信頼性評価を備えた最適なコニック当てはめプログラム

三島 等 [†]　　太田 直哉 [†]　　金谷 健一 [†]

[†] 群馬大学工学部情報工学科

本論文では平面上に与えられた点列に最適にコニックを当てはめるとともに当てはめの信頼性評価を与えるプログラムパッケージを記述する。その原理は最尤推定を "くりこみ法" と呼ばれる手法で計算するものである。まず入出力と信頼性評価の表現法、およびアルゴリズムの概要を述べ、プログラムの仕様を説明し、最後に実行例を示し、プログラムの特徴や注意事項を述べる。本プログラムは極めて効率的、高精度、かつロバストであり、コンピュータビジョンの様々な応用に広く利用されることが期待される。

キーワード: コニック, プログラム, ソフトウェアライブラリ, 最適当てはめ, くりこみ法, 信頼性評価

Optimal Conic Fitting Program with a Reliability Measure

Hitoshi Mishima[†], Naoya Ohta[†] and Kenichi Kanatani[†]

[†]Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan

This paper describes a program package for optimally fitting a conic to a sequence of points given on a plane and evaluating the reliability of the resulting fit. The basic principle is computing maximum likelihood estimation by a technique called *renormalization*. We first describe the representation of input/output and reliability evaluation. Then, we summarize the algorithm and describe the program specification. Finally, we show execution examples and comment on characteristics of this program and related topics. This program is very efficient, accurate, and robust and is expected to be used widely for many computer vision applications.

Key words: conic, program, software library, optimal fitting, renormalization, reliability evaluation

謝辞: 本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究 C (2) (No. 09680352) によった。

[†] 376-8515 桐生市天神町 1–5–1 群馬大学工学部情報工学科, Tel: (0277)30-1842, Fax: (0277)30-1801, E-mail: {mishima|ohta|kanatani}@ail.cs.gunma-u.ac.jp

1. 序論

コニック (円錐曲線) とは楕円 (円を含む)、放物線、双曲線、およびそれらが退化したものを総称したものである。人工物には円や球から成る形状が多く、その境界は画像上で楕円として現われる。したがってコニック当てはめも直線当てはめに次いで重要な当てはめ問題あり、これを利用した物体認識システムがいろいろ試みられている [6, 27, 28]。さらに物体形状が円あるいは既知の形状の楕円であることがわかっていれば、1画像からその3次元位置を計算することもできる [16]。このため過去に種々のコニック当てはめ手法が提案された。これにはハフ変換に基づくもの [4, 7, 31]、さまざまなパラメータ化と最小二乗法との組み合わせ [2, 3, 19, 20, 24, 29]、エッジ強度や濃淡値やその他の情報を発見的手法と組み合わせるもの [1, 5, 22, 25, 28] などがある (これらは文献 [26] に総括されている)。

しかし、当てはめ手法の考案する際に誤差の統計的挙動が考慮されることは少なかった。例外は Porril [23] であり、一様等方な正規分布を仮定し、データ点を順次追加しては解を (ベイズ推定の意味で) 最適に更新する手法を導入し、これを「拡張カルマンフィルタ」と呼んだ。一方 Joseph [8] と Werman ら [32] は古典的な統計解析手法を適用して、データ点数無限大の極限における当てはめ方程式の各係数の漸近的挙動を解析した。

それに対して金谷 [13, 14] は各種の幾何学的推定問題を抽象化し、データ点数を固定して微小誤差に対する第1近似による解析を行い、最尤推定に基く一般的な最適推定の理論を提唱した。この理論をコニック当てはめに適用すると、最適な当てはめコニックが得られるだけでなく、その信頼性が定量的に評価できる。その基本形は文献 [11] に、より洗練された手法が文献 [17, 30] に示されている。 Leedan ら [18] は誤差が大きい場合の比較実験も行なわれ、この方法が優秀であることを示している。

本論文の目的は、この最適コニック当てはめのアルゴリズムをプログラムパッケージとして提供することにある。まず入出力と信頼性評価の表現法、およびアルゴリズムの概要を述べ、プログラムの仕様を説明し、最後に実行例を示し、このプログラムの特徴や注意事項を述べる。

