

精度の高い楕円限定当てはめ

益崎智成^{1,a)} 菅谷保之^{1,b)} 金谷健一^{2,c)}

概要: 本論文では画像から抽出した点列に常に楕円が当てはまる新しい方法を提案する。現時点で最も優れた楕円当てはめ法は金谷らの超精度くりこみ法であるが、ノイズが非