{t}_\kappa, \tilde{R}_\kappa$ に対する再投影誤差 \tilde{E} を計算し、 $\tilde{E} > E$ なら $c \leftarrow 10c$ としてステップ (3) に戻る。
- (6) 未知数を

$$X_\alpha \leftarrow \tilde{X}_\alpha, \quad f_\kappa \leftarrow \tilde{f}_\kappa, \quad (u_{0\kappa}, v_{0\kappa}) \leftarrow (\tilde{u}_{0\kappa}, \tilde{v}_{0\kappa}), \quad t_\kappa \leftarrow \tilde{t}_\kappa, \quad R_\kappa \leftarrow \tilde{R}_\kappa \quad (25)$$

と置き換え、 $|\tilde{E} - E| \leq \delta$ であれば終了する (δ は微小な定数)。そうでなければ $E \leftarrow \tilde{E}, c \leftarrow c/10$ としてステップ (2) に戻る。

11. 実装上の工夫

11.1 解の不定性の除去

前節の方法はそのままでは、式 (23) の右辺の行列の行列式が $c = 0$ のとき解において 0 になるので、 $\Delta \xi_k$ が一意的に求まらない。これは、3 次元形状の絶対的位置とスケールに不定性があることに対応している。そこで位置とスケールを次のように正規化する。

$$R_1 = I, \quad t_1 = 0, \quad t_{22} = 1 \quad (26)$$

これは第 1 カメラを基準として 3 次元位置を計算し、スケールは第 2 カメラの第 1 カメラに対する Y 軸方向の移動を 1 とすることである。理論的には $\|t_2\| = 1$ とするほうが一般的であるが、非線形な制約となるので扱いにくい。ここでは第 2 カメラは第 1 カメラの Y 軸方向に移動しているとする (X 軸方向、あるいは Z 軸方向に移動していることが分かっていたら $t_{21} = 1$ または $t_{23} = 1$ とする)。そして、式 (23) の係数行列から $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \Delta t_{11}, \Delta t_{12}, \Delta t_{13}, \Delta t_{22}$ に対応する行と列とを削除し、残りの $3N + 9M - 7$ 個の未知数に対して式 (23) を解く。LM 法は何らかの方法 (最小二乗法等) で計算した初期解 $X_\alpha, f_\kappa, (u_{0\kappa}, v_{0\kappa}), t_\kappa, R_\kappa$ から反復を開始するが、この初期解が式 (26) を考慮せずに計算されている場合は、式 (26) に適合するように $X_\alpha, t_\kappa, R_\kappa$ を次のように $X'_\alpha, t'_\kappa, R'_\kappa$ に変換する。

$$X'_\alpha = \frac{1}{s} R_1^\top (X_\alpha - t_1), \quad R'_\kappa = R_1^\top R_\kappa, \quad t'_\kappa = \frac{1}{s} R_1^\top (t_\kappa - t_1) \quad (27)$$

ただし、 $s = (j, R_1^\top (t_2 - t_1))$ であり、 $j = (0, 1, 0)^\top$ である。

*1 形式的に $\exp(\omega_\kappa \times I)$ と書き、リー代数 $so(3)$ の Lie 群 $SO(3)$ への「指数写像」と呼ばれる⁶⁾。

11.2 計算とメモリの効率化

式 (8), (9) 中の和 $\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\kappa=1}^M$ の MN 個の項の相当部分が 0 であり, そのまま計算すると実行時間の多くが 0 の計算に費やされる. これを防ぐために 0 でない項を選択する. まず $\partial E/\partial \xi_k$ を考える. 式 (8) において, $\Delta \xi_k$ が第 β 点の補正 ΔX_β の成分のときは式 (10) 中の $\delta_{\alpha\beta}$ のため和 $\sum_{\alpha=1}^N$ の $\alpha = \beta$ の項のみを計算すればよい. $\Delta \xi_k$ が第 λ 画像に関する f_λ , $(u_{0\lambda}, v_{0\lambda})$, t_λ または R_λ の補正であれば式 (12), (15), (18), (22) 中の $\delta_{\kappa\lambda}$ のため和 $\sum_{\kappa=1}^M$ の $\kappa = \lambda$ の項のみを計算すればよい. したがって式 (8) の $\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\kappa=1}^M$ は α または κ のどちらか一方に関する和のみを計算すればよい. しかもその和は, 第 α 点に対してはそれが見える第 κ 画像についてのみ, 第 κ 画像に対してはそれに含まれる第 α 点についてのみ計算すればよい.