2. 入出力の表現法

コニックは次の方程式で表される曲線のことである [12, 15]。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \tag{1}$$

行列 $\boldsymbol{Q}$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} A & B & D/f \\ B & C & E/f \\ D/f & E/f & F/f^2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x/f \\ y/f \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

と定義すると式 (1) は次のように書ける。

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}) = 0 \tag{3}$$

ただし $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ はベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積である。式 (2) 中の f は x/f, y/f を 1 のオーダにするためのスケール因子である。本プログラムでは平面上に与えられた点列 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha=1}^N$ の各点をベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$

$= (x_\alpha/f, y_\alpha/f, 1)^\top$ で表す ($\top$ は転置)。定数 f は $x_\alpha/f,\ y_\alpha/f,\ \alpha = 1,\ ...,\ N$ がほぼ ± 1 の範囲内に収まるように選ぶ[1]。出力は当てはめたコニックを指定する行列 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ である。これには定数倍の不定性があるので $\|\hat{\boldsymbol{Q}}\| = 1$ と正規化する (行列 $\boldsymbol{Q} = (Q_{ij})$ のノルムは $\|\boldsymbol{Q}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}{}^2}$ と定義する)。

3. 信頼性評価の表現法

各点 (x_α, y_α) には不確定さがあるする。その共分散行列を $\boldsymbol{\Sigma}_\alpha$ とすると、ベクトル表示 $\boldsymbol{x}_\alpha$ の共分散行列が次のように定義される ($\boldsymbol{0}$ は零ベクトル)。

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_\alpha & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}^\top & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

以下では各点の共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ が定数倍を除いて与えられるとする。すなわち未知の定数 ϵ (ノイズレベルと呼ぶ) が存在して、

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \tag{5}$$

と書けるとし、$V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ (正規化共分散行列と呼ぶ) を入力として指定する。これはデータのノイズ依存性を指定するものであり、ノイズに特に方向性がない場合はデフォルト値として $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] = \mathrm{diag}(1, 1, 0)$ とする ($\mathrm{diag}(\cdots)$ は $\cdots$ を対角要素とする対角行列)。本プログラムでは点 p をその位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ と正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{x}]$ とをもつオブジェクトとみなし、そのクラスを画像位置と呼ぶ。

このような不確定性をもつデータに当てはめたコニックも不確定性を持つ。これを評価するために、パラメータ空間で最も誤差が生じやすい方向に正負の標準偏差だけ偏った点の表す二つのコニック $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}^{(+)}\boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}^{(-)}\boldsymbol{x}) = 0$ を計算する。これを標準偏位と呼ぶ [17, 30]。

4. プログラムの概要

入力: 画像位置の列 $\{p_\alpha\}_{\alpha=1}^{N}$ $(N \geq 5)$。

出力: 行列 $\hat{\boldsymbol{Q}}$、$\boldsymbol{Q}^{(+)}$, $\boldsymbol{Q}^{(-)}$。

アルゴリズム:

1. $c = 0$, $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1, ..., N$ と置く。
2. 次のようにテンソル $\mathcal{M} = (M_{ijkl})$, $\mathcal{N} = (N_{ijkl})$ を計算する。

$$M_{ijkl} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha x_{\alpha(i)} x_{\alpha(j)} x_{\alpha(k)} x_{\alpha(l)} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} N_{ijkl} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \Big(& V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ij} x_{\alpha(k)} x_{\alpha(l)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ik} x_{\alpha(j)} x_{\alpha(l)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{il} x_{\alpha(j)} x_{\alpha(k)} \\ & + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jk} x_{\alpha(i)} x_{\alpha(l)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jl} x_{\alpha(i)} x_{\alpha(k)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{kl} x_{\alpha(i)} x_{\alpha(j)} \Big) \end{aligned} \tag{7}$$

[1] データがカメラ実画像画像から得られ、座標の単位が画素の場合には f として焦点距離 (単位は画素)、あるいはその近似値を用いればよい

3. 次のテンソルの 6 個の固有値 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_6$ と対応するノルム 1 の固有行列の正規直交系 $\{\boldsymbol{Q}_1$, ..., $\boldsymbol{Q}_6\}$ を計算する。

