解像度によらず位相を保つ曲線と曲面の高速表示

金谷 健一 [*]　　金澤 芳之 [†]

[*] 群馬大学工学部情報工学科　[†](株) シャープ

1. まえがき

曲線や曲面を視覚化して表示することはグラフィクスやＣＡＤの基本であるだけでなく、数学教育の教材作成にも欠かすことができない。本報では座標の関数の零点集合として定義される平面曲線、空間曲線、および曲面を考える。数学教育で現われる曲線のほとんどはこのような陰関数で表現されている。座標値がパラメータによって陽に表現されている場合は単にパラメータを変化させながら軌跡を表示すればよいが、陰関数で表現されている場合は表示が容易ではない。本論文では各領域での関数の符号と値を調べて関数値が 0 になるセグメントを生成する分割法を用いる。そしてどんなに粗く分割しても位相が保たれる手法を提案する。

2. 曲線の表示

曲線の位相を定めるのは「臨界点」と「特異点」である。曲線 $f(x,y)=0$ の臨界点とは $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$ を満たす点であり、さらにその点で $f(x,y)=0$ となれば特異点と呼ぶ。曲線が交差、分岐する点は特異点であり、ループの内部には臨界点が存在する。

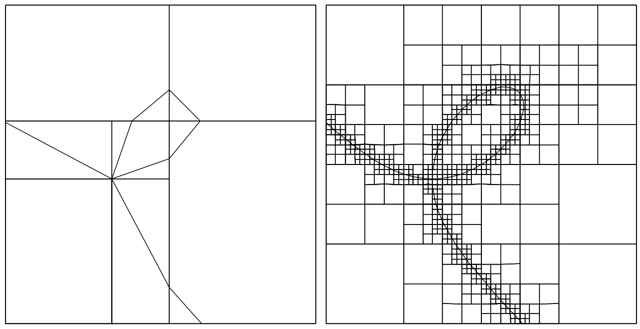
本論文では平均値の定理と縮小写像の不動点定理を組み合わせた区間解析を用いながら空間を再帰的に分割して調べる「クラフチックの方法」[7, 9] によってすべての臨界点を検出し、それらが格子点となるように分割を行う。格子内部に臨界点の存在しないことが保証されているから、内部では交差も分岐も孤立点もループも存在しない。これによって位相を保つ折れ線表示が可能となる。また分割の各ステップにおいて区間解析により曲線が通過し得ないものが除外されるので、計算が極めて効率的である。

図 1は交差とループのある曲線を表示した例である。同時に格子分割の様子も示している。これから、区間解析により曲線の近傍のみが分割されていることがわかる。図 2は孤立点のある曲線を同様に表示した例である。より複雑な例も同様に表示できる [4]。図 3はこの方法を用いて 2 変数関数の等高線を表示した例である。特異点が正しい位相で表示されている。

方程式 $F(x,y,z)=G(x,y,z)=0$ で定義される空間曲線の場合も同様にできる。図 4は二つの楕円体の特異点で交わる交線の表示である。図 5は楕円体をすこしずらして特異点を解消した場合である。いずれも位相が解像度によらず正しく示されている。

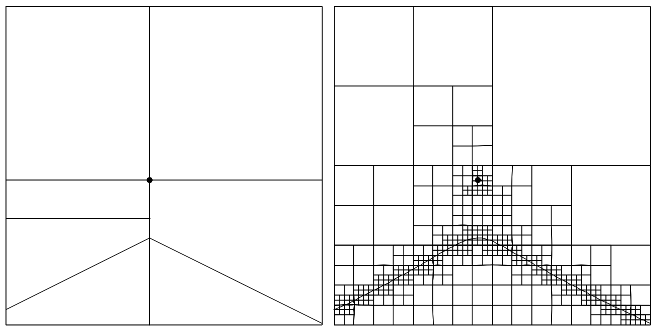
3. 曲面の表示

曲面の表示は輪郭線と縁によって表示するのが最も自然である。曲面をある視点 V から見たときに、曲面上の



(a)　(b)

図 1: 曲線 $x^3+y^3-3xy=0$ の表示とその格子分割。解像度は 1 辺の (a) 1、(b) 1/64。



(a)　(b)

