

# 誤差のあるデータからの内部拘束を持つ3次元運動の計算法と幾何学的モデル選択への応用

本田 卓士<sup>1,a)</sup> 松永 力<sup>2,b)</sup> 金谷 健一<sup>1,c)</sup>

概要：空間をわずかに移動する複数の点の移動前後の位置を3次元センサーで計測し、どのような並進、回転、スケール変化が生じているのか、あるいは生じていないのかを判断するモデル選択のために、誤差のある3次元データにさまざまな運動モデルを最適に当てはめる新しい方法を提案する。これは、3次元アフィン変換の部分群が変数にさまざまな内部拘束を指定して得られることに着目して、内部拘束をもつ3次元アフィン変換を拡張 FNS 法によって計算するものである。これにより、従来のように運動ごとに別々のパラメータを導入する必要がなく、すべての部分群が同一の方法で計算できる。この手法をステレオ視による3次元シミュレーションデータに対する幾何学的 AIC、幾何学的 BIC、幾何学的 MDL を用いたモデル選択に応用する。

## Computation of Internally Constrained 3-D Motion from Noisy Data and Its Application to Geometric Model Selection

TAKUTO HONDA<sup>1,a)</sup> CHIKARA MATSUNAGA<sup>2,b)</sup> KENICHI KANATANI<sup>1,c)</sup>

**Abstract:** Given 3-D sensing data of points slightly moving in space, we consider the problem of discerning whether or not translation, rotation, and scale change take place and to what extent. For this purpose, we propose a new method for fitting various motion models to 3-D noisy data. Based on the observation that subgroups of the 3-D affine transformations are defined by imposing various internal constraints on the variables, our method fits 3-D affine transformations with internal constraints using the scheme of EFNS, which, unlike conventional methods, dispenses with particular parameterizations for particular motion models. We apply our method to simulated stereo vision data and show how model selection using the geometric AIC, the geometric BIC and the geometric MDL works.

### 1. まえがき

ステレオ視やレンジファインダーなどの3次元センサーによって空間をわずかに移動する複数の点の移動前後の位置を計測したとき、どのような並進、回転、スケール変化が生じているのか、あるいは生じていないのかを判断する問題を考える。これは静止した対象を複数のセンサーで計測したとき、結果が同一であるのか、異なるのかを判断する問題ともみなせる。すなわち、数値的な差が観測の精度を考慮すれば無視できるのか、それとも意味のある差なのかを判断する問題でもある。そのためには、二組の3次元位置が同一である、スケールが異なっている、位置が異なっている、向きが異なっている、あるいはそれらが組み合わ

さっているなどのさまざまなモデルを導入して、その妥当性を判断することになる。

モデルの妥当性は誤差の統計的性質を考慮した残差（正確には「マハラノビス距離」）で測るのが普通であるが、よく知られたように、複雑な（すなわち多数のパラメータを持つ）モデルほど残差が小さくなる。この残差とモデルの複雑さをバランスさせる評価が「モデル選択」である。そして、幾何学的モデルに対するモデル選択規準として、「幾何学的 AIC」[4], [5], [6], 「幾何学的 BIC」[9], [10], 「幾何学的 MDL」[7], [8] が提案されている。

幾何学的モデル選択のためには、まず各モデルを最適に当てはめて、その残差を計算しなければならない。しかし、従来の方法はモデルごとに計算法が異なっている。それはパラメータが異なるからである。例えば並進はその  $x, y, z$  成分を指定すればよいが、回転が加わると、四元数 [11], [20] やリー代数の方法 [15] などのパラメータが必要である。そして、パラメータごとにパラメータに関する導関数が異なり、別々に評価しなければならない。

<sup>1</sup> 岡山大学大学院自然科学研究科 Department of Computer Science, Okayama University, Japan

<sup>2</sup> (株) 朋栄 FOR-A Co., Ltd., Japan

a) honda@suri.cs.okayama-u.ac.jp

b) matsunaga@for-a.co.jp

c) kanatani@suri.cs.okayama-u.ac.jp

本論文ではモデル間の階層構造に利用して、何らのパラメータを導入することなしに異なるモデルを同じ方法で統一的に計算する手法を提案する。本論文で考えるモデルは恒等変換、並進、回転、拡大縮小、およびそれらの組合せである。これらはすべてアフィン変換の部分群であり、部分群に対する最適計算はアフィン変換に対する最適計算に拘束条件を付加したものであることに着目する。拘束条件を付加した最適計算を統一的に計算する手法として「拡張FNS法」[17], [18]提案されている。これはもともと2画像の点对応から基礎行列を計算するために考案された方法である。基礎行列  $F$  は対応点データに対して「エピ極線方程式」と呼ばれる拘束条件を満たす[3]。そのようなデータに対する拘束を「外部拘束」と呼ぶ。一方、基礎行列  $F$  は  $\det F = 0$  という拘束がある[3]。そのようなパラメータ自身の拘束を「内部拘束」と呼ぶ。内部拘束に対処する方法として、古くから

- (1) 内部拘束を考えずに最適化し、内部拘束を満たすように事後的に補正する、
  - (2) 内部拘束が満たされるようにパラメータ化して、そのパラメータ空間を探索する、
- の二通りがあったが、拡張FNS法は新たなパラメータを導入せず、
- (3) 次第に内部拘束が次第に満たされ、収束時には内部拘束が完全に満たされるように反復する
- 解法である。

本論文では、アフィン変換にさまざまな内部拘束を指定すれば並進、回転、剛体運動、相似変換などの部分群が実現されることに着目して、拡張FNS法を3次元点のアフィン変換の最適計算に適用する。従来の拡張FNS法はエピ極線方程式のようなスカラー方程式に対するものであったが、3次元点の変換はベクトル方程式で表される。そこで従来の拡張FNS法をベクトル方程式に拡張する。そして、いろいろな内部拘束を付加してアフィン変換の部分群を統一的に計算する。この考え方は既に松永[19]によって提起され、2次元/3次元の幾何学的変換を射影変換の部分群とみなす統一的方法論が示されている。本論文ではこれを内部拘束をもつ3次元アフィン変換の計算に適用する。そして、ステレオ視による3次元シミュレーションデータを用いて、幾何学的モデル選択の具体的な実施例を示す。

## 2. 3次元アフィン変換

移動前と移動後の観測位置をそれぞれ  $r = (x, y, z)^T$ ,  $r' = (x', y', z')^T$  とするとき、移動が「アフィン変換」であるとは、ある正則行列  $A$  とベクトル  $t$  があって次の関係が成り立つことである。

$$r' = Ar + t \quad (1)$$

行列  $A$  の要素とベクトル  $t$  の成分を次のように置く。

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \\ u_7 & u_8 & u_9 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} u_{10}L_0 \\ u_{11}L_0 \\ u_{12}L_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

