幾何学的拘束による共分散行列の更新について

金谷 健一 † 木下 敬介 ‡

† 岡山大学工学部情報工学科 ‡ATR 人間情報科学研究所

画像から復元した 3 次元形状は，データの誤差や処理の不完全さによりかなりの不確定性がある．最近，木下ら [7] はこれに対して単に未校正カメラによる撮影を繰り返すだけで精度を向上させることが可能であることを示した．本論文ではその方法論を体系的に整理し，プロトタイプ問題を解析してその幾何学的意味の理解を深める．そして射影復元とゲージ変換に起因する 3 次元形状の本質的な不確定性を考察し，この方法の有効性と本質的な限界を指摘する．

キーワード: 共分散行列、カメラ校正、 3 次元復元、統計的最適化、ゲージ変換、射影変換

On Covariance Update by Geometric Constraints

Kenichi Kanatani† **Kisuke Kinoshita**‡

†Department of Information Technology, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

‡ATR Human Information Sciences Laboratories, Soraku-gun, Kyoto 619-0288 Japan

The 3-D shape reconstructed from images has a significant amount of uncertainty due to the innaccuracy of the data and the image processing procedures. Recently, Kinoshita and Tonko [7] showed that the accuracy can be improved simply by repeately taking images by an uncalibrated camera. In this paper, we summarize this methodology in a general framework and analyze a prototype problem to better understand the underlying geometric meaning. We point out the effectiveness and limitation of this method by considering the inherent uncertainty in doing projective reconstruction and applying gauge transformations.

Key words: covariance matrix, camera calibration, 3-D reconstruction, statistical optimization, gauge transformation, homography

1. まえがき

画像からシーンや物体の 3 次元形状を復元することはコンピュータビジョンの重要な課題であり，これまでに多くの研究が成されている [2]．しかしデータの誤差や処理の不完全さにより，復元した形状にはかなりの不確定性があり，定量的な応用には向いていない．このため最近では単に 3 次元形状を表示することが目的の画像メディア応用が強調されることが多い．一方，形状の計測やそのモデル化，ロボットの制御など精度を要するタスクでは通常は高精度のレーザー距離センサが併用される．

しかし画像は標準的なカメラ以外は特別の装置を要せず，時と場所を選ばずに容易に大量のデータの収集が可能である．もし画像から復元した 3 次元形状を同じく画像を用いて高精度化する手段があれば，実世界への応用が飛躍的に高まると期待される．

このような考えとして，ロボットの走行過程で 3 次元環境をステレオ視によって計測しては，その精度を拡張カルマンフィルタによって逐次的に更新する試みが古くからあるが [1, 8, 9, 10, 11, 12, 13] ，カメラやステレオシステムをあらかじめ精密に校正しておく必要があった．これに対して最近，木下ら [7] は単に未校正カメラによる撮影を繰り返すだけで精度の向上が可能であることを示した．この考え方は今後の応用に大きな影響を与えると思われる．

本論文では木下ら [7] の提案する方法論を体系的に整理し，プロトタイプ問題を解析してその幾何学的意味の理解を深める．そして，画像から 3 次元復元した形状のもつ本質的な不確定性，特に射影復元 [2] とゲージ変換 [5] を考慮し，この方法の有効性と限界を指摘する．

2. 幾何学的当てはめの最適推定

(一般に互いに相関のある)N 個の m 次元データ $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ の不確定性を表す共分散行列を $\{V[\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{a}_\beta]\}$ とする。データ $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ は一般に自由度が制約され (例えば単位ベクトルである等)，各共分散行列は一般に特異行列であるとする．

データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ の真の位置 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ は未知の n 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ をパラメータとする拘束条件

$$\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

†700-8530 岡山市津島中 3–1–1, 岡山大学工学部情報工学科, Tel/Fax: (086)251-8173
E-mail: kanatani@suri.it.okayama-u.ac.jp
‡619-0288 京都府相楽郡精華町 2–2–2, ATR 人間情報科学研究所 Tel: (0774)95-1075, Fax: (0774)95-2647
E-mail: Keisuke.Kinoshita@isd.atr.co.jp

を満たすとする。ここに $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})=0$ は L 次元ベクトル方程式であるが，$\boldsymbol{a}$ に関して r 個のみが独立であるとし，r を拘束条件のランクと呼ぶ．このとき誤差のあるデータ $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ からデータの真の値 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$ とパラメータ $\boldsymbol{u}$ を推定する問題が幾何学的当てはめである [3]．

誤差が正規分布に従うとき，最適な $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\boldsymbol{u}$ を求めるには，拘束条件 (1) のもとで次式を最小化すればよい [3]．

$$J=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}(\boldsymbol{a}_\alpha-\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha,W[\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{a}_\beta](\boldsymbol{a}_\beta-\bar{\boldsymbol{a}}_\beta)) \tag{2}$$

ただしベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と書く．$W[\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{a}_\beta]$ は次式の $mN\times mN$ 行列の (α,β) ブロックとして定義される $m\times m$ 行列である。

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} W[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1] & \cdots & W[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_N]\\ \vdots & & \vdots\\ W[\boldsymbol{a}_N,\boldsymbol{a}_1] & \cdots & W[\boldsymbol{a}_N,\boldsymbol{a}_N]\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} V[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1] & \cdots & V[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_N]\\ \vdots & & \vdots\\ V[\boldsymbol{a}_N,\boldsymbol{a}_1] & \cdots & V[\boldsymbol{a}_N,\boldsymbol{a}_N]\end{pmatrix}^{-}_{m'N}\end{aligned} \tag{3}$$