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} - c\mathcal{N} \tag{8}$$

4. $\lambda_6 \approx 0$ でなければ c, W_α を次のように更新してステップ 2 へ戻る。

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_6}{(\boldsymbol{Q}_6; \mathcal{N}\boldsymbol{Q}_6)}, \qquad W_\alpha \leftarrow \frac{1}{4(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{Q}_6 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}_6\boldsymbol{x}_\alpha)} \tag{9}$$

5. 二乗ノイズレベルを次のように推定する。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{c}{1 - 5/N} \tag{10}$$

6. 次の計算を行う。

$$\boldsymbol{Q}^{(+)} = N[\hat{\boldsymbol{Q}} + \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}^2}{\lambda_5 N}}\boldsymbol{Q}_5], \qquad \boldsymbol{Q}^{(-)} = N[\hat{\boldsymbol{Q}} - \sqrt{\frac{\hat{\epsilon}^2}{\lambda_5 N}}\boldsymbol{Q}_5] \tag{11}$$

7. 行列 $\boldsymbol{Q}_6$ を $\hat{\boldsymbol{Q}}$ とし、 $\hat{\boldsymbol{Q}}$, $\boldsymbol{Q}^{(+)}$, $\boldsymbol{Q}^{(-)}$ を返す。

5. 記号の用語の説明

前節の記述に用いた記号と用語を説明する。式 (6), (7) に現われる $x_{\alpha(i)}$ はベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$ の第 i 成分であり、 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ij}$ は正規化共分散行列行列 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ の (ij) 要素である。

テンソル $\hat{\mathcal{M}} = (\hat{M}_{ijkl})$ と行列 $\boldsymbol{Q} = (Q_{ij})$ の積 $\hat{\mathcal{M}}\boldsymbol{Q}$ は (ij) 要素が $\sum_{k,l=1}^{3} \hat{M}_{ijkl}Q_{kl}$ の行列であると定義する。このとき、行列 $\boldsymbol{Q}$ がテンソル $\hat{\mathcal{M}}$ の固有値 λ の固有行列であるとは $\hat{\mathcal{M}}\boldsymbol{Q} = \lambda\boldsymbol{Q}$ となることである。この計算には行列 $\boldsymbol{Q} = (Q_{ij})$ とテンソル $\hat{\mathcal{M}} = (\hat{M}_{ijkl})$ を次のような 6 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$ と 6 次元行列 $\hat{\boldsymbol{M}}$ とみなす。

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{33} \\ \sqrt{2}Q_{23} \\ \sqrt{2}Q_{31} \\ \sqrt{2}Q_{12} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{M}} = \begin{pmatrix} \hat{M}_{1111} & \hat{M}_{1122} & \hat{M}_{1133} & \sqrt{2}\hat{M}_{1123} & \sqrt{2}\hat{M}_{1131} & \sqrt{2}\hat{M}_{1112} \\ \hat{M}_{2211} & \hat{M}_{2222} & \hat{M}_{2233} & \sqrt{2}\hat{M}_{2223} & \sqrt{2}\hat{M}_{2231} & \sqrt{2}\hat{M}_{2212} \\ \hat{M}_{3311} & \hat{M}_{3322} & \hat{M}_{3333} & \sqrt{2}\hat{M}_{3323} & \sqrt{2}\hat{M}_{3331} & \sqrt{2}\hat{M}_{3312} \\ \sqrt{2}\hat{M}_{2311} & \sqrt{2}\hat{M}_{2322} & \sqrt{2}\hat{M}_{2333} & 2\hat{M}_{2323} & 2\hat{M}_{2331} & 2\hat{M}_{2312} \\ \sqrt{2}\hat{M}_{3111} & \sqrt{2}\hat{M}_{3122} & \sqrt{2}\hat{M}_{3133} & 2\hat{M}_{3123} & 2\hat{M}_{3131} & 2\hat{M}_{3112} \\ \sqrt{2}\hat{M}_{1211} & \sqrt{2}\hat{M}_{1222} & \sqrt{2}\hat{M}_{1233} & 2\hat{M}_{1223} & 2\hat{M}_{1231} & 2\hat{M}_{1212} \end{pmatrix} \tag{12}$$