同様に $\partial^2 E/\partial \xi_k \partial \xi_l$ についても, 式 (9) において $\Delta \xi_k, \Delta \xi_l$ が両方とも点に関する量であれば, それが異なる点のとき式 (9) は 0 となり, 同じ点に関する量のときは $\sum_{\alpha=1}^N$ のその点に関する項のみを計算すればよい. $\Delta \xi_k, \Delta \xi_l$ が両方とも画像に関する量であれば, それが見える第 κ 画像のとき式 (9) は 0 となり, 同じ画像に関する量のときは $\sum_{\kappa=1}^M$ のその画像に関する項のみを計算すればよい. $\Delta \xi_k, \Delta \xi_l$ の一方が点に関する量, 他方が画像に関する量であれば, $\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\kappa=1}^M$ はその点が見えるときのみ, そしてその点および画像に対する項のみを計算すればよい.

このようにすれば $\partial E/\partial \xi_k, \partial^2 E/\partial \xi_k \partial \xi_l$ の計算時間は最小限に抑えられるが, 2 階微分 $\partial^2 E/\partial \xi_k \partial \xi_l$ を要素とする行列 (ヘッセ行列) $H(k, l)$ は大きさが $(3N + 9M - 7) \times (3N + 9M - 7)$ であり, N, M が大きいと計算機内に格納するのが困難になる. そこで本システムでは $3N \times 3$ の配列 E , $3N \times 9M$ の配列 F , $9M \times 9$ の配列 G を用意し, E には $\partial^2 E/\partial X_\alpha^2, \partial^2 E/\partial X_\alpha \partial Y_\alpha$ 等の特徴点間の 2 階微分を, F には $\partial^2 E/\partial X_\alpha \partial f_\kappa, \partial^2 E/\partial X_\alpha \partial u_{0\kappa}$ 等の特徴点とフレーム間の 2 階微分を, G には $\partial^2 E/\partial f_\kappa^2, \partial^2 E/\partial f_\kappa \partial u_{0\kappa}$ のフレーム間の 2 階微分を格納した. これによって必要な配列要素は $27NM + 9N + 81M$ 個でよい^{*1}. そしてヘッセ行列 $H(k, l)$ は (k, l) 要素を呼び出す関数とする.

11.3 連立 1 次方程式の解法

$3N + 9M - 7$ 個の未知数に対応して式 (23) の左辺の行列は $(3N + 9M - 7) \times (3N + 9M - 7)$ となるが, N, M が大きいとき, これを解くための LU 分解やコレスキー分解などの途中計算を格納するバッファが確保できない. そこで岡谷²⁰⁾ が述べているように未知数を点の

*1 要素に重複があり, 必要な 2 階微分は $27NM + 6N + 41M$ 個で, そのうち $I_{\alpha\kappa} = 0$ のものは不要である.

3 次元座標の部分とカメラパラメータに関する部分に分けて式 (23) を分解する. 式 (23) は

$$\begin{pmatrix} E_1^{(c)} & & & F_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & E_N^{(c)} & F_N \\ F_1^\top & \dots & F_N^\top & G^{(c)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \xi_P \\ \Delta \xi_F \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} d_P \\ d_F \end{pmatrix} \quad (28)$$