ここに $(\,\cdot\,)^-_r$ は固有値の大きい r 個以外は 0 とした (ムーア・ペンローズの) 一般逆行列を表す．m' はデータベクトルの自由度である．ラグランジュ乗数を導入して拘束条件 (1) を消去し，誤差は微小であると仮定して第 1 近似をとると，式 (2) は次のように書ける (導出省略)．

$$J=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}(\boldsymbol{F}_\alpha,\boldsymbol{W}_{\alpha\beta}\boldsymbol{F}_\beta) \tag{4}$$

ここに $\boldsymbol{F}_\alpha$ の添字 α は関数 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})$ に $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\alpha$ を代入することを表し，$\boldsymbol{W}_{\alpha\beta}$ は次のように定義した $L\times L$ 行列である．

$$\boldsymbol{W}_{\alpha\beta}=\Big((\nabla_{\mathbf{a}}\boldsymbol{F}_\alpha)^\top V[\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{a}_\beta](\nabla_{\mathbf{a}}\boldsymbol{F}_\beta)\Big)^-_r \tag{5}$$

r は拘束条件 (1) のランクである．$\nabla_{\mathbf{a}}\boldsymbol{F}$, $\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{F}$ はそれぞれ次のように定義した $m\times L$ および $n\times L$ 行列であり，添字の α は $\boldsymbol{a}_\alpha$ を代入することを表す．

$$\nabla_{\mathbf{a}}\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\partial F_1/\partial a_1 & \cdots & \partial F_L/\partial a_1\\ \vdots & & \vdots\\ \partial F_1/\partial a_m & \cdots & \partial F_L/\partial a_m\end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\partial F_1/\partial u_1 & \cdots & \partial F_L/\partial u_1\\ \vdots & & \vdots\\ \partial F_1/\partial u_n & \cdots & \partial F_L/\partial u_n\end{pmatrix} \tag{7}$$

式 (4) は $\boldsymbol{u}$ のみの関数である．一般に $\boldsymbol{u}$ は自由度が拘束されているとし (例えば単位ベクトルである等)，その制約のもとで J を最小にする解を $\hat{\boldsymbol{u}}$ とする．この解の精度を表す共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{u}}]$ は第 1 近似において次のようになる (導出省略)．

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}]=\Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}(\nabla_{\mathbf{u}}\hat{\boldsymbol{F}}_\alpha)\hat{\boldsymbol{W}}_{\alpha\beta}(\nabla_{\mathbf{a}}\hat{\boldsymbol{F}}_\beta)^\top\Big)^-_{n'} \tag{8}$$

n' はパラメータベクトルの自由度であり，$\nabla_{\mathbf{u}}\hat{\boldsymbol{F}}_\alpha$, $\hat{\boldsymbol{W}}_{\alpha\beta}$ はそれぞれ $\nabla_{\mathbf{a}}\boldsymbol{F}_\alpha$, $\boldsymbol{W}_{\alpha\beta}$ に $\boldsymbol{u}=\hat{\boldsymbol{u}}$ を代入した値である．

3. データとその共分散行列の更新

最適解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ が求まれば，各データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ を拘束条件 $\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha,\hat{\boldsymbol{u}})=\boldsymbol{0}$ が厳密に満たされように最適に補正することによってその値の精度を向上させることができる．この最適補正は次のようになる (導出省略)．

$$\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha=\boldsymbol{a}_\alpha-\sum_{\beta,\gamma=1}^{N}V[\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{a}_\beta](\nabla_{\mathbf{a}}\hat{\boldsymbol{F}}_\beta)\hat{\boldsymbol{W}}_{\beta\gamma}\hat{\boldsymbol{F}}_\gamma \tag{9}$$

$\hat{\boldsymbol{F}}_\alpha$ は $\boldsymbol{F}_\alpha$ に $\boldsymbol{u}=\hat{\boldsymbol{u}}$ を代入した値である．補正値 $\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha$ は式 $\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha,\hat{\boldsymbol{u}})=\boldsymbol{0}$ で拘束されているが，推定値 $\hat{\boldsymbol{u}}$ に式 (8) の共分散行列で表される不確定性があるため，$\{\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$ は事前の値と同じランクの共分散をもつ．この事後共分散行列 $\{V[\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha,\hat{\boldsymbol{a}}_\beta]\}$ は次のように書ける (導出省略)．

$$\begin{aligned}V[\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha,\hat{\boldsymbol{a}}_\beta]&=V[\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{a}_\beta]\\ &-\sum_{\kappa,\lambda,\kappa',\lambda'=1}^{N}V[\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{a}_\kappa](\nabla_{\mathbf{a}}\hat{\boldsymbol{F}}_\kappa)\hat{\boldsymbol{W}}_{\kappa\kappa'}\\ &\Big((\nabla_{\mathbf{a}}\hat{\boldsymbol{F}}_{\kappa'})^\top V[\boldsymbol{a}_{\kappa'},\boldsymbol{a}_{\lambda'}](\nabla_{\mathbf{a}}\hat{\boldsymbol{F}}_{\lambda'})\\ &-(\nabla_{\mathbf{u}}\hat{\boldsymbol{F}}_{\kappa'})^\top V[\hat{\boldsymbol{u}}](\nabla_{\mathbf{u}}\hat{\boldsymbol{F}}_{\lambda'})\Big)\\ &\hat{\boldsymbol{W}}_{\lambda'\lambda}(\nabla_{\mathbf{a}}\hat{\boldsymbol{F}}_\lambda)^\top V[\boldsymbol{a}_\lambda,\boldsymbol{a}_\beta]\end{aligned} \tag{10}$$