このとき $\boldsymbol{Q}$ が $\hat{\mathcal{M}}$ の固有値 λ の固有行列であること ($\hat{\mathcal{M}}\boldsymbol{Q} = \lambda\boldsymbol{Q}$) と、 $\boldsymbol{q}$ が $\hat{\boldsymbol{M}}$ の固有値 λ の固有ベクトルであること ($\hat{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{q} = \lambda\boldsymbol{q}$) とが等価になる。また、行列 $\boldsymbol{Q}$ のノルム $\|\boldsymbol{Q}\|$ は置き換えたベクトル $\boldsymbol{q}$ のノルム $\|\boldsymbol{q}\|$ に一致する。

式 (9) の第 1 式の右辺の分母に現われる演算 $(\cdot;\cdot)$ は行列の内積であり、 $\boldsymbol{A}=(A_{ij}),\ \boldsymbol{B}=(B_{ij})$ に対して $(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B})=\sum_{i,j=1}^{3}A_{ij}B_{ij}$ と定義する。式 (11) に現われる演算 $N[\cdot]$ はノルムを 1 にする正規化作用素である ($N[\boldsymbol{A}]=\boldsymbol{A}/\|\boldsymbol{A}\|$)。

6. プログラムの仕様

4 節の計算に用いた技法はくりこみ法と呼ばれ (8 節参照)、第 1 近似において最適であることが証明される [13, 14]。すなわち、高次の項を除いて他のどんな方法によってもよりよい当てはめを得ることは不可能である。このプログラムは C++ により書かれており、付属ライブラリと一体化されている。その構成は次のようになっている。

1. ベクトル・行列計算部
2. テンソル計算部
3. 幾何学的統計計算部

1. では種々のベクトル・行列演算を定義している。基本的な線形計算 (逆行列、行列式、連立 1 次方程式、固有値・固有ベクトル、等) には文献 [21] のプログラムを使用している。 2. は 1. を種々のテンソル演算に拡張したものである。 3. は共分散行列をもった幾何学的対象とその信頼性計算を定義するものであり、 4 節のプログラムもここに収められている。そして、これらを用いて、標準入力から点列データを読み込み、画像位置オブジェクトに変換し (正規化共分散行列はデフォルト値を用いる)、行列 $\hat{\boldsymbol{Q}},\ \boldsymbol{Q}^{(+)},\ \boldsymbol{Q}^{(-)}$ を計算し、標準出力に出力するプログラムを別途提供している。これらは `http://www.ail.cs.gunma-u.ac.jp/Labo/research.html` に置かれている。

7. 実行例

図 1(a) は楕円 (破線)

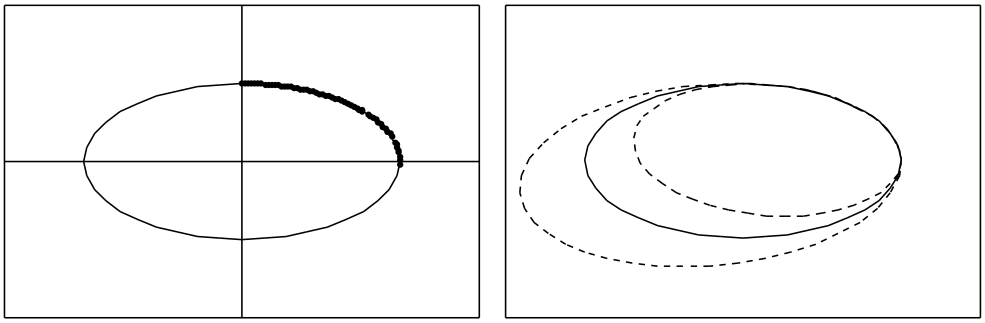
$$\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{100^2}=1 \tag{13}$$