ただし、 $L_0$  は  $r, r'$  とほぼ同じ大きさの基準長である。これは  $r, r'$  の各成分がほぼ  $0 \sim 1$  となるような長さの単位を用いることに相当し、これによって有限長の数値計算が安定する。式(1)は次のように書ける。

$$\begin{aligned} u_0x' &= u_1x + u_2y + u_3z + u_{10}L_0, \\ u_0y' &= u_4x + u_5y + u_6z + u_{11}L_0, \\ u_0z' &= u_7x + u_8y + u_9z + u_{12}L_0 \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $u_0 = 1$  である。このダミー変数  $u_0$  を導入して式(1)をパラメータの同次1次式で表すことが提案方法の眼目である。13次元ベクトル  $u, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}$  を次のように定義する。

$$u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_0)^T, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= (x/L_0, y/L_0, z/L_0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -x'/L_0)^T, \\ \xi^{(2)} &= (0, 0, 0, x/L_0, y/L_0, z/L_0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -y'/L_0)^T, \\ \xi^{(3)} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, x/L_0, y/L_0, z/L_0, 0, 0, 1, -z'/L_0)^T \end{aligned} \quad (5)$$

すると式(3)のアフィン変換は次のように書ける。

$$(\xi^{(1)}, u) = 0, \quad (\xi^{(2)}, u) = 0, \quad (\xi^{(3)}, u) = 0 \quad (6)$$

以下、本論文ではベクトル  $a, b$  の内積を  $(a, b)$  と書く。

## 3. アフィン変換の内部拘束

3次元アフィン変換はいくつかの同次式  $\phi_1(u), \dots, \phi_r(u)$  を用いて内部拘束を  $\phi_1(u) = 0, \dots, \phi_r(u) = 0$  の形で指定すれば、さまざまな部分群を表すことができる。

【例1】行列  $A$  が回転行列のとき式(3)は剛体運動となる。 $A$  が回転行列である条件は、その各列が互いに直交する単位ベクトルである。行列式が負なら反転を表すが、ここでは与えられたデータに当てはめる問題を考えるので、行列式を考慮する必要はない。したがって、剛体運動は次の「2次形式」が0となることで指定される。

$$\begin{aligned} \phi_1(u) &= u_1u_4 + u_2u_5 + u_3u_6, \\ \phi_2(u) &= u_4u_7 + u_5u_8 + u_6u_9, \\ \phi_3(u) &= u_7u_1 + u_8u_2 + u_9u_3, \\ \phi_4(u) &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2, \\ \phi_5(u) &= u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 - u_7^2 - u_8^2 - u_9^2, \\ \phi_6(u) &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_0^2 \end{aligned} \quad (7)$$

条件  $\phi_6(u) = 0$  を除けば、 $A$  は回転行列の定数倍であり、

式 (3) は相似変換を表す .

【例 2】 恒等変換  $A = I$ ,  $t = 0$ ,  $s = 1$  は次の「1 次形式」を 0 とすることで実現される .

$$\begin{aligned} \phi_7(\mathbf{u}) &= u_2, \quad \phi_8(\mathbf{u}) = u_3, \quad \phi_9(\mathbf{u}) = u_4, \quad \phi_{10}(\mathbf{u}) = u_6, \\ \phi_{11}(\mathbf{u}) &= u_7, \quad \phi_{12}(\mathbf{u}) = u_8, \quad \phi_{13}(\mathbf{u}) = u_1 - u_5, \\ \phi_{14}(\mathbf{u}) &= u_5 - u_9, \quad \phi_{15}(\mathbf{u}) = u_1 - u_0, \quad \phi_{16}(\mathbf{u}) = u_{10}, \\ \phi_{17}(\mathbf{u}) &= u_{11}, \quad \phi_{18}(\mathbf{u}) = u_{12} \end{aligned} \quad (8)$$

条件  $\phi_{15}(\mathbf{u}) = 0$  を除けば,  $A$  は単位行列  $I$  の定数倍であり, スケール変化が表せる . 条件  $\phi_{16}(\mathbf{u}) = 0$ ,  $\phi_{17}(\mathbf{u}) = 0$ ,  $\phi_{18}(\mathbf{u}) = 0$  を除けば並進が表せる .

内部拘束を満たす  $\mathbf{u}$  の定義域  $\mathcal{U}$  は 13 次元空間  $\mathcal{R}^{13}$  の多様体である . このとき  $u_0 = 1$  であるが, 式 (6) は  $\mathbf{u}$  の定数倍の不定性がある . そこで  $\|\mathbf{u}\| = 1$  となる単位ベクトル  $\mathbf{u}$  を計算してから, 最後に  $u_0 = 1$  となるように正規化する . したがって定義域  $\mathcal{U}$  は次のようになる .

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\| = 1, \phi_1(\mathbf{u}) = 0, \dots, \phi_r(\mathbf{u}) = 0\} \subset \mathcal{R}^{13} \quad (9)$$

$\|\mathbf{u}\| = 1$  は  $\mathcal{R}^{13}$  の単位球面を表し, 各  $\phi_k(\mathbf{u}) = 1$  は  $\mathcal{R}^{13}$  の超曲面を表す .  $\mathcal{U}$  は  $r + 1$  枚の超曲面の交わりであるから  $12 - r$  次元多様体である . 多様体  $\mathcal{U}$  の法線方向を考える . 単位球面  $\|\mathbf{u}\| = 1$  の法線は  $\mathbf{u}$  自身であり, 各超曲面  $\phi_k(\mathbf{u}) = 0$  の法線は  $\nabla_{\mathbf{u}}\phi_k$  であるから, それらの張る線形空間 ( $\{\dots\}_{\mathcal{L}}$  は  $\dots$  の張る線形空間を表す)

$$\mathcal{N}_{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{u}}\phi_1, \dots, \nabla_{\mathbf{u}}\phi_r\}_{\mathcal{L}} \quad (10)$$

は定義域  $\mathcal{U}$  の  $\mathbf{u}$  における接空間  $T_{\mathbf{u}}(\mathcal{U})$  の直交補空間  $T_{\mathbf{u}}(\mathcal{U})^{\perp}$  である .  $\mathcal{N}_{\mathbf{u}}$  の部分空間  $\mathcal{M}_{\mathbf{u}}$  を

$$\mathcal{M}_{\mathbf{u}} = \{\nabla_{\mathbf{u}}\phi_1, \dots, \nabla_{\mathbf{u}}\phi_r\}_{\mathcal{L}} \quad (11)$$

と置けば,  $\mathcal{N}_{\mathbf{u}}$  は次のように直和分解される .

$$\mathcal{N}_{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{L}} \oplus \mathcal{M}_{\mathbf{u}} \quad (12)$$

本論文の拡張 FNS 法の核心は次の補題である .

$$\text{補題 } \phi_k(\mathbf{u}) = 0 \iff (\nabla_{\mathbf{u}}\phi_k, \mathbf{u}) = 0$$

(証明)  $\phi_k(\mathbf{u})$  は同次式であるから, その次数を  $D_k$  とすると任意の  $t$  に対して  $\phi_k(t\mathbf{u}) = t^{D_k}\phi_k(\mathbf{u})$  である . 両辺を  $t$  で微分すると  $(\nabla_{\mathbf{u}}\phi_k(t\mathbf{u}), \mathbf{u}) = D_k t^{D_k-1}\phi_k(\mathbf{u})$  となり,  $t = 1$  と置くと,  $(\nabla_{\mathbf{u}}\phi_k, \mathbf{u}) = D_k\phi_k(\mathbf{u})$  となる .  $\square$

したがって式 (9) の定義域  $\mathcal{U}$  は次のように書ける .