これは一般には事前の値 $\{V[\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{a}_\beta]\}$ より小さい．したがって，既知の拘束条件を用いた最適補正を繰り返せばデータの不確定性が減少し，精度が向上する．これが木下ら [7] の方法の考え方である．

前節と本節で省略した導出は極めて繁雑であるが，基本的には文献 [3] の考え方に沿って導かれる．

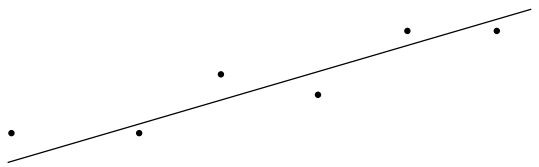

図 1: 平面上の直線の当てはめ．

4. 直線当てはめ

幾何学的当てはめの最も単純な例は平面上の点列への直線当てはめであり (図 1)，カメラ校正 (後述) を含む一般の幾何学的当てはめ問題のプロトタイプである．前節の方法の意味を深く理解するため，これを直線当てはめに適用してみる．

平面上の N 点 (x_α, y_α), $\alpha = 1, ..., N$ をある有限の精度で測定したとし，これらが共線である (同一直線上にある) という情報が与えられたときに、各点の位置および共分散行列がどのように更新されるかを調べる．

点 (x_α, y_α) の真の位置を $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ と書くと，拘束条件はある係数 A, B, C が存在して

$$A\bar{x}_\alpha + B\bar{y}_\alpha + C = 0, \quad \alpha = 1, ..., N \tag{11}$$

が成り立つことである．点の座標 (x_α, y_α) と係数 A, B, C を適当なスケール定数 f_0 を導入して 3 次元ベクトル

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha/f_0 \\ y_\alpha/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n} = N[\begin{pmatrix} A \\ B \\ C/f_0 \end{pmatrix}] \tag{12}$$

で表す，拘束条件 (1) は次のように書ける．

$$(\boldsymbol{n}, \bar{\boldsymbol{x}}) = 0, \quad \alpha = 1, ..., N \tag{13}$$

式 (12) 中の $N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化を表す ($N[\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\|$)．これは式 (11) 全体を何倍しても成立するので $\|\boldsymbol{n}\|$ を 1 に正規化するものである．$\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ の共分散行列を $\{V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta]\}$ とすると，式 (2) の最小化関数は次のようになる．

$$J = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\boldsymbol{x}_\alpha - \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, W[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta](\boldsymbol{x}_\beta - \bar{\boldsymbol{x}}_\beta)) \tag{14}$$

ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$ の第 3 成分が定数 1 であることから，各 $V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta]$ の第 3 行 3 列が 0 の特異行列である．したがって式 (3) で定義した各 $W[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta]$ の第 3 行 3 列も 0 である．拘束条件を消去した式 (4) は次のように書ける．

$$J = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\alpha)(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\beta) \tag{15}$$

$W_{\alpha\beta}$ は $(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta]\boldsymbol{n})$ を $(\alpha\beta)$ 要素とする $N \times N$ 行列の逆行列の $(\alpha\beta)$ 要素である．これを最小にする $\boldsymbol{n}$ の最適解 $\hat{\boldsymbol{n}}$ はくりこみ法によって計算できる [3]．その共分散行列は式 (8) から次のようになる．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}] = \Big(\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \hat{W}_{\alpha\beta} \boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{x}_\beta^\top \Big)_2^- \tag{16}$$

ただし $\hat{W}_{\alpha\beta}$ は $W_{\alpha\beta}$ に $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{n}}$ を代入することを意味する．$\hat{\boldsymbol{n}}$ は単位ベクトルに正規化されているから $V[\hat{\boldsymbol{n}}]$ は $\hat{\boldsymbol{n}}$ の方向を零空間とする特異行列である．式 (9) よりデータ $\boldsymbol{x}_\alpha$ の最適補正は次のようになる．

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - \sum_{\kappa,\lambda=1}^{N} W_{\kappa\lambda}(\hat{\boldsymbol{n}}, \boldsymbol{x}_\lambda) V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\kappa]\hat{\boldsymbol{n}} \tag{17}$$

式 (10) の共分散行列の更新は次のようになる．

$$\begin{aligned} V[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}_\beta] &= V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta] \\ &- \sum_{\kappa,\lambda,\mu,\nu=1}^{N} W_{\kappa\mu} W_{\lambda\nu} \Big((\hat{\boldsymbol{n}}, V[\boldsymbol{x}_\mu, \boldsymbol{x}_\nu]\hat{\boldsymbol{n}}) \\ &- (\bar{\boldsymbol{x}}_\mu, V[\hat{\boldsymbol{n}}]\bar{\boldsymbol{x}}_\nu) \Big) V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\kappa]\hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^\top V[\boldsymbol{x}_\lambda, \boldsymbol{x}_\beta] \end{aligned} \tag{18}$$