の形をしている. ここに $\Delta \xi_P$ は $\Delta \xi$ の点の 3 次元位置に関する部分の $3N$ 次元ベクトルであり, $\Delta \xi_F$ はカメラパラメータに関する部分の $9M - 7$ 次元ベクトルである. そして, d_P, d_F は式 (23) の右辺のベクトルの対応する $3N$ および $9M - 7$ 次元部分である. $E_\alpha^{(c)}, \alpha = 1, \dots, N$ は第 α 点の位置 $(X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)$ に関する再投影誤差 E の 2 階微分を配置した 3×3 行列であり, 右肩の (c) は対角要素が $(1+c)$ 倍されていることを表す. 各 F_α は第 α 点の位置 $(X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha)$ と第 α 点が見えるフレームのカメラパラメータに関する E の 2 階微分を配置した $3 \times (9M - 7)$ 行列である. 一方 $G^{(c)}$ は E のカメラパラメータ間の 2 階微分を配置した $(9M - 7) \times (9M - 7)$ 行列であり, 対角要素が $(1+c)$ 倍されている. 式 (28) は次の二つの式に分解できる.

$$\begin{pmatrix} E_1^{(c)} & & \\ & \ddots & \\ & & E_N^{(c)} \end{pmatrix} \Delta \xi_P + \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} \Delta \xi_F = -d_P, \quad \begin{pmatrix} F_1^\top & \dots & F_N^\top \end{pmatrix} \Delta \xi_P + G^{(c)} \Delta \xi_F = -d_F \quad (29)$$

第 1 式を $\Delta \xi_P$ について解いて第 2 式に代入すると, 次の $\Delta \xi_F$ のみに関する $9M - 7$ 次元連立 1 次方程式を得る.

$$\left(G^{(c)} - \sum_{\alpha=1}^N F_\alpha^\top E_\alpha^{(c)-1} F_\alpha \right) \Delta \xi_F = \sum_{\alpha=1}^N F_\alpha^\top E_\alpha^{(c)-1} \nabla_\alpha E - d_F, \quad \nabla_\alpha E \equiv \begin{pmatrix} \partial E/\partial X_\alpha \\ \partial E/\partial Y_\alpha \\ \partial E/\partial Z_\alpha \end{pmatrix} \quad (30)$$

これを解いて $\Delta \xi_F$ を定め, 式 (29) の第 2 式に代入すると $\Delta \xi_P$ が求まる. 第 α 点の部分は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} \Delta X_\alpha \\ \Delta Y_\alpha \\ \Delta Z_\alpha \end{pmatrix} = -E_\alpha^{(c)-1} (F_\alpha \Delta \xi_F + \nabla_\alpha E) \quad (31)$$

11.4 収束判定

上述の工夫を行っても, 計算は多くの実行時間を要する. 通常反復計算はすべての未知数の値が変化しなくなるまで続けることが多いが, バンドル調整では未知数が数千, 数万

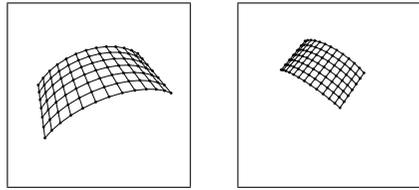


図 1 曲面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像。

回	バンドル調整	金谷・菅谷の方法 ¹⁴⁾
0	0.2740543086661	0.0000000000000
1	0.1083766529404	0.1071688468318
2	0.1076009069457	0.1071686014356
3	0.1076005713017	0.1071686015030
4	0.1071718714030	0.1071686013682
5	0.1071686014673	0.1071686015030
6	0.1071686014580	0.1071686013682
7	0.1071686014580	0.1071686016378

表 1 反復回数と再投影誤差の収束 ($\sigma = 0.1$ 画素)。

になることもあり、すべての値の有効数字を収束させるには膨大な反復時間が必要となる。しかし、バンドル調整の目的は再投影誤差を最小にする解を見つけることであり、再投影誤差が変化がしなくなれば停止するのが実際的である。10 節の LM 法ではそのようにしている。例えば、1 点あたりの再投影誤差の変化量が ϵ (画素) 以下になったとき終了するとすれば、10 節の LM 法の微小定数 δ は $\delta = n\epsilon^2/f_0^2$ となる。ただし、 $n = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\kappa=1}^M I_{\alpha\kappa}$ (見える画像上の点の個数) である。実験では $\epsilon = 0.01$ 画素とした。