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\| = 1, \mathbf{u} \in \mathcal{M}_{\mathbf{u}}^{\perp}\} \quad (13)$$

## 4. 共分散行列

3 次元空間を移動する  $N$  点を測定し, 移動前と移動後

の測定位置をそれぞれ  $r_{\alpha}$ ,  $r'_{\alpha}$  とする ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) . 測定は誤差を含むとし, それぞれの共分散行列を  $\sigma^2 V_0[r_{\alpha}]$ ,  $\sigma^2 V_0[r'_{\alpha}]$  とする .  $\sigma$  は誤差の絶対的な大きさを表す定数 (「ノイズレベル」) であり,  $V_0[r_{\alpha}]$ ,  $V_0[r'_{\alpha}]$  は誤差の分布を表す行列 (「正規化共分散行列」) である . 以下, ノイズレベル  $\sigma$  は未知, 正規化共分散行列  $V_0[r_{\alpha}]$  は既知とする . このように分離するのは, 誤差の絶対的な大きさを知ることが難しいことと, および以下に示すようにノイズレベルによらずに正規化共分散行列のみから最適な推定ができるためである . このため  $\sigma$  と  $V_0[r_{\alpha}]$  の分離は便宜的である .

データ  $r_{\alpha}$ ,  $r'_{\alpha}$  から計算した式 (5) の  $\xi^{(k)}$  を  $\xi_{\alpha}^{(k)}$  とすると, その誤差  $\Delta\xi_{\alpha}^{(k)}$  は式 (5) より誤差  $\Delta x_{\alpha}$ ,  $\Delta y_{\alpha}$ ,  $\Delta x'_{\alpha}$ ,  $\Delta y'_{\alpha}$  と次の線形関係がある .

$$\begin{aligned} \Delta\xi_{\alpha}^{(1)} &= T_1^{\top} \begin{pmatrix} \Delta x_{\alpha} \\ \Delta y_{\alpha} \\ \Delta z_{\alpha} \\ \Delta x'_{\alpha} \\ \Delta y'_{\alpha} \\ \Delta z'_{\alpha} \end{pmatrix}, & \Delta\xi_{\alpha}^{(2)} &= T_2^{\top} \begin{pmatrix} \Delta x_{\alpha} \\ \Delta y_{\alpha} \\ \Delta z_{\alpha} \\ \Delta x'_{\alpha} \\ \Delta y'_{\alpha} \\ \Delta z'_{\alpha} \end{pmatrix}, \\ \Delta\xi_{\alpha}^{(3)} &= T_3^{\top} \begin{pmatrix} \Delta x_{\alpha} \\ \Delta y_{\alpha} \\ \Delta z_{\alpha} \\ \Delta x'_{\alpha} \\ \Delta y'_{\alpha} \\ \Delta z'_{\alpha} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

各  $T_k$  は次のようになる .

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{L_0} \begin{pmatrix} I & O & O & O & 0 \\ O & O & O & O & -i \end{pmatrix}, \\ T_2 &= \frac{1}{L_0} \begin{pmatrix} O & I & O & O & 0 \\ O & O & O & O & -j \end{pmatrix}, \\ T_3 &= \frac{1}{L_0} \begin{pmatrix} O & O & I & O & 0 \\ O & O & O & O & -k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

ただし,  $O$  は  $3 \times 3$  零行列,  $0$  は 3 次元零ベクトルであり,  $i = (1, 0, 0)^{\top}$ ,  $j = (0, 1, 0)^{\top}$ ,  $k = (0, 0, 1)^{\top}$  と置いた . 以上より  $\xi_{\alpha}^{(k)}$  と  $\xi_{\alpha}^{(l)}$  の間の共分散行列が次のようになる .

$$\begin{aligned} \sigma^2 V_0^{(kl)}[\xi_{\alpha}] &= E[\Delta\xi_{\alpha}^{(k)} \Delta\xi_{\alpha}^{(l)\top}] \\ &= \sigma^2 T_k^{\top} \begin{pmatrix} V_0[r_{\alpha}] & O \\ O & V_0[r'_{\alpha}] \end{pmatrix} T_l \end{aligned} \quad (16)$$

## 5. 残差の計算

観測値  $\xi_{\alpha}^{(k)}$  の真値を  $\bar{\xi}_{\alpha}^{(k)}$  とすると, アフィン変換の最尤推定はマハラノビス距離 (以下「残差」と呼ぶ)

$$\begin{aligned} J &= \sum_{\alpha=1}^N \left( \begin{pmatrix} \xi_{\alpha}^{(1)} - \bar{\xi}_{\alpha}^{(1)} \\ \xi_{\alpha}^{(2)} - \bar{\xi}_{\alpha}^{(2)} \\ \xi_{\alpha}^{(3)} - \bar{\xi}_{\alpha}^{(3)} \end{pmatrix} \right)^{\top} \\ &\quad \begin{pmatrix} V_0^{(11)}[\xi_{\alpha}] & V_0^{(12)}[\xi_{\alpha}] & V_0^{(13)}[\xi_{\alpha}] \\ V_0^{(21)}[\xi_{\alpha}] & V_0^{(22)}[\xi_{\alpha}] & V_0^{(23)}[\xi_{\alpha}] \\ V_0^{(31)}[\xi_{\alpha}] & V_0^{(32)}[\xi_{\alpha}] & V_0^{(33)}[\xi_{\alpha}] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_{\alpha}^{(1)} - \bar{\xi}_{\alpha}^{(1)} \\ \xi_{\alpha}^{(2)} - \bar{\xi}_{\alpha}^{(2)} \\ \xi_{\alpha}^{(3)} - \bar{\xi}_{\alpha}^{(3)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

を最小化することである．真値  $\bar{\xi}_\alpha^{(k)}$  は式 (6) の制約を満たすので，その制約に対するラグランジュ乗数  $\lambda_\alpha^{(k)}$  を導入して上式に  $-\sum_{\alpha=1}^N \sum_{k=1}^3 \lambda_\alpha^{(k)} (\bar{\xi}_\alpha^{(k)}, \mathbf{u})$  を追加して  $\bar{\xi}_\alpha^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_\alpha^{(2)}$ ,  $\bar{\xi}_\alpha^{(3)}$  に関する導関数を 0 と置くと次のようになる．

$$-\begin{pmatrix} V_0^{(11)}[\xi_\alpha] & V_0^{(12)}[\xi_\alpha] & V_0^{(13)}[\xi_\alpha] \\ V_0^{(21)}[\xi_\alpha] & V_0^{(22)}[\xi_\alpha] & V_0^{(23)}[\xi_\alpha] \\ V_0^{(31)}[\xi_\alpha] & V_0^{(32)}[\xi_\alpha] & V_0^{(33)}[\xi_\alpha] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_\alpha^{(1)} - \bar{\xi}_\alpha^{(1)} \\ \xi_\alpha^{(2)} - \bar{\xi}_\alpha^{(2)} \\ \xi_\alpha^{(3)} - \bar{\xi}_\alpha^{(3)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_\alpha^{(1)} \mathbf{u} \\ \lambda_\alpha^{(2)} \mathbf{u} \\ \lambda_\alpha^{(3)} \mathbf{u} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (18)$$