の第 1 象限の部分に等間隔に 60 点とったものである。図 1(b) は各座標値の独立に期待値 0、標準偏差 0.5 の乱数誤差を加えたものに当てはめたコニック $\hat{\boldsymbol{Q}}$ (実線) とその標準偏位 $\boldsymbol{Q}^{(+)},\ \boldsymbol{Q}^{(-)}$ (破線) を表示したものである。図 2(a) は乱数誤差をいろいろ変えてあてはめたコニック 10 例を重ねて表示したものである (破線は真の形状)。図 1の標準偏位が誤差によるずれの可能性を定量的によく表現していることがわかる。図 2(b) は比較のために最小二乗法で当てはめた結果を示している。最小二乗法とは

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\alpha)^2\to\min \tag{14}$$

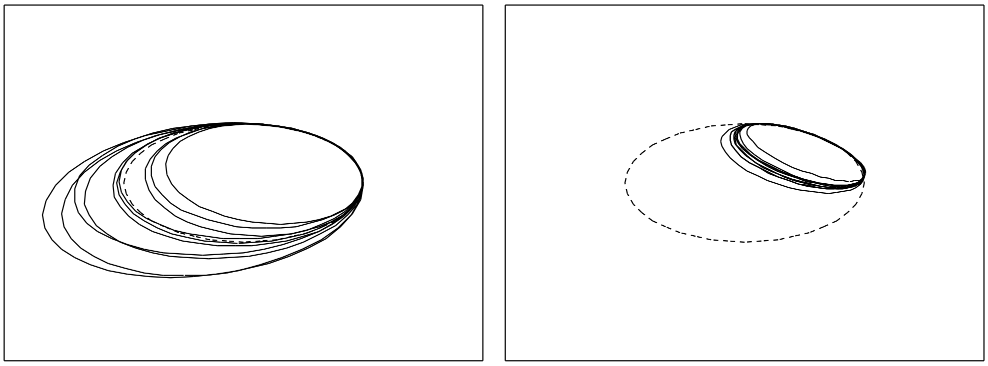
によって $\boldsymbol{Q}$ を定めるものである。左辺は $\boldsymbol{Q}$ の 2 次形式であるから、これを最小化するには最小固有値に対する固有行列を計算すればよい。この計算の単純さのためにこの最小二乗法は広く用いられ、代数的距離最小化法とも呼ばれている。しかし、図 2(b) からわかるように、点列がコニックの一部分に偏在すると当てはめたコニックに統計的な偏差が生じる [17, 30]。その理由の一つはベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha,\ \boldsymbol{x}'_\alpha$ の成分が射影幾何学における同次座標であって、それらの第 3 成分は定義により常に 1 であるにもかかわらず、最小二乗法ではデータも定数も同等に扱っているからである。

この例の本プログラムによる当てはめの実行時間は UNIX ワークステーション (Sun Ultra-1) 上で平均 $5.59x10^{-2}$ 秒 (CPU time) であり、同じ問題に最小二乗法を用いた場合の約 17.5 倍である



(a)　　(b)

図 1: (a) 楕円上の点列。(b) 当てはめたコニックとその標準偏位。



(a)　　(b)

図 2: 誤差を変えたときの当てはめの例。(a) 最適推定。(b) 最小二乗法。

(実画像に対する適用例は文献 [17, 30] 参照)。図 1(a) ではデータが楕円上に偏在しているため最適推定と最小二乗法との差が大きいが、データの分布が楕円上で一様になるにつれて差は少なくなる。そのような場合は最小二乗法を用いれば精度を落とさずに計算が効率化される。これは実時間処理には有利である。しかし、そのためには、考えている状況であらかじめ最適推定と最小二乗法の両方を比較して結果に差がないことを確認しなければならない。このように最適推定は実行時間では不利でもそのようなベンチマークとしての意義が大きい。

注意すべきことは、二つの方法で計算した $\hat{\boldsymbol{Q}}_1$, $\hat{\boldsymbol{Q}}_2$ に対して単に $\|\hat{\boldsymbol{Q}}_1 - \hat{\boldsymbol{Q}}_2\|$ が小さいからといって安心できないことである。なぜなら画像上では対応するコニック $(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{Q}}_1\boldsymbol{x}) = 0$, $(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{Q}}_2\boldsymbol{x}) = 0$ は曲線としては非常に異なることが多いからある。実際、図 2の比較においても計算した行列 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 自体は差が非常に小さい。