12. 実験例 1. 2 画像からの 3 次元復元

図 1 は曲面格子を 2 方向から撮影したシミュレーション画像 (600 × 600 画素, 焦点距離 $f = f' = 600$ 画素) である。各格子点の画像上の x, y 座標に平均 0, 標準偏差 0.1 画素の正規乱数誤差を加え、最小二乗法 (Hartley の 8 点アルゴリズム³⁾) によって基礎行列を計算し、これから山田ら²²⁾ に従って焦点距離, 並進, 回転を計算し, 各格子点の 3 次元位置を復元した。ただし, 2 画像のみからは原理的に光軸点を定めることができないので²²⁾, 光軸点 (u_0, v_0) は画像中心に固定した。そして 280 次元空間 (焦点距離 2 自由度, 2 カメラ間の並進 2 自由度, 相対回転 3 自由度, 91 格子点の 3 次元座標 273 自由度) においてバンドル調整を開始した。精度としては, 式 (4) の再投影誤差を 1 点あたりの画素単位に換算した次の e で評価した ($N = 91$)。

$$e = f_0 \sqrt{\frac{E}{N-7}} \quad (32)$$

根号中の分母 $N - 7$ の 7 は焦点距離, 並進, 回転の自由度である。こうすると統計学でよく知られたように⁷⁾, 各点の画像上の誤差が期待値 0, 標準偏差 σ の独立な正規分布のとき $e^2/f_0^2\sigma^2$ が自由度 $N - 7$ の χ^2 分布に従うので期待値が $N - 7$ となり, 式 (32) の e がほぼ

σ に等しくなるためである。

比較のために, 同じ初期解から出発し, 金谷・菅谷¹⁴⁾ の方法を用いた場合と合わせて示した表 1 である (収束判定は行わずに実行を続けた)。金谷・菅谷¹⁴⁾ の方法は $xyx'y'$ 空間でエピ極線方程式の定義する 3 次元多様体 (4 次元空間の一葉双曲面) に観測した対応点対を直交射影し, EFNS 法¹³⁾ によって基礎行列を反復的に最適化するものである。表 1 から分かるように, バンドル調整と同じ解に到達しているのだから, アルゴリズムの最適性が確認される。そして, 2 回の反復でほぼ収束しているのに対して, バンドル調整では 5 回程度の反復が必要である。このことから 2 画像の場合は文献 14) の方法で基礎行列を計算し, 山田らの方法²²⁾ の方法で 3 次元復元するのがよい。ただし, 山田らの方法²²⁾ では計算途中で根号の中身が負になって焦点距離の実数値が計算できないことが生じ得る。その場合は適当な推定値を用いてバンドル調整を行うことが必要になる。

13. 実験例 2. 多画像からの 3 次元復元

英国 Oxford 大学が提供している実測データ (<http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/data.html>) に対して実験を行った (その 1 フレームを図 2(a) に示す)。これは恐竜の模型を回転台に載せて, 36 方向から撮影したものである。抽出した特徴点は合計 4983 個あり, それぞれ 2 ~ 21 フレームに渡って対応付けられている。そして各フレームの投影行列 P_{κ} が推定されている。

未知数が 15266 個あるので, 式 (23) の行列要素は約 2 億個になり, 計算機内に格納できない。しかし 11 節の方法を用いれば約 41 万個 (約 6 百分の 1) のメモリに格納できる。しかも各点が見えるフレーム数は限られているため, その多くが 0 である。図 2(b) はこの 4983 個の点から 100 点を抜き出した場合のヘッセ行列 (1008 × 1008) の零要素を白, 非零要素を黒として画像として表示したものである。このように非零要素はわずかである (割合にして 13%)。