5. 共線情報による精度向上の例

y 軸上の区間 $[-L, L]$ 上の等間隔の N 点 (x_α, y_α), $\alpha = 1, ..., N$ を考える (図 2)．

$$x_\alpha = 0, \quad y_\alpha = L\Big(-1 + \frac{2(\alpha-1)}{N-1}\Big) \tag{19}$$

各点の各座標に平均 0，標準偏差 σ の正規分布に従う誤差が独立に加わり，異なる点の誤差は独立とする次の誤差モデルを考える．

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta] = \delta_{\alpha\beta}\sigma^2 \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} \tag{20}$$

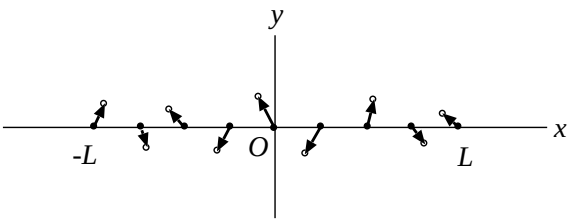

図 2: x 軸上の点列．

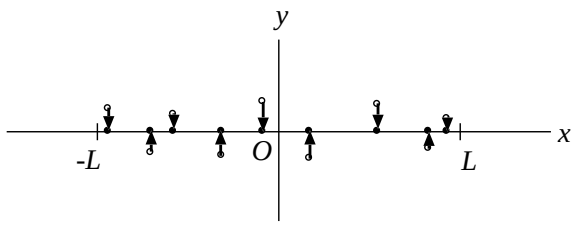

図 3: 点列の最適補正．

ここに $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカのデルタ ($\alpha=\beta$ で 1，その他で 0) であり，$\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}=\mathrm{diag}(1,1,0)$(対角要素が 1,1,0 の対角行列) である．

当てはめた直線がちょうど y 軸であった ($\hat{\boldsymbol{n}}=(1,0,0)^\top$) とすると，その不確定性を表す共分散行列は式 (16) より次のようになる．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}]=\frac{\sigma^2}{N}\mathrm{diag}(0,\Big(\frac{f_0}{L}\Big)^2\frac{3(N-1)}{N+1},1) \tag{21}$$

式 (17) の最適補正は次のようになる．

$$\hat{x}_\alpha=0,\quad \hat{y}_\alpha=y_\alpha \tag{22}$$

これは当てはめた直線上への直交射影である (図 3)．式 (18) の共分散行列の更新は複雑な計算の末，次のようになる (導出省略)．

$$V[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha,\hat{\boldsymbol{x}}_\beta]=\begin{cases}\sigma^2\mathrm{diag}(\frac{1}{N}\Big(1+\frac{3(N-1)}{N+1}\frac{y_\alpha^2}{L^2}\Big),1,0) & \alpha=\beta\\ \sigma^2\mathrm{diag}(\frac{1}{N}\Big(1+\frac{3(N-1)}{N+1}\frac{y_\alpha y_\beta}{L^2}\Big),0,0) & \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{23}$$

以上より次のことがわかる．

- 当てはめた直線の共分散行列 (式 (21)) は $N\to\infty$ で $\boldsymbol{O}$ に収束し，直線が確定する．
- 原データ $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ の誤差が独立でも補正位置 $\{\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha\}$ には相関が生じる．
- 各点の直線に沿う方向の不確定性は変化しない．

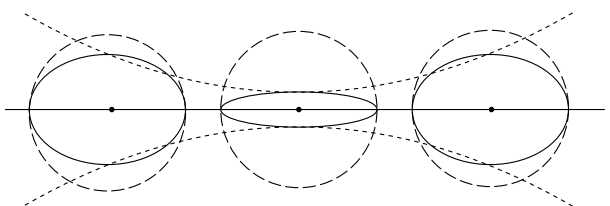

図 4: 事前共分散を表す楕円 (破線) と共線情報によって更新した事後共分散を表す楕円 (実線)．

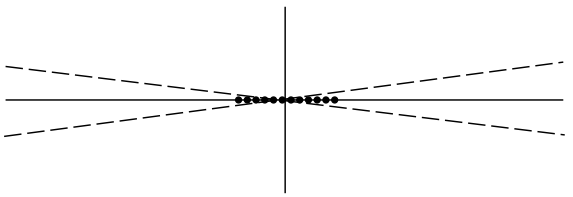

図 5: 直線当てはめの標準偏位．

- 直線の法線方向への標準偏差はほぼ

$$\sigma_{x\alpha}\approx\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\sqrt{1+3\Big(\frac{y_\alpha}{L}\Big)^2} \tag{24}$$

であり，y 方向に双曲線状に増加する (図 4)．最小値は $y_\alpha=0$ (中央の点) のとき $\sigma/\sqrt{N}$ であり，最大値は $y_\alpha=\pm L$(端点) のとき $2\sigma/\sqrt{N}$ である．

この双曲線の 2 本の漸近線が，直線当てはめの信頼性を視覚的に表示するために導入された標準偏位 [6] に対応する (図 5)．

- 両端点の間には負の相関 $-2\sigma^2/N$ を持つ (一方が正なら他方は負でありやすい)．

以上では各点の誤差は独立としたが，各点間には一定の相関がある場合として

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{x}_\beta]=\begin{cases}\sigma^2\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} & \alpha=\beta\\ \sigma^2\gamma\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} & \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{25}$$