これを  $\bar{\xi}_\alpha^{(1)}$ ,  $\bar{\xi}_\alpha^{(2)}$ ,  $\bar{\xi}_\alpha^{(3)}$  について解くと次のようになる．

$$\bar{\xi}_\alpha^{(k)} = \xi_\alpha^{(k)} + \sum_{l=1}^3 \lambda_\alpha^{(l)} V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \mathbf{u} \quad (19)$$

これが拘束条件  $(\bar{\xi}_\alpha^{(k)}, \mathbf{u}) = 0$  を満たすから，

$$\sum_{l=1}^3 \lambda_\alpha^{(l)} (\mathbf{u}, V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \mathbf{u}) = -(\xi_\alpha^{(k)}, \mathbf{u}) \quad (20)$$

であり，これは  $\lambda_\alpha^{(k)}$  に関する連立 1 次方程式である．解は次のように書ける．

$$\lambda_\alpha^{(k)} = -\sum_{l=1}^3 W_\alpha^{(kl)}(\xi_\alpha^{(l)}, \mathbf{u}) \quad (21)$$

ただし， $(\mathbf{u}, V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \mathbf{u})$  を  $(kl)$  要素とする行列を

$$\mathbf{V}_\alpha = \left( (\mathbf{u}, V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \mathbf{u}) \right) \quad (22)$$

と定義するとき， $W_\alpha^{(kl)}$  は  $\mathbf{V}_\alpha^{-1}$  の  $(kl)$  要素である．これを記号的で次のように書く．

$$W_\alpha^{(kl)} = \left( (\mathbf{u}, V_0^{(kl)}[\xi_\alpha] \mathbf{u}) \right)^{-1} \quad (23)$$

式 (21) を式 (19) に代入し，それを式 (17) に代入すると，残差  $J$  が次のように表される．

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)}(\xi_\alpha^{(k)}, \mathbf{u})(\xi_\alpha^{(l)}, \mathbf{u}) \quad (24)$$

これを  $\mathbf{u}$  の定義域  $\mathcal{U}$  上で最小化すればよい．

## 6. 内部拘束をもつアフィン変換の最適計算

関数  $J$  を内部拘束のもとに最小化する方法は次のように大別される．

**事後補正法**  $J$  を内部拘束を考慮せずに最小化し，得られた解  $\mathbf{u}$  が内部拘束を満たす多様体  $\mathcal{U}$  に載るように補正する (図 1(a))．例えば  $A$  が回転行列なら，これを一般の  $3 \times 3$  行列として計算してから  $AA^T = I$ ,  $\det A = 1$  を満たすように補正する．よく知られているの特異値分解による方法である [4]．

**内部接近法** 未知数  $\mathbf{u}$  が内部拘束を満たすように少ない

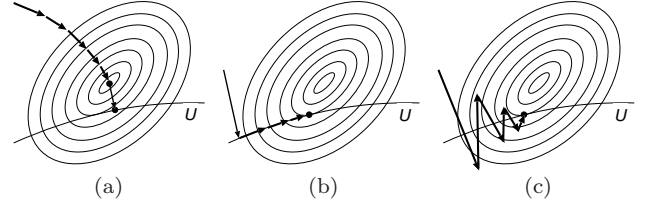


図 1 解は多様体  $\mathcal{U}$  に拘束されている．(a) 事後補正法．(b) 内部接近法．(c) 外部接近法

パラメータで表現する．例えば  $A$  が回転行列であれば，これをオイラー角や四元数やリー代数の方法で表す [11], [15], [20]．そしてその次元の低いパラメータ (内部) 空間  $\mathcal{U}$  を探索して  $J$  を最小にする (図 1(b))．外部接近法 制約のない (外部) 空間を探索して，反復とともに次第に内部拘束が満たされ，収束した時点で多様体  $\mathcal{U}$  上にあるようにする (図 1(c))．

外部接近法として知られているものに「拡張 FNS 法」 [17], [18] がある．これは 2 画像からの 3 次元復元のための基礎行列  $F$  がランク拘束  $\det F = 0$  [3] を満たすように計算する方法として考えられたものである．ただし，これはエッジ線方程式のようなスカラー方程式に対するものである．しかし，3 次元運動はベクトル方程式で表される．そこで拡張 FNS 法をベクトル方程式の場合に拡張する．そのためにまず式 (24) の残差  $J$  を  $\mathbf{u}$  で微分する．

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} J &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \nabla_{\mathbf{u}} W_\alpha^{(kl)}(\xi_\alpha^{(k)}, \mathbf{u})(\xi_\alpha^{(l)}, \mathbf{u}) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)}(\xi_\alpha^{(l)}, \mathbf{u}) \xi_\alpha^{(k)} \end{aligned} \quad (25)$$

式中の  $\nabla_{\mathbf{u}} W_\alpha^{(kl)}$  を計算する． $W_\alpha$  は式 (22) の行列  $\mathbf{V}_\alpha$  の逆行列として定義されているので， $\mathbf{V}_\alpha W_\alpha = I$  の両辺を  $u_i$  で微分すると

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial u_i} W_\alpha + \mathbf{V}_\alpha \frac{\partial W_\alpha}{\partial u_i} = \mathbf{0} \quad (26)$$

であるから，

$$\frac{\partial W_\alpha}{\partial u_i} = -\mathbf{V}_\alpha^{-1} \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial u_i} W_\alpha = -W_\alpha \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial u_i} W_\alpha \quad (27)$$

である．この  $(kl)$  要素は式 (22) より次のようになる．

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} W_\alpha^{(kl)} &= -\sum_{m,n=1}^3 W_\alpha^{(km)} \nabla_{\mathbf{u}} (\mathbf{u}, V_0^{(mn)}[\xi_\alpha] \mathbf{u}) W_\alpha^{(nl)} \\ &= -2 \sum_{m,n=1}^3 W_\alpha^{(km)} W_\alpha^{(nl)} V_0^{(mn)}[\xi_\alpha] \mathbf{u} \end{aligned} \quad (28)$$

これを式 (25) に代入すると，最終的に次のようになる．

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} J &= \left( \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} \xi_\alpha^{(k)} \xi_\alpha^{(l)\top} \right) \mathbf{u} \\ &\quad - \left( \sum_{\alpha=1}^N \sum_{m,n=1}^3 v_\alpha^{(m)} v_\alpha^{(n)} V_0^{(mn)}[\xi_\alpha] \right) \mathbf{u} \end{aligned} \quad (29)$$