8. 関連する事項

解法の原理は文献 [17, 30] に述べられているが、基本的には最尤推定である [13]。これは形式的には行列 $\boldsymbol{Q}$ を含む重み $W_\alpha(\boldsymbol{Q})$(式 (9) の第 2 式参照) をもつ最小二乗法

$$\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha(\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_\alpha)^2 \to \min \tag{15}$$

とみなせる。左辺は定数倍と定数項を除いて、コニック $\boldsymbol{Q}$ のもとにデータ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ が観測される尤度の

対数の符号を換えたものに等しい。特に誤差が等方かつ一様の場合はデータのあるべき位置からの距離の二乗和に等しい。

式 (15) より、 $W_\alpha(\boldsymbol{Q})$ が定数行列であれば解 $\boldsymbol{Q}$ はテンソル

$$\mathcal{M} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha \otimes \boldsymbol{x}_\alpha \tag{16}$$

(式 (6) 参照) の最小固有値に対する固有行列である ($\otimes$ はテンソル積を表す)。これを $W_\alpha(\boldsymbol{Q})$ と残りの部分を交互に反復計算したのでは解に統計的な偏差が生じる [11, 14]。しかし、誤差がないとき $\mathcal{M}$ の最小固有値が 0 であることから、毎回の反復で $\mathcal{M}$ の最小固有値を 0 に近付ける補正を行えば精度の理論限界 [13] を達成する精度の解が得られる [14]。これがくりこみ法と呼ばれる手法である [10, 12]。

文献 [17, 30] では固有値の摂動を 2 次の項まで展開して補正する "2 次のくりこみ法" が示されている。本プログラムではデフォルトとして 1 次の項までの展開を用いる "1 次のくりこみ法" を採用しているが (式 (9) の第 2 式参照)、オプションとして 2 次のくりこみ法も指定できる。 2 次のくりこみ法を用いると収束までの反復回数が減少する (1 次で平均 4, 5 回が 2 次では平均 2, 3 回)。しかし一回の反復の計算量が増えるので、全体の計算時間はやや増加する。また最終的な精度も有効数字の範囲内でほぼ差がない。

このくりこみ法は極めてロバストであり、相当大きい誤差を与えても速やかに収束する。しかし、例えば楕円上の点列でも、それが図 1(a) のように楕円の一部に偏在している場合、誤差が大きくなると得られるものは楕円とは限らず、放物線や双曲線が当てはまることがある。誤差が大きいほど、また点列が偏在するほどその割合が増加する。行列 $\boldsymbol{Q}$ に $\det\boldsymbol{Q} > 0$ なら -1 を掛けて $\det\boldsymbol{Q} < 0$ としておくと、この判定は次のように行える [9]。

- $Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2 < 0$ のとき双曲線。
- $Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2 = 0$ のとき放物線。
- $Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2 > 0$ のとき
  - $Q_{11} + Q_{22} > 0$ なら楕円、
  - それ以外は退化 (二直線、一直線、一点、または空集合)。

9. まとめ

本論文では平面上に与えられた点列に最適にコニックを当てはめるととにも当てはめの信頼性評価を与えるプログラムパッケージを記述した。その原理は最尤推定をくりこみ法によって計算するものであり、文献 [17, 30] に示されている。まず入出力と信頼性評価の表現法、およびアルゴリズムの概要を述べ、プログラムの仕様を説明し、実行例を示し、プログラムの特徴や注意事項を述べた。本プログラムは極めて効率的、高精度、かつロバストであり、コンピュータビジョンの様々な応用に広く利用されることが期待される。

参考文献

[1] A. Albano, "Representation of digitized contours in terms of conic arcs and straight-line segments," *Comput. Graphics Image Process.*, **3**-1, 23–33 (1974).

[2] F. L. Bookstein, "Fitting conic sections to scattered data," *Comput. Graphics Image Process.*, **9**-1, 56–71 (1979).

[3] D. B. Cooper and N. Yalabik, "On the computational cost of approximating and recognizing noise-perturbed straight lines and quadratic arcs in the plane," *IEEE Trans. Comp.*, **25**-10, 1020–1032 (1976).

[4] E. R. Davies, "Finding ellipses using the generalised Hough transform," *Patt. Recog. Lett.*, **9**, 87–96 (1989).