という誤差モデルを用いると，式 (21) は次のように変わる．

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}]=\frac{\sigma^2}{N}\mathrm{diag}(0,\Big(\frac{f_0}{L}\Big)^2\frac{3(N-1)}{N+1},1+\gamma(N-1)) \tag{26}$$

最適補正はやはり式 (22) である．共分散行列の更新 (23) は複雑な計算の末，次のようになる (導出省略)．

$$V[\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha,\hat{\boldsymbol{x}}_\beta]=\begin{cases}\sigma^2\mathrm{diag}(\gamma+\frac{1-\gamma}{N}\Big(1+\frac{3(N-1)}{N+1}\frac{y_\alpha^2}{L^2}\Big),1,0) & \alpha=\beta\\ \sigma^2\mathrm{diag}(\gamma+\frac{1-\gamma}{N}\Big(1+\frac{3(N-1)}{N+1}\frac{y_\alpha y_\beta}{L^2}\Big),\gamma,0) & \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{27}$$

以上より次のことがわかる．

- 当てはめた直線の共分散行列 (式 (26)) は $N\to\infty$ も $\boldsymbol{O}$ に収束せず $\mathrm{diag}(0,0,\sigma^2\gamma)$ となる．これは各点間の相関のため直線の平行移動の自由度が残り，直線が確定しないことを意味する．

- 直線の法線方向への標準偏差は

$$\sigma_{x\alpha} \approx \sigma\sqrt{\gamma + \frac{1-\gamma}{N}\Big(1 + 3\Big(\frac{y_\alpha}{L}\Big)^2\Big)} \qquad (28)$$

となり，$N \to \infty$ で $\sigma_{x\alpha} \approx \sigma\sqrt{\gamma}$ となる．これは当てはめた直線が確定しないため補正位置も確定しないことを意味する．

6. 共分散行列のゲージ変換

前節に示したように，不確定性が除去できない二つの要因がある．

- 拘束条件を破らない不確定性 (直線当てはめでは直線に沿う不確定性) は除去できない．
- 各点間に相関があれば，それから生じる不確定性は除去できない．

後者の相関は実際問題ではよく現れる．物体や図形の形状を測定しても，通常は絶対的な位置が決定できない．各点の座標値を定めるには何らかの正規化が必要であり，それを定めるのがゲージ条件である [5]．代表的なものに重心を原点にとる重心ゲージと特定の点を基準点として原点にとる 1 点ゲージがある．しかし重心や基準点も測定値から定まるので不確定性がある．このため，それを用いた正規化によってその不確定性が全データに波及し，各点間には強い相関が生じる．これが共分散行列のゲージ変換である [5]．

例えば N 点 $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ の各座標に平均 0，標準偏差 σ の正規分布に従う誤差が独立に加わり，異なる点の誤差は独立としても，これに重心ゲージを適用すると，共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta]$ は次のようになる．

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta] = \begin{cases} \sigma^2\Big(1 - \dfrac{1}{N}\Big)\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} & \alpha = \beta \\ -\dfrac{\sigma^2}{N}\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} & \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad (29)$$

$\boldsymbol{x}_1$ を基準点にとる 1 点ゲージでは $\alpha, \beta = 2, ..., N$ に対して共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta]$ は次のようになる．

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta] = \begin{cases} 2\sigma^2\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} & \alpha = \beta \\ \sigma^2\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} & \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad (30)$$

これらはすべての点を一定の距離だけ並進させる正規化であるから，その並進距離の不確定性が波及した各点の不確定性は共線情報では除去できない．

同様に，形状を測定しても絶対的な向きが決定できない場合は，主軸を座標軸に一致させるとか，ある 2 点を結ぶ辺を基準方向にとるなどの正規化が必要である．これが波及した各点の不確定性も共線情報では除去できない．

さらに絶対的なスケールも不定の場合は，平均径を 1 にするとか，ある 2 点間の距離を 1 とするなどの正規化が必要であり，これが波及した不確定性も除去できない．

一般に計測に射影変換あるいはその部分群 (並進，回転，拡大・縮小，アフィン変換) の不定性があれば，その正規化のもたらす不確定性は共線情報では除去できない (一般のリー群に対する共分散行列のゲージ変換については文献 [5] 参照)．

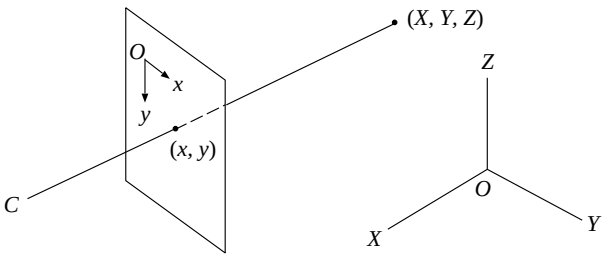

図 6: カメラモデル．

7. カメラモデル

空間に任意の XYZ 座標系をとり，画像面に任意の xy 画像座標系をとる．空間の点 (X, Y, Z) が画像座標 (x, y) に投影されるカメラを考える．レンズに歪みがないとき (すなわちピンホールに等価なとき)，最も一般的な形は次の射影変換である．

$$x = f_0\frac{\pi_{11}X + \pi_{12}Y + \pi_{13}Z + \pi_{14}L_0}{\pi_{31}X + \pi_{32}Y + \pi_{33}Z + \pi_{34}L_0},$$
$$y = f_0\frac{\pi_{21}X + \pi_{22}Y + \pi_{23}Z + \pi_{24}L_0}{\pi_{31}X + \pi_{32}Y + \pi_{33}Z + \pi_{34}L_0} \qquad (31)$$