まずデータベースに与えられている投影行列 P_{κ} から各フレームの焦点距離 f_{κ} , 光軸点 $(u_{0\kappa}, v_{0\kappa})$, 並進 t_{κ} , 回転 R_{κ} を推定し (付録 A.1), 次に最小二乗法で各点の 3 次元位置を計算した (付録 A.2)。そしてバンドル調整を開始した。画像上に現れる点数は $n = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\kappa=1}^M I_{\alpha\kappa}$ は 16432 個であり, 式 (4) の再投影誤差を 1 点あたりの画素単位に換算すると, 式 (32) に対応して次のようになる。

$$e = f_0 \sqrt{\frac{E}{2n - (3N + 9M - 7)}} \quad (33)$$

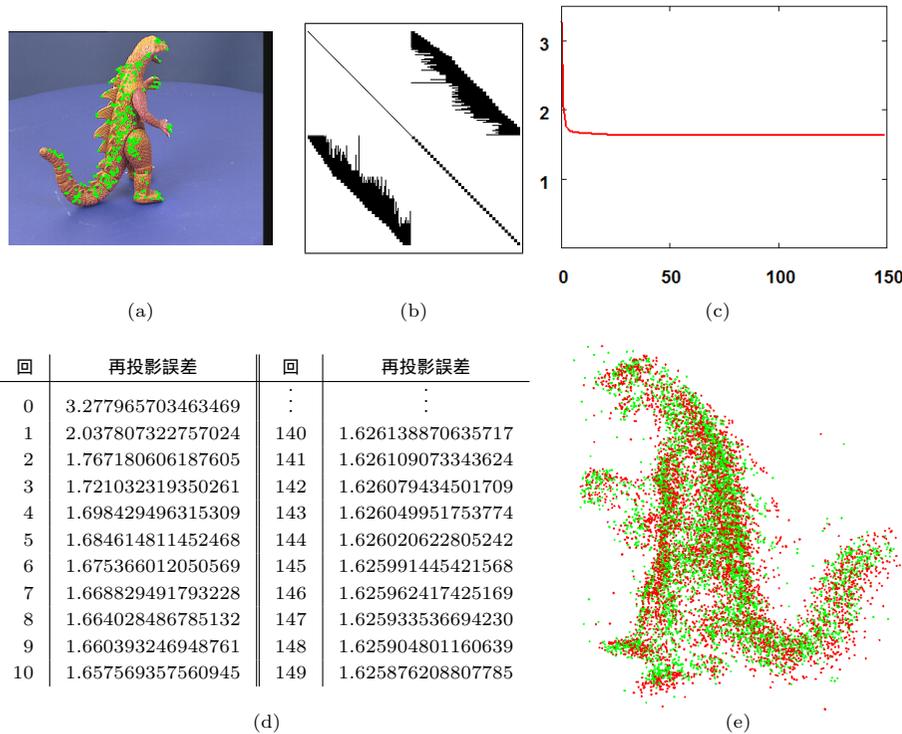


図 2 (a) 用いた 36 画像中の一つ。(b) 100 点を抜き出した場合のヘッセ係数行列の非零パターン。(c) 反復回数に対する再投影誤差 e のグラフ。(d) 反復回数に対する再投影誤差 e の値。(e) 3 次元復元。赤：初期位置。緑：収束位置

最小二乗法による初期復元の再投影誤差は $e = 3.27797$ 画素であったが、バンドル調整の結果 $e = 1.625876$ 画素に低下した。反復回数による e の変化を図 2(c) に、その具体的な数値を図 2(d) に示す。反復回数は 149 回であり、実行時間は 21 分 51 秒であった。ただし、C++ 言語を用い、CPU には Intel Core2Duo E6750, 2.66GHz, 主メモリ 4GB, OS には Windows Vista を用いた。図 2(e) は復元した各点の 3 次元位置をある方向から眺めたものである。赤は最小二乗法による初期位置であり、緑が最終的な復元位置である。

14. ま と め

本論文では多画像からの 3 次元形状復元を行うバンドル調整のアルゴリズムを最新の研究に基づいて詳細に記述した。本論文で着目したのはカメラ回転の適切な取扱い方、および特徴点と画像数が多いときの計算とメモリの効率化である。まず 2 画像からの基礎行列の計算に応用し、金谷・菅谷¹⁴⁾の方法と同じ解が得られ、彼らの方法が最適であることを実証した。ただし、バンドル調整は効率において彼らの方法に劣る。次に英国 Oxford 大学の実測データを用いて 3 次元を行った。これは特徴点数が非常に多く、バンドル調整をその原理通りに実装することは困難であるが、ここに述べた工夫によって実行できることを示した。