[5] T. Ellis, A. Abboot and B. Brillault, "Ellipse detection and matching with uncertainty," *Image Vision Comput.*, **10**-5, 271–276 (1992).

[6] D. Forsyth, J. L. Mundy, A. Zisserman, C. Coelho, A. Heller and C. Rothwell, "Invariant descriptors for 3-D object recognition and pose," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13**-10, 971–991 (1991).

[7] C. L. Huang, "Elliptical feature extraction via an improve Hough transform," *Patt. Recog. Lett.*, **10**-2, 93–100 (1989).

[8] S. H. Joseph, "Unbiased least squares fitting of circular arcs," *CVGIP: Graphical Models Image Process.*, **56**-5, 424–432 (1994).

[9] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[10] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2, 201–209 (1994).

[11] K. Kanatani, "Statistical bias of conic fitting and renormalization," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **16**-3, 320–326 (1994).

[12] 金谷健一, 「空間データの数理 — ３次元コンピューティングに向けて —」, 朝倉書店, 1995.

[13] 金谷健一, "当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界," 情報処理学会論文誌, **36**-8, 1865–1873 (1995).

[14] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, 1996.

[15] 金谷健一, 「形状ＣＡＤと図形の数学」, 共立出版, 1998.

[16] K. Kanatani and W. Liu, "3-D interpretation of conics and orthogonality," *CVGIP: Image Understanding*, **58**-3, 286–301 (1993).

[17] Y. Kanazawa and K. Kanatani, "Optimal conic fitting and reliability evaluation," *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E79-D**-9, 1323–1328 (1996).

[18] Y. Leedan and P. Meer, "Estimation with bilinear constraints in computer vision," *Proc. 6th IEEE Int. Conf. Computer Vision*, January 1998, Bombay, India, pp. 733-738.

[19] T. Nagata, H. Tamura and K. Ishibashi, "Detection of an ellipse by use of a recursive least-squares estimator," *J. Robotics Systems*, **2**, 163–177 (1985).

[20] Y. Nakagawa and A. Rosenfeld, "A note on polygonal and elliptical approximation of mechanical parts," *Patt. Recog. Lett.*, **40**-2, 79–94 (1979).

[21] 奥村晴彦, 「Ｃ言語による最新アルゴリズム辞典」, 技術評論社, 1991.

[22] K. A. Paton, "Conic sections in chromosome analysis," *Patt. Recog.*, **2**-1, 39–51 (1970).

[23] J. Porrill, "Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using a bias corrected Kalman filter," *Image Vision Comput.*, **8**-1, 37–41 (1990).

[24] P. L. Rosin, "A note on the least squares fitting of ellipses," *Patt. Recog. Lett.*, **14**-10, 799–808 (1993).

[25] P. L. Rosin, "Ellipse fitting by accumulating five-point fits," *Patt. Recog. Lett.*, **14**, 661–669 (1993).

[26] P. L. Rosin and G. A. W. West, "Nonparametric segmentation of curves into various representations," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **17**-12, 1140–1153 (1995).

[27] C. A. Rothwell, A. Zisserman, C. I. Marinos, D. A. Forsyth and J.L. Mundy, "Relative motion and pose from arbitrary plane curves," *Image Vision Comput.*, **10**-4, 250–262. 1992.

[28] S. Safaee-Rad, I. Tchoukanov, B. Benhabib, and K. C. Smith, "Accurate parameter estimation of quadratic curves from grey-level images," *CVGIP: Image Understanding*, **54**-2, 259–274 (1991).

[29] P. D. Sampson, "Fitting conic sections to "very scattered" data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm," *Comput. Graphics Image Process.*, **18**-1, 97–108 (1982).

[30] 塩沢仁, 金沢靖, 金谷健一, コニック当てはめの信頼性評価, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会, 95-CV-96-7, 49–56, 1995.

[31] S. Tsuji and F. Matsumoto, "Detection of ellipses by a modified Hough transform," *IEEE Trans. Comp.*, **27**-8, 777–781 (1978).

[32] M. Werman and Z. Geyzel, "Fitting a second degree curve in the presence of error," *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **17**-2, 207–211 (1989).