ただし f_0, L_0 は適当なスケール因子である．3 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$, 4 次元ベクトル $\boldsymbol{\rho}$，3×4 行列 Π を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} X/L_0 \\ Y/L_0 \\ Z/L_0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (32)$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} & \pi_{34} \end{pmatrix} \qquad (33)$$

と定義すると，式 (31) は次のように書ける．

$$\boldsymbol{x} \simeq \Pi\boldsymbol{\rho} \qquad (34)$$

ここに $\simeq$ は両辺がある 0 でない定数倍であるという関係である．行列 $\Pi = (\pi_{ij})$ はカメラの焦点距離，光

軸点，アスペクト比，歪み角 (内部パラメータ) だけでなく，カメラの位置や向き (外部パラメータ) までも含めて表すものであり，投影行列と呼ぶ．

8. カメラ校正

3×4 行列 $\boldsymbol{X}^{(k)}, k=1,2,3$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{X}^{(k)} = \boldsymbol{e}^{(k)} \times \boldsymbol{x}\boldsymbol{\rho}^{\top} \tag{35}$$

ただし $\boldsymbol{e}^{(1)} = (1,0,0)^{\top}$, $\boldsymbol{e}^{(2)} = (0,1,0)^{\top}$, $\boldsymbol{e}^{(3)} = (0,0,1)^{\top}$ である．式 (34) は次式と同値となる．

$$(\boldsymbol{X}^{(k)}; \Pi) = 0, \quad k=1,2,3 \tag{36}$$

ただし 3×4 行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の内積を $(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} A_{ij}B_{ij}$ と約束する．

N 点 $\{\boldsymbol{\rho}_\alpha\}$ の投影像 $\{\boldsymbol{x}_\alpha\}$ を観測して投影行列 Π を計算することがカメラ校正である．これは式 (36) を拘束条件とする幾何学的当てはめ問題である．この場合は拘束条件 (36) が未知数 Π に関して線形なので，最適な投影行列 $\hat{\Pi}$ はくりこみ法によって計算することができる [3]．

未校正カメラを任意に移動させながら校正を繰り返し，その解 $\hat{\Pi}$ を用いてデータ $\{\boldsymbol{\rho}_\alpha\}$ と事前共分散行列 $\{V[\boldsymbol{\rho}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\beta]\}$ をそれぞれ式 (9) の最適補正値 $\{\hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha\}$ と式 (10) の事後共分散行列 $\{V[\hat{\boldsymbol{\rho}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{\rho}}_\beta]\}$ に更新することによって逐次的に精度を高めようというのが木下ら [7] の提唱する方法である．

8. カメラの自己校正

6 節で述べたように，木下らの方法が働かない要因として

- 拘束条件を破らない不確定性
- ゲージ変換に起因するデータの相関

とがある．前者は (当然ながら) 視線に沿う奥行き方向の不確定性が除去されないことを意味する．しかし，あらゆる方向からカメラを向けることでこれは解決する．そこで後者について調べるため，初期の 3 次元形状の計算法を考察する．

今日の代表的な 3 次元復元法は自己校正と呼ばれるものである [2]．これは M 枚の画像を撮影し，第 κ 画像の投影行列を Π_κ，点 $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ の第 κ 画像上の投影点を $\boldsymbol{x}_{\kappa\alpha}$ とし，式 (34) から得られる MN 個の方程式

$$\boldsymbol{x}_{\kappa\alpha} \simeq \Pi_\kappa \boldsymbol{\rho}_\alpha, \quad \kappa=1,...,M, \quad \alpha=1,...,N \tag{37}$$

を未知数 $\{\boldsymbol{\rho}_\alpha\}$, $\{\Pi_\kappa\}$ について解くものである．ただし，解は一意的ではない．空間に射影変換を加えると次式のように書ける．

$$\boldsymbol{\rho}'_\alpha \simeq \mathcal{H}\boldsymbol{\rho}_\alpha, \quad \alpha=1,...,N \tag{38}$$

$\mathcal{H}$ は任意の 4×4 正則行列である．このとき

$$\Pi'_\kappa \simeq \Pi_\kappa \mathcal{H}^{-1} \tag{39}$$

と置くと，

$$\boldsymbol{x}_{\kappa\alpha} \simeq \Pi'_\kappa \boldsymbol{\rho}'_\alpha, \quad \kappa=1,...,M, \quad \alpha=1,...,N \tag{40}$$

であるから，投影行列に制約がなければ $\{\boldsymbol{\rho}_\alpha\}$, $\{\Pi_\kappa\}$ が解であれば $\{\boldsymbol{\rho}'_\alpha\}$, $\{\Pi'_\kappa\}$ も解である．このような射影変換の自由度が残る 3 次元復元を射影復元と呼ぶ [2]．

実際，式 (34) の投影行列は定数倍の不定性のため 11 自由度あり，内部パラメータ (焦点距離，光軸点，アスペクト比，歪み角) に 5 自由度，外部パラメータ (並進，回転) に 6 自由度あるから，任意の射影変換 $\mathcal{H}$ に対して式 (39) が投影行列と解釈できる．解を一意的に定めるユークリッド復元を行なうには投影行列に制約を与え，$\{\Pi_\kappa\mathcal{H}^{-1}\}$, $\kappa=1,...,M$ がすべてその制約を満たすように射影変換 $\mathcal{H}$ を唯一に定める必要がある．