ただし，次のように置いた．

$$v_\alpha^{(k)} = \sum_{l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} (\xi_\alpha^{(l)}, u) \quad (30)$$

ここで行列  $M, L$  を次のように置く．

$$\begin{aligned} M &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_\alpha^{(kl)} \xi_\alpha^{(k)} \xi_\alpha^{(l)\top}, \\ L &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 v_\alpha^{(k)} v_\alpha^{(l)} V_0^{(kl)} [\xi_\alpha] \end{aligned} \quad (31)$$

すると式 (29) は次のように書ける．

$$\nabla_u J = (M - L)u \quad (32)$$

## 7. 反復解法

変分学でよく知られているように，関数  $J$  が  $u$  の定義域  $\mathcal{U}$  ( $\in \mathcal{R}^{13}$ ) で停留値をとる必要十分条件は  $J$  の勾配  $\nabla_u J$  がその点  $u$  で  $\mathcal{U}$  に直交することである（直交していなければ  $\mathcal{U}$  に沿って  $J$  が増加・減少する方向に進むことができる）．これは式 (10) の空間  $\mathcal{N}_u$  を用いて  $\nabla_u J \in \mathcal{N}_u$  と書ける．しかし，すぐ確かめられるように，式 (24) は 0 次同次式であり， $u$  を定数倍しても  $J$  の値は変化しない．このため  $\nabla_u J$  は常に  $u$  に直交している．したがって式 (12) より， $\nabla_u J \in \mathcal{N}_u$  は次のように書いてもよい．

$$\nabla_u J \in \mathcal{M}_u \quad (33)$$

部分空間  $\mathcal{M}_u$  の直交補空間  $\mathcal{M}_u^\perp$  上への射影行列  $P_M$  を用いれば次のようにも書ける．

$$P_M \nabla_u J = 0 \quad (34)$$

一方，式 (13) より単位ベクトル  $u$  が定義域  $\mathcal{U}$  に含まれる条件  $u \in \mathcal{M}_u^\perp$  は射影行列  $P_M$  を用いれば，上式は次のように書ける．

$$P_M u = u \quad (35)$$

したがって，内部拘束をもつアフィン変換の最適に計算するには式 (34), (35) を満たす単位ベクトル  $u$  を計算すればよい．式 (34) と式 (32) より，解は次式を満たす．

$$P_M (M - L)u = 0 \quad (36)$$

これは，式 (35) を満たす  $u$  に対しては次のように書いてもよい．

$$P_M (M - L)P_M u = 0 \quad (37)$$

$P_M$  は対称行列であり，対称行列  $X$  を

$$X = P_M (M - L)P_M \quad (38)$$

と定義すれば，式 (34), (32) を満たす単位ベクトル  $u$  を計

算することは

$$Xu = 0, \quad P_M u = u \quad (39)$$

満たす単位ベクトル  $u$  を計算することである．これは次の反復によって求まる．

- (1)  $u$  の初期値を与える．
- (2) 式 (31) の行列  $M, L$  を計算する．
- (3) ベクトル  $\nabla_u \phi_1(u), \dots, \nabla_u \phi_r(u)$  を計算し，これにシュミットの直交化を施した正規直交系  $\{u_1, \dots, u_r\}$  とし，次の射影行列  $P_M$  を計算する．

$$P_M = I - \sum_{k=1}^r u_k u_k^\top \quad (40)$$

- (4) 式 (38) の行列  $X$  を計算する．
- (5) 固有値問題  $Xv = \lambda v$  の小さい  $r+1$  個の固有値に対応する単位固有ベクトル  $v_0, \dots, v_r$  を求める．
- (6) 現在の解  $u$  を次のように  $\hat{\mathcal{N}}_u = \{v_0, \dots, v_r\}_\mathcal{L}$  に射影した  $\hat{u}$  を計算する．

$$\hat{u} = \sum_{k=0}^r (u, v_k) v_k \quad (41)$$

- (7) 次の  $u'$  を計算する．

$$u' = \mathcal{N}[P_M \hat{u}] \quad (42)$$

ただし  $\mathcal{N}[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化を表す ( $\mathcal{N}[a] = a/\|a\|$ ) ．

- (8)  $u' \approx u$  なら  $u'$  を返して終了する．そうでなければ  $u \leftarrow \mathcal{N}[u + u']$  としてステップ (2) に戻る．

ステップ (5) では絶対値の小さい  $r+1$  個の固有値を計算するのが自然であるが，実験によれば単に値の小さい  $r+1$  個の固有値を計算するほうが収束が速いことが確認される．これは内部拘束を考えない FNS 法 [2] や拡張 FNS 法 [17], [18] でも同様であり，値の小さい固有値を計算するほうが収束が速い [12], [18] ．

ステップ (8) では「 $u \leftarrow u'$  としてステップ (2) に戻る」とするのが自然であるが，「中点」 $(u' + u)/2$  を正規化した  $\mathcal{N}[u' + u]$  を返すほうが収束が安定する．これも FNS 法 [2] や拡張 FNS 法 [17], [18] でも同様である．

## 8. 解法の証明

前節の反復によって解が得られることは次のように示される．まず，反復が収束した時点ではステップ (6) で計算される  $\hat{\mathcal{N}}_u$  は  $X$  の零空間に一致することを示す．式 (40) の  $P_M$  の定義より  $P_M u_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, r$  であるから，式 (38) の  $X$  の定義より  $u_1, \dots, u_r$  は  $X$  の固有値 0 の固有ベクトルである．ゆえにステップ (5) で計算される  $r+1$  個の  $v_0, \dots, v_r$  の内の  $r$  個は常に固有値 0 の固有ベクトルである． $\hat{\mathcal{N}}_u$  が  $X$  の零空間でないなら，一つの固有ベクトル  $v_*$  は 0 でない固有値  $\lambda_*$  ( $\neq 0$ ) を持ち，残りの固有ベクトルに直交する．それらの張る部分空間が  $\mathcal{M}_u =$

$\{u_1, \dots, u_r\}_{\mathcal{L}}$  であるから,  $v_*$  は  $M_u$  に直交する.