理論的にはバンドル調整は任意の 3 次元復元に適用できる万能手法であるが、椋木ら¹⁹⁾が検討したような単純な形状（例えば球面）と単純なカメラ配置（例えば同心円上）から出発して複雑な形状に収束させることには無理があり、初めに精度のよい近似的な 3 次元復元を行うことが必要である。近似的 3 次元復元の代表はアフィンカメラ近似による因子分解法^{2),5),11),12)}であるが、透視投影モデルによる自己校正法^{1),10),18)}のほうが精度が高い。バンドル調整はそのような高精度の復元を行った後の最終的な補正を行う手段とみなすのがよいと思われる。

謝辞：バンドル調整についてご助言頂いた東北大学の岡谷貴之准教授に感謝します。本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成による。

参 考 文 献

- 1) ハノ・アッカーマン, 新妻弘崇, 金谷健一, 自己校正法のための射影復元の計算量削減, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-160-11 (2007-9), 63-70.
- 2) 浅原 清太郎, 金谷 健一, 菅谷 保之, ハノ・アッカーマン, 未校正因子分解法による 3 次元復元: 比較実験, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-151-20 (2005-11), 145-152.
- 3) R. I. Hartley, In defense of the eight-point algorithm, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, 19-6 (1997-6), 580-593.
- 4) R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004.
- 5) 金出武雄, コンラッド・ポールマン, 森田俊彦, 因子分解法による物体形状とカメラ運動の復元, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J74-D-II-8** (1993-8), 1497-1505.
- 6) K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, Germany, 1990.
- 7) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
- 8) 金谷健一, 「形状 CAD と図形の数学」, 共立出版, 1998.

- 9) 金谷健一, 「これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—」, 共立出版, 2005.
- 10) 金谷健一, 視覚情報の数理, 広中平祐 (編), 「現代数理科学事典」, 第2版, 丸善, 2009, pp. 1062-1068.
- 11) 金谷健一, 浅原清太郎, 菅谷保之, ハノ・アッカーマン, 未校正因子分解法: カメラモデルを指定しないユークリッド復元, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-150-16 (2005-9), 131-138.
- 12) 金谷健一, 菅谷保之, 因子分解法の完全レシピ, 電子情報通信学会技術報告, PRMU2003-118 (2003-10), 19-24.
- 13) 金谷健一, 菅谷保之, 制約付きパラメータ推定のための拡張 FNS 法, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-158-4, (2007-3), 25-32.
- 14) K. Kanatani and Y. Sugaya, Compact fundamental matrix computation, *IPSJ Trans. Comput. Vis. Appl.* **2** (2010-3), 59-70.
- 15) M. I. A. Lourakis and A. A. Argyros, Is Levenberg-Marquardt the most efficient optimization algorithm for implementing bundle adjustment?, *Proc. 10th Int. Conf. Comput. Vis.*, Vol. 2, October 2005, Beijing, China, pp. 1526-1531.
- 16) M. I. A. Lourakis and A. A. Argyros, SBA: A software package for generic sparse bundle adjustment, *ACM Trans. Math. Software*, **36**-1 (2009-3), 2:1-30.
- 17) 右田剛史, 天野晃, 浅田尚紀, 3次元形状・運動復元のための高速非線形最適化計算法, 情報処理学会論文誌, **44**-11 (2003-11), 2864-2872.
- 18) 森昭延, ハノ・アッカーマン, 金谷健一, 高速射影復元: 徹底的な高速化を目指して, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-157-15 (2007-1), 109-116.
- 19) 椋木雅之, 右田剛史, 青山正人, 浅田尚紀, 非線形最適化による建物画像列からの全周形状一括復元のための初期値設定法, 情報処理学会論文誌, **4**-SIG13 (2004-12), 64-73.
- 20) 岡谷貴之, バンドルアジャストメント, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-167-37 (2009-6), 1-16.
- 21) B. Triggs, P. F. McLauchlan, R. I. Hartley, and A. Fitzgibbon, Bundle adjustment—A modern synthesis, in B. Triggs, A. Zisserman, and R. Szeliski, (eds.), *Vision Algorithms: Theory and Practice*, Springer, Berlin, 2000, pp. 298-375.
- 22) 山田健人, 金澤靖, 金谷健一, 菅谷保之, 画像からの3次元復元の最新アルゴリズム, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-168-15 (2009-9), 1-8.