よく用いられる制約は，カメラの内部パラメータは不変，焦点距離以外の内部パラメータは不変，歪み角は 0，アスペクト比が既知，光軸点が既知，カメラの運動の限定 (並進のみ，回転のみ，平面上の運動，...) 等である [2]．このような制約から射影変換 $\mathcal{H}$ を一意的に定めるには普通は絶対楕円の関係が用いられる [2]．それ以外に (推奨されてはいないが [2])，2 画像の対ごとに基礎行列を計算し，各画像のエピ極点を計算し，それらをクラッパの方程式に代入する方法もある．

9. 自己校正のゲージ変換

このように射影復元に基く自己校正では，最終的なユークリッド復元を得るために射影変換の自由度を固定する正規化が必要であり，これが共分散行列のゲージ変換をもたらす．すなわち，計算した射影変換に誤差があると全復元点に共通の誤差が波及する．したがって，木下らの方法を適用しても式 (37) の $\{\boldsymbol{\rho}_\alpha\}$ の共通の誤差が Π_κ に吸収されて最適補正が無効となる．例えば，すべての復元点が全体として一定値だけ並進や回転を起こすと，カメラの位置に並進や回転を加えた解が得られ，データの補正に役立たない．

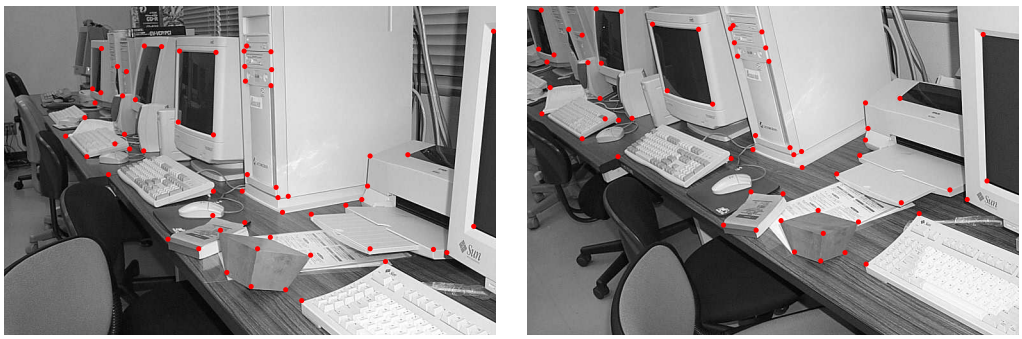

図 7: 室内シーンの実画像 [4] .

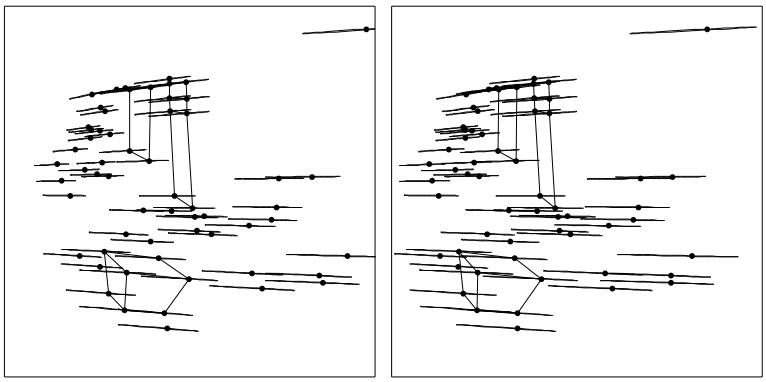

図 8: 復元点とそれらの標準領域 (ステレオグラム)[4] .

またユークリッド形状が得られた後でも，シーンに対する知識があったり，あるいは単に便宜上からさまざまなゲージ条件が用いられる．例えば平行であることが既知の 2 直線の交点を無限遠方に写像させたり，直角であることが既知の角度が直角になるように写像したり，ある長さを 1 にしたり，ある点を原点に移動させたりする．

このような正規化からも組織的な誤差が生じる．例えばある点を原点にとり，ある辺の長さを 1 に正規化すると，その点や辺の復元にも誤差があるから，復元点全体として位置やスケールの誤差が波及する．

図 7 の 2 画像から復元した特徴点の位置とその不確定性を示す楕円体 (標準領域) を図 8 に示す．シーン中に一部はワイヤフレーム表示している．これはクラッパの方程式に基く方法を用いている [4]. これを見ると各点の位置が奥行き方向に極めて不確定に思える．しかし，これはカメラの並進の不確定さが原因で，形状自体はそれほど不確定ではない．並進が必ずしも正確に復元されないのに，各点の 3 次元位置が並進を基線長として復元されるため，全体に拡大・縮小の不確定性が生じるのである．

これを確認するためシーン中の多面体物体を取り出し，その重心が原点，各頂点までの距離の平方平均二乗が 1 となるゲージ条件 (重心ゲージ) で正規化表示したのが図 9(a) である．図 8 に比べて標準領域がきわめて小さい．図 9(b) は 3 頂点を選び，1 つが原点に，もう 1 つが $(1,0,0)$ に，残りが XY 面上にくるようなゲージ条件 (**3** 点ゲージ) で正規化したものである．定義より原点と $(1,0,0)$ とした点には不確定性がなく，それらには標準領域が存在しない．