構成により, 式 (41) の  $\hat{N}_u$  は  $\hat{N}_u = \{v_*\}_{\mathcal{L}} \oplus M$  の元であり, 式 (42) の  $u'$  はそれを  $\hat{N}_u$  内で  $M_u$  に直交する方向へ射影したものであるから,  $u'$  は  $\pm v_*$  に一致する. 反復が終了した時点では  $u = u' = \pm v_*$  であり,  $v_*$  は固有値  $\lambda_*$  の固有ベクトルであるから,  $Xu = \lambda_* u$  が成り立つ. 両辺と  $u$  との内積をとると

$$(u, Xu) = \lambda_* (\neq 0) \quad (43)$$

となる. しかし,  $u (= \pm v_*)$  は  $X$  のすべての固有値 0 の固有ベクトルと直交するので, それらの張る部分空間が  $M_u$  に直交する. したがって

$$P_M u = u \quad (44)$$

である. このため次の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} (u, Xu) &= (u, P_M(M-L)P_M u) = (u, (M-L)u) \\ &= (u, Mu) - (u, Lu) \end{aligned} \quad (45)$$

しかし,  $(u, Mu) = (u, Lu)$  が恒等式であることが次のように示される.

$$\begin{aligned} (u, Mu) &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 W_{\alpha}^{(kl)}(\xi_{\alpha}^{(k)}, u)(\xi_{\alpha}^{(l)}, u), \quad (46) \\ (u, Lu) &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 v_{\alpha}^{(k)} v_{\alpha}^{(l)}(u, V_0^{(kl)}[\xi_{\alpha}]u) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{k,l=1}^3 \left( \sum_{m=1}^3 W_{\alpha}^{(km)}(\xi_{\alpha}^{(m)}, u) \right) \\ &\quad \left( \sum_{n=1}^3 W_{\alpha}^{(ln)}(\xi_{\alpha}^{(n)}, u) \right) V_{\alpha}^{(kl)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{m,n=1}^3 \left( \sum_{k,l=1}^3 W_{\alpha}^{(mk)} V_{\alpha}^{(kl)} W_{\alpha}^{(ln)} \right) (\xi_{\alpha}^{(m)}, u)(\xi_{\alpha}^{(n)}, u) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{m,n=1}^3 W_{\alpha}^{(mn)}(\xi_{\alpha}^{(m)}, u)(\xi_{\alpha}^{(n)}, u) \end{aligned} \quad (47)$$

ただし  $W_{\alpha} = V_{\alpha}^{-1}$  より得られる関係  $W_{\alpha} V_{\alpha} W_{\alpha} = W_{\alpha}$  を用いた. ゆえに  $(u, Xu) = 0$  であり, 式 (43) に反する. したがって, 反復が収束した時点では  $\hat{N}_u$  のすべての元が  $X$  の固有値 0 の固有ベクトルであり,  $\hat{N}_u$  は  $X$  の零空間に一致する.  $u = u' = \pm v_* \in \hat{N}_u$  であるから,  $Xu = 0$  である. 式 (44) と合わせて  $u$  (構成より単位ベクトル) が式 (39) を満たす解である. □

## 9. ステレオ 3 次元データによる実験

図 2 のように曲面を原点を通るある回転軸の周りに角度  $\Omega$  だけ回転し,  $t$  だけ平行移動し, スケールを  $x$  軸方向に  $s_x$  倍,  $y$  軸方向に  $s_y$  倍,  $z$  軸方向に  $s_z$  倍する. 次の 9 通りの場合を考える.

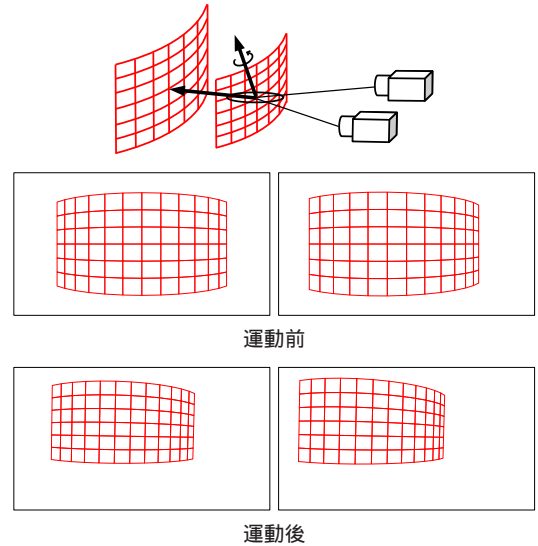


図 2 いろいろな運動する曲面格子ステレオ視による 3 次元計測と誤差楕円体, および運動前後のステレオシミュレーション画像 (運動 (0) の場合).

- (0) アフィン変換:  $\Omega = 10^\circ$ ,  $t = (100, 100, 300)^\top$ ,  $s_x = 1.01$ ,  $s_y = 1.02$ ,  $s_z = 0.99$
- (1) 相似変換:  $\Omega = 10^\circ$ ,  $t = (100, 100, 300)^\top$ ,  $s_x = s_y = s_z = 1.01$
- (2) 剛体運動:  $\Omega = 10^\circ$ ,  $t = (100, 100, 300)^\top$ ,  $s_x = s_y = s_z = 1$
- (3) 回転・スケール変化:  $\Omega = 10^\circ$ ,  $t = \mathbf{0}$ ,  $s_x = s_y = s_z = 1.01$
- (4) 並進・スケール変化:  $\Omega = 0$ ,  $t = (100, 100, 300)^\top$ ,  $s_x = s_y = s_z = 1.01$
- (5) 回転:  $\Omega = 10^\circ$ ,  $t = \mathbf{0}$ ,  $s_x = s_y = s_z = 1.01$
- (6) 並進:  $\Omega = 0$ ,  $t = (100, 100, 3000)^\top$ ,  $s_x = s_y = s_z = 1$
- (7) スケール変化:  $\Omega = 0$ ,  $t = \mathbf{0}$ ,  $s_x = s_y = s_z = 1.01$
- (8) 恒等変換:  $\Omega = 0$ ,  $t = \mathbf{0}$ ,  $s_x = s_y = s_z = 1$

そしてステレオ視によって各格子点の運動前後 3 次元位置を計測する. 曲面格子はその中心の格子点が世界座標の原点にあり, 2 台のカメラはそれを 10 度で見込む位置に配置している. 画像サイズは  $500 \times 800$  画素, 焦点距離は 600 画素を想定している. 各格子点を対応点とし, その  $x, y$  座標に期待値 0, 標準偏差 1 画素の正規乱数を加え, それぞれ金谷ら [13], [14] の方法で各格子点の 3 次元位置を最適に計算する. これにより, 画像上では一様等方な誤差であっても, 復元位置  $\hat{r}_\alpha, \hat{r}'_\alpha$  の誤差は非一様非等方であり, 正規化共分散行列  $V_0[\hat{r}_\alpha], V_0[\hat{r}'_\alpha]$  が計算できる [11], [20]. そして, 式 (7), (8) の次の関数で指定されるアフィン変換の 9 通りの部分群 (モデル) を当てはめる. ただし, 基準長  $L_0$  は 1000 とした.