図 2: 曲線 $x^3+x^2+y^2=0$ の表示とその格子分割。解像度は 1 辺の (a) 1、(b) 1/64。

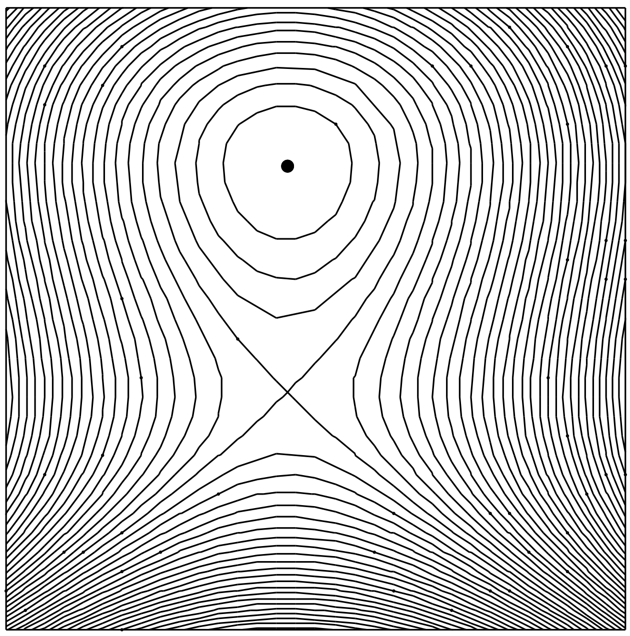
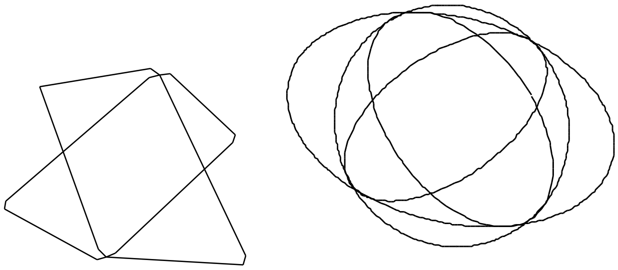
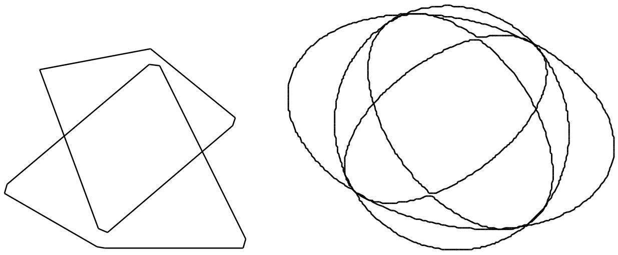


図 3: 曲面 $z=x^3-3x^2+3y^2$ の等高線 .



(a) (b)

図 4: 二つの楕円体の交線（特異点が生じる）。解像度は 1 辺の (a) 1/2、(b) 1/32。



(a) (b)

図 5: 二つの楕円体の交線（特異点が生じない）。解像度は 1 辺の (a) 1/2、(b) 1/32。

点 P が輪郭線上にある必要十分条件は、点 P における接平面が視点 V を含むことである。したがって、この式の定義する空間曲線を生成し、視点 V から見た像を表示すればよい。図 6, 7, 8はワイヤフレーム表示と輪郭線表示を比較したものである。輪郭線表示では「くちびる」、「くさび」と呼ばれる輪郭線の特異点の位相が正しく表示されている [2, 3, 6]。図 9は輪郭線表示とそれに隠線除去を施したものとの比較である。このようにレンダリングを施さなくても輪郭線のみで形状がよく理解できる。

4. まとめ

本論文ではクラフチック形式を用いた区間解析による臨界点の検出と領域の再帰的分割とを併用して曲線や曲面を表示すれば、解像度を変えても位相が正しく保たれることを示した。本論文のシステムでは C++ 言語により区間オブジェクトとその演算を定義している。また数式処理によって導関数の導出を自動化し、それから区間導関数のプログラムを生成している。

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, "Catastrophe Theory," Springer, Berlin, 1984; 蟹江幸博（訳）、"カタストロフ理論、" 現代数学社、京都、1985; Third Revised and Expanded Edition, Springer, Berlin, 1992.

[2] 金谷健一, 曲面の見え方 —「蝶」、「がちょう」、「かもめ」を探してみよう —, ｂｉｔ, vol.29, no.2, pp. 102–103, 1997.

[3] 金谷健一、形状ＣＡＤと図形の数学, 共立出版, 東京, 1998.

[4] 金澤芳之, 金谷健一, 解像度によらず位相を保つ平面曲線の表示, 情処研報 99-CG-94, 1999-1, pp.37–42.