このように図 8 の復元の不確定性の大部分がゲージ変換に起因するものであるから，これに木下らの方法を適用しても不確定性をほとんど除去できない．実際，木下ら [7] は

> 各点で，精度が主に向上するのは，特定の 2 軸であり，残りの 3 軸目の向上はあまり大きくない

と述べている．そして

> カメラパラメータの推定と 3 次元位置情報の更新が複雑にからみあっているので，なぜこのような現象がおきるのかについての定性的な解釈は容易ではない

と述べている．しかし問題はパラメータ推定や 3 次元位置の更新ではなく，初期形状のもつ不確定性 (特

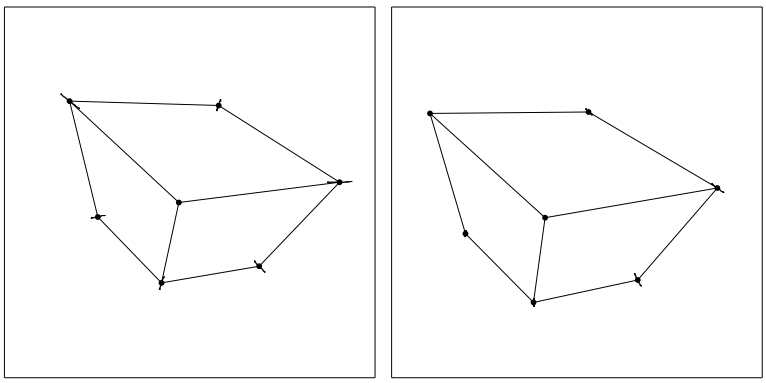

図 9: 頂点の標準領域 [4] . (a) 重心ゲージ . (b) 3 点ゲージ .

に相関の含まれ方) と , それをどのように復元したかが本質だと思われる

10. むすび

本論文では木下ら [7] の提案する方法論を体系的に整理し , プロトタイプ問題を解析してその幾何学的意味の解明し , この方法の有効性および本質的な限界を指摘した .

一般に画像から復元した 3 次元点には射影変換 (またはその部分群) に相当する不定性があり , これを正規化するゲージ変換のため , 各点間に相関を伴う不確定性が生じる . そのような不確定性は木下らの方法によっては除去できない .

木下らの方法で除去できるのは本質的には各点ごとに独立な誤差であるが , 補正を行うことによって各点間に相関が生じる . これを繰り返せば相関が次第に強くなり , 最終的に残るのはゲージ変換に起因する不確定性となる .

一方 , そのような不確定性は強い相関をもつから , 図 9 のように特定の部分を取り出して , 改めて適切なゲージ条件を課せば , 必要な情報が正確に引き出せるであろう . このように , すべての点の絶対位置の精度を問題にするのでなければ , 木下らの方法は多くの実際問題で有効であると思われる .

このことから , 木下らの方法による精度の向上を “共分散行列” そのもので評価するのは不適切であることがわかる . ゲージ条件の存在のもとでは共分散行列自体は絶対的な意味を持たず , 絶対的な意味を持つのはゲージ不変量の分散 , 共分散である [5] . 木下らの方法の効果はこれによって評価されるべきであろう .

謝辞: 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (2) (No. 13680432) , テレコム先端技術研究支援センター , 栢森情報科学振興財団の助成によった。

参考文献

[1] N. Ayache and O. D. Faugeras. Building, registrating, and fusing noisy visual maps. *Int. J. Robotics Research*, vol.7, no.6, pp.45–65, 1988.

[2] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.

[3] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[4] 金谷健一, 三島　等, “未校正カメラによる 2 画像からの 3 次元復元とその信頼性評価,” 情処学論: CVIM, vol.42, no.SIG 6(CVIM 2), pp.1–8, June 2001.

[5] K. Kanatani and D. D. Morris, Gauges and gauge transformations for uncertainty description of geometric structure with indeterminacy, *IEEE Trans. Inf. Theo.*, vol.47, no.5, pp.2017–2028, July 2001.

[6] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Optimal line fitting and reliability evaluation, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, vol.E79-D, no.9, pp.1317–1322, Sept. 1996.

[7] 木下敬介, マーチン・トンコ, 未校正画像による 3 次元情報の高精度化, 信学論 D-II, vol.J85-D-II, no.2, Feb. 2002, to appear.

[8] L. Matthies, Stereo vision for planetary rover: Stochastic modeling to near real-time implementation, *Int. J. Compute. Vsion*, vol.8, no.1, pp.71–91, 1992.

[9] L. Matthies and S. A. Shafer, Error modeling in stereo navigation, *IEEE J. Robot. Autom.*, vol.3, no.3, pp.239–248, 1987.

[10] S. B. Pollard, J. Porrill and J. E. Mayhew, Experiments in vehicle control using predictive feedforward stereo, *Image Vision Comput.*, vol.8, no.1, pp.63–70, 1990.

[11] S. B. Pollard, T. P. Pridmore, J. Porrill, J. E. Mayhew and J. P. Frisby, Geometric modeling from multiple stereo views, *Int. J. Robotics Res.*, vol.8, no.4, pp.3–32, 1989.

[12] J. Porrill, Optimal combination and constraints for geometric sonsor data, *Int. J. Robotics Res.*, vol.7, no.6, pp.66–77, 1988.

[13] J. Porrill, S. B. Pollard and J. E. Mayhew, Optimal combination of multiple sensors including stereo vision, *Image Vision Comput.*, vol.5, no.2, pp.174–189, 1987.