- (0) アフィン変換: 内部拘束なし
- (1) 相似変換:  $\phi_1(u), \dots, \phi_5(u)$
- (2) 剛体運動:  $\phi_1(u), \dots, \phi_6(u)$
- (3) 回転・スケール変化:  $\phi_1(u), \dots, \phi_5(u), \phi_{16}(u), \phi_{17}(u)$ ,

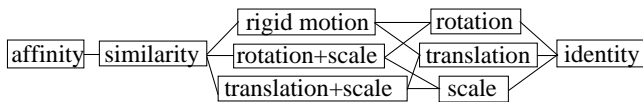


図 3 3次元アフィン変換の部分群の包含関係。

- (4) 並進・スケール変化:  $\phi_7(\mathbf{u}), \dots, \phi_{14}(\mathbf{u})$
- (5) 回転:  $\phi_1(\mathbf{u}), \dots, \phi_6(\mathbf{u}), \phi_{16}(\mathbf{u}), \phi_{17}(\mathbf{u}), \phi_{18}(\mathbf{u})$
- (6) 並進:  $\phi_7(\mathbf{u}), \dots, \phi_{15}(\mathbf{u})$
- (7) スケール変化:  $\phi_7(\mathbf{u}), \dots, \phi_{14}(\mathbf{u}), \phi_{16}(\mathbf{u}), \phi_{17}(\mathbf{u}), \phi_{18}(\mathbf{u})$
- (8) 恒等変換:  $\phi_7(\mathbf{u}), \dots, \phi_{18}(\mathbf{u})$

これらの部分群の包含関係を図 3 に示す。反復の初期値としては回転  $R$ ，並進  $t$ ，スケール変化  $s$  を最小二乗法で推定した (計算式は [11], [20] 参照)。具体的には  $t$  を運動前後の重心の差から推定し，スケール変化  $s$  は重心からの平方平均誤差の変化から推定し，回転  $R$  は特異値分解の方法 [4] で推定する。そして，その結果をモデルに応じて調節する。具体的には回転がなければ  $R = I$  とし，並進がなければ  $t = 0$  とし，スケール変化がなければ  $s = 1$  とする。基準長は  $L_0 = 1000$  とした。検証のために回転を四元数を使う方法 [20]，相似変換をレーベンバーグ・マーカート法 [15] やガウス・ヘルマート法 [11] などの別の方法で計算すると同じ解が得られることが確認された。

## 10. 幾何学的モデル選択の実験

各モデルに対する幾何学的 AIC，幾何学的 BIC，幾何学的 MDL はそれぞれ次のようになる [5], [6], [8], [9], [10] (幾何学的 BIC と幾何学的 MDL は同じ値となる)。

$$G\text{-AIC} = \hat{J} + 2(3N + p)\hat{\sigma}^2,$$

$$G\text{-BIC} = G\text{-MDL} = \hat{J} - (3N + p)\hat{\sigma}^2 \log \frac{\sigma^2}{L_0^2} \quad (48)$$

ただし， $\hat{J}$  は当てはめた残差  $J$  の値であり， $N$  はデータ数である (この実験では格子点の数 91)。 $p$  はモデルの自由度であり，上記のモデル (0), (1), ..., (8) に対してそれぞれ  $p = 12, 7, 6, 4, 4, 3, 3, 1, 0$  である。 $\hat{\sigma}^2$  は  $\sigma^2$  の推定値である。すべてのモデルはすべて 3次元アフィン変換の部分群であるから，どのモデルが正しいとしても次のように推定できる [4]。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{J}_0}{3N - 12} \quad (49)$$

ただし， $\hat{J}_0$  はアフィン変換 (モデル (0)) を当てはめた残差である。

幾何学的 AIC は「赤池の AIC」[1] に基づいている。赤池の AIC は Kullback-Leibler 情報量の評価にバイアス補正を加えたものをデータ数  $N \rightarrow \infty$  に対して漸近評価したものである。これをノイズレベル  $\sigma \rightarrow 0$  で近似すると幾何学

表 1 幾何学的 AIC によって各モデルが選ばれた割合 (%)。

運動	0	1	2	3	4	5	6	7	8
モデル 0	100	3	6	6	3	1	3	3	0
モデル 1	0	97	17	5	9	2	1	2	2
モデル 2	0	0	77	0	2	10	6	0	3
モデル 3	0	0	0	89	0	16	0	11	1
モデル 4	0	0	0	0	85	0	19	7	0
モデル 5	0	0	0	0	0	71	0	0	4
モデル 6	0	0	0	0	1	0	71	0	7
モデル 7	0	0	0	0	0	0	0	77	5
モデル 8	0	0	0	0	0	0	0	0	78

表 2 幾何学的 BIC，幾何学的 MDL によって各モデルが選ばれた割合 (%)。

運動	0	1	2	3	4	5	6	7	8
モデル 0	39	0	0	0	0	0	0	0	0
モデル 1	61	46	0	0	0	0	0	0	0
モデル 2	0	54	100	0	0	0	0	0	0
モデル 3	0	0	0	86	0	0	0	0	0
モデル 4	0	0	0	0	33	0	0	0	0
モデル 5	0	0	0	14	0	100	0	0	0
モデル 6	0	0	0	0	67	0	100	0	0
モデル 7	0	0	0	0	0	0	0	100	0
モデル 8	0	0	0	0	0	0	0	0	100

表 3 各運動に対する各モデルの G-AIC の値の 1 例 ( $\times 10^2$ )。下線は選ばれたモデル。表 1 と同様に各列は運動の種類，各行はモデルの種類を表す。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	<u>6.9751</u>	8.1379	8.6326	7.6066	9.1490	9.8183	6.9272	8.2901	7.5678
1	7.6925	<u>8.1394</u>	8.5269	7.5305	9.0370	9.7532	6.8708	8.2307	7.5128
2	8.2663	8.2013	<u>8.5476</u>	7.6065	9.2824	9.7294	6.9200	8.4536	7.4958
3	1204.5	1359.6	1380.3	<u>7.4832</u>	1407.2	9.6857	1430.5	8.1803	7.4871
4	143.71	141.51	137.43	130.09	<u>9.0017</u>	133.52	<u>6.8647</u>	8.1820	7.4871
5	1188.0	1341.4	1363.9	7.5588	1339.4	<u>9.6620</u>	1369.9	8.4298	7.4691
6	142.83	140.47	136.83	129.72	9.2480	133.13	6.9112	8.4054	7.4701
7	2572.9	2609.8	2632.0	1970.5	2099.5	1978.4	2140.5	<u>8.1383</u>	7.4544
8	3014.9	2943.4	2950.6	5207.0	2319.3	5230.9	2371.7	8.5386	<u>7.4362</u>

的 AIC が得られる [4], [5], [6]。幾何学的 BIC は「Schwarz の BIC」[22] に基づいている。Schwarz の BIC は各モデルに対する事後確率をラプラス近似したものをデータ数  $N \rightarrow \infty$  に対して漸近評価したものである。これをノイズレベル  $\sigma \rightarrow 0$  で近似すると幾何学的 BIC が得られる [9], [10]。幾何学的 MDL は「Rissanen の MDL」[21] に基づいている。Rissanen の MDL は最小記述長に最適に実数の量子化を施したものをデータ数  $N \rightarrow \infty$  に対して漸近評価したものである。これをノイズレベル  $\sigma \rightarrow 0$  で近似すると幾何学的 MDL が得られる [7], [8]。

表 1 は  $\sigma = 1$  とする 100 通りの独立な誤差を加えて各運動に各モデルを当てはめて，幾何学的 AIC によって各モデルが選ばれた割合 (%) を示したものである。表 2 は幾何学的 BIC，幾何学的 MDL による結果である。これから正しいモデルが選ばれた割合が大きいが，必ずしも常に真のモデルが選ばれるとは限らないことがわかる。ただし，自由度の小さいモデルに対しては幾何学的 BIC，幾何学的