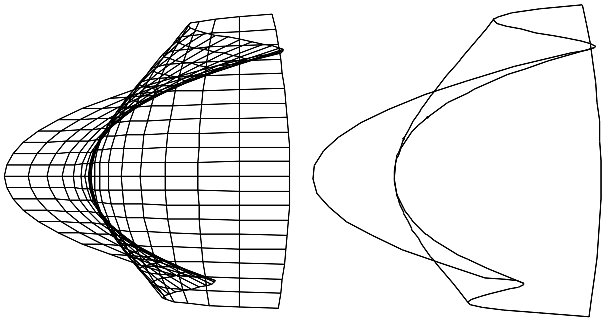
[5] 金澤芳之, 金谷健一, 直観的に正しい空間曲線と曲面の表示、信学技報 AIE98/KBSE98, 1999-2, pp.37–42.

[6] J. J. Koenderink, "Solid Shape," MIT Press, Cambridge, MA, 1990.

[7] 大石進一, 非線形減少の解析的手法 [I]— 非線形現象の精度保証付き数値解析, 電子情報通信学会誌, vol.79, no.2, pp.162–168, 1996.

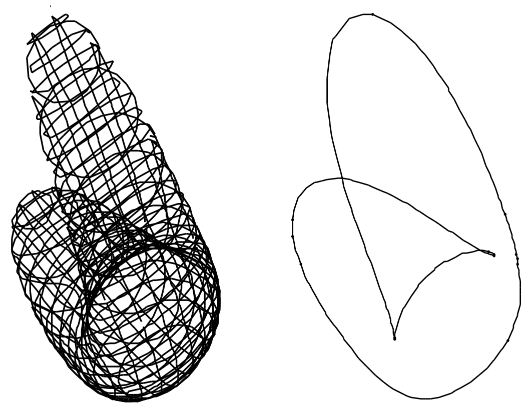
[8] 谷口行信, 杉原厚吉, 検出もれのない代数曲線の追跡法, 情報処理学会論文誌, vol.33, no.10, pp.1245–1253, 1992.

[9] 山村清隆, 非線形現象の解析手法 [V]— 非線形方程式の数値解法 —, 電子情報通信学会誌, vol.79, no.7, pp.740–745, 1996.



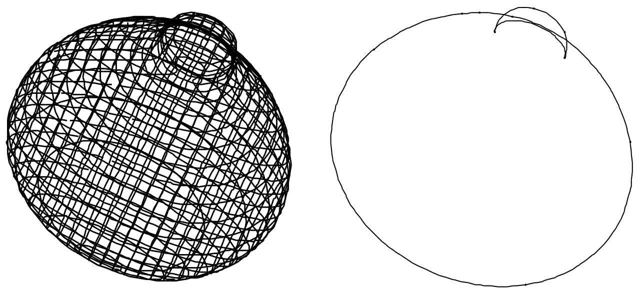
(a) (b)

図 6: 曲面 $z = x^2 - x^2y + y^3$ の表示。(a) ワイヤーフレーム表示。(b) 輪郭線表示。



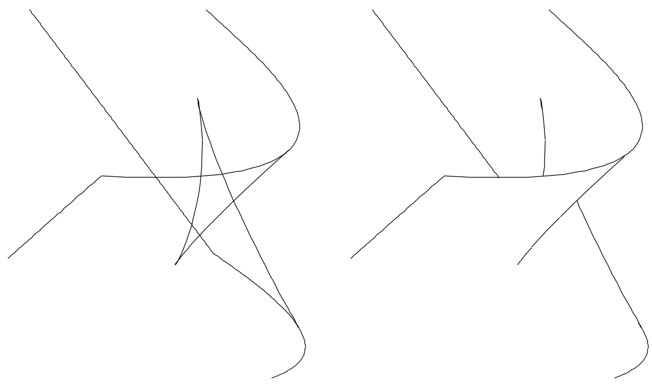
(a) (b)

図 7: 曲面 $23x^4 + x^2y^2 - 37x^2y - 2xy^2 - 15x^2 - 2xy + 16y^2 + 16z^2 - x + 16y = 0$ 表示。(a) ワイヤフレーム表示。(b) 輪郭線表示。



(a) (b)

図 8: 曲面 $4y^4 + 3xy^2 - 5y^2 + 4z^2 + 6x^2 - 2xy + 2x + 3y - 1 = 0$ の表示。(a) ワイヤフレーム表示。(b) 輪郭線表示。



(a) (b)

図 9: 曲面 $z = xy + y^4$ の輪郭線表示。(a) すべての輪郭線を表示。(b) 隠線除去の結果。