付 録

A.1 投影行列の分解

投影行列を $P = \begin{pmatrix} Q & q \end{pmatrix}$ とする. すなわち P の最初の 3×3 行列を Q , 第4行を q とする. 式(1)より投影行列 P には符号の不定性があるので, $\det Q < 0$ なら Q と q の符号を換える. さらに定数倍の不定性があるので

$$Q = cKR^T, \quad q = -cKR^T t \quad (34)$$

と置く. c は未知の正の比例定数である. まず並進 t が次のように定まる.

$$t = -Q^{-1}q \quad (35)$$

R は回転行列であり, $R^T R = I$ であるから式(34)の第1式より次の関係を得る.

$$QQ^T = c^2 KR^T RK^T = c^2 KK^T \quad (36)$$

この逆行列は次のようになる.

$$(QQ^T)^{-1} = \frac{1}{c^2} (K^{-1})^T (K^{-1}) \quad (37)$$

$(QQ^T)^{-1}$ をコレスキー分解し, 上三角行列 C によって

$$(QQ^T)^{-1} = C^T C \quad (38)$$

と表す. 上三角行列の逆行列も上三角行列であるから, 式(37), (38)より

$$C = \frac{1}{c} K^{-1} \quad \text{すなわち} \quad C^{-1} = cK \quad (39)$$

となる. 式(34)の第1式と式(39)から次の関係を得る.

$$Q = C^{-1} R^T \quad (40)$$

これから R が次のように求まる.

$$R = (CQ)^T \quad (41)$$

内部パラメータ行列 K は式(39)より C^{-1} の(3,3)要素が1になるように定数倍して得られる.

A.2 最小二乗法による3次元復元

式(3)の分母を払うと次のようになる.

$$\begin{aligned} xP^{31}X + xP^{32}Y + xP^{33}Z + xP^{34} &= f_0P^{11}X + f_0P^{12}Y + f_0P^{13}Z + f_0P^{14} \\ yP^{31}X + yP^{32}Y + yP^{33}Z + yP^{34} &= f_0P^{21}X + f_0P^{22}Y + f_0P^{23}Z + f_0P^{24} \end{aligned} \quad (42)$$

これを各点 p_α ごとにそれが見えている $n_\alpha (= \sum_{\kappa=1}^M I_{\alpha\kappa})$ フレームに対して列挙すれば点 p_α の3次元位置 X_α に関する $2n_\alpha$ 個の連立1次方程式

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{\alpha\kappa}P_\kappa^{31} - f_0P_\kappa^{11} & x_{\alpha\kappa}P_\kappa^{32} - f_0P_\kappa^{12} & x_{\alpha\kappa}P_\kappa^{33} - f_0P_\kappa^{13} \\ y_{\alpha\kappa}P_\kappa^{31} - f_0P_\kappa^{21} & y_{\alpha\kappa}P_\kappa^{32} - f_0P_\kappa^{22} & y_{\alpha\kappa}P_\kappa^{33} - f_0P_\kappa^{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\alpha \\ Y_\alpha \\ Z_\alpha \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \vdots \\ x_{\alpha\kappa}P_\kappa^{34} - f_0P_\kappa^{14} \\ y_{\alpha\kappa}P_\kappa^{34} - f_0P_\kappa^{24} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (43)$$

が得られる. これを最小二乗法⁹⁾で解くことによって初期位置が計算される.