表 4 各運動に対する各モデルの G-BIC (= G-MDL) の値の 1 例 ( $\times 10^2$ ) . 下線は選ばれたモデル . 表 2 と同様に各列は運動の種類 , 各行はモデルの種類を表す .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	35.659	41.173	43.501	38.661	45.921	49.043	35.430	41.890	38.477
1	35.873	40.595	42.784	38.040	45.164	48.290	34.874	41.242	37.880
2	36.346	<u>40.541</u>	<u>42.682</u>	38.007	45.280	48.128	34.823	41.347	37.754
3	1232.4	1391.8	1414.2	37.666	1442.9	47.809	1458.2	40.837	37.529
4	171.59	173.62	171.32	160.27	<u>44.742</u>	171.65	34.568	40.839	37.529
5	1215.8	1373.3	1397.6	<u>37.633</u>	1375.0	<u>47.648</u>	1397.5	40.969	37.402
6	170.61	172.46	170.60	159.79	44.859	171.11	<u>34.514</u>	40.945	37.403
7	2600.5	2641.6	2665.5	2000.3	2134.9	2016.1	2167.9	<u>40.442</u>	37.171
8	3042.4	2975.0	2984.0	5236.7	2354.6	5268.4	2399.0	40.724	<u>37.044</u>

MDL によって正しいモデルがよく選ばれている . これは幾何学的 BIC と幾何学的 MDL のモデルの自由度に対するペナルティが幾何学的 AIC より大きいことから説明される .

表 3, 表 4 は各モデルに対する G-AIC および G-BIC (= G-MDL) の具体的な値の 1 例であり下線のモデルが選択される . 幾何学的 AIC も幾何学的 BIC/MDL も , モデルの単純さとデータへの当てはまりの忠実さをバランスさせるものであるが , よく知られているように , 幾何学的 AIC は比較的データに忠実なモデルが選ばれ , 幾何学的 BIC/MDL はより単純なモデルを選ぶ傾向がある [5], [6], [8], [9], [10] . ここにもその傾向が現れている .

## 11. まとめ

本論文ではセンサーによって計測した二組の 3 次元データがどのように並進 , 回転 , スケール変化しているのか , あるいはしていないのかを判断するモデル選択のために , データにさまざまな運動モデルを最適に当てはめる新しい方法を提案した . 本論文の方法は 3 次元アフィン変換の部分群がパラメータにさまざまな内部拘束を指定して得られることに着目して , 内部拘束をもつ 3 次元アフィン変換を拡張 FNS 法によって計算するものである . これにより , 運動の種類ごとに別のパラメータを導入する必要がなく , すべての部分群が同一の方法で計算できる . そしてこれを結果を用いて , ステレオ視による 3 次元シミュレーションに対する幾何学的 AIC , 幾何学的 BIC , 幾何学的 MDL を用いたモデル選択の具体的な実施例を示した . 本論文の方法を用いると , GPS 計測データから東日本大震災による地盤の移動を解析することもできる . これについては別報 [16] 参照 .

謝辞: 本研究の一部は日本学術振興会科学研究費 ( 挑戦的萌芽研究 24650086 ) の助成による .

## 参考文献

[1] H. Akaike, A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Autom. Control.* **26**-6 (1974-12), 716–723.

[2] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000-11), 1294–1303.

[3] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004.

[4] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, the Netherlands, 1996; Reprinted, Dover, New York, NY, U.S.A., 2005.

[5] 金谷健一, 情報量基準による幾何学的モデル選択, *情報処理学会論文誌*, **37**-6 (1996-6), 1073–1080.

[6] K. Kanatani, Geometric information criterion for model selection, *Int. J. Comput. Vis.*, **26**-3 (1998-02/03), 171–189.

[7] 金谷健一, 幾何学的当てはめにおけるモデル選択, *電子情報通信学会論文誌 A*, **J84-A**-11 (2001-11), 1385–1393.

[8] K. Kanatani, Uncertainty modeling and model selection for geometric inference, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mac. Intell.*, **26**-10 (2004-10), 1307–1319.

[9] 金谷健一, 幾何学的 BIC, *情報処理学会研究報告*, 2008-CVIM-161-45 (2008-1), 301–308.

[10] K. Kanatani, Geometric BIC, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **Vol. E93-D**-1 (2010-1), 144–151.

[11] K. Kanatani and H. Niitsuma, Optimal computation of 3-D similarity: Gauss-Newton vs. Gauss-Helmert. *Comp. Stat. Data Anal.*, **56**-12 (2012-12), 4470–4483.

[12] K. Kanatani and Y. Sugaya, Performance evaluation of iterative geometric fitting algorithms. *Comp. Stat. Data Anal.* **52**-2 (2007-10), 1208–1222.

[13] 金谷健一, 菅谷保之, 新妻弘崇, 2 画像からの三角測量: Hartley-Sturm vs. 最適補正, *情報処理学会研究報告*, 2008-CVIM-162-54 (2008-3), 335–342.

[14] K. Kanatani, Y. Sugaya, and H. Niitsuma, Triangulation from two views revisited: Hartley-Sturm vs. optimal correction. *Proc. 19th British Machine Vis. Conf.*, September 2008, Leeds, U.K., pp. 173–182.

[15] 原裕貴, 新妻弘崇, 金谷健一, 不均一な誤差分布をもつ空間データからの 3 次元相似変換の最適計算, *情報処理学会研究報告*, 2011-CVIM-176-15 (2011-3), 1–8.

[16] 本田卓士, 松永力, 金谷健一, GPS 計測データの階層的運動モデル当てはめによる東日本大震災の地盤変形解析, *計測自動制御学会第 17 回パターン計測シンポジウム資料* (2012-12).

[17] 金谷健一, 菅谷保之, 制約付きパラメータ推定のための拡張 FNS 法, *情報処理学会研究報告*, 2007-CVIM-158-4 (2007-3), 25–32.

[18] K. Kanatani and Y. Sugaya, Compact fundamental matrix computation, *IPSJ Trans. Comput. Vis. Appl.* **2** (2010-3), 59–70.

[19] 松永力, 2 次元/3 次元幾何学的変換の統一的な最適計算, 第 18 回画像センシングシンポジウム講演論文集, 2012 年 6 月, 横浜, IS4-04, pp. 1–8.

[20] H. Niitsuma and K. Kanatani, Optimal computation of 3-D rotation under inhomogeneous anisotropic noise, *Proc. 12th IAPR Conf. Machine Vis. Appl.* June 13–15, 2011, Nara, Japan, pp. 112–115.

[21] J. Rissanen, *Stochastic Complexity in Statistical Inquiry*, World Scientific, Singapore, 1989.

[22] G. Schwarz, Estimating the dimension of a model, *Annals Statist.*, **6**-2 (1978-7), 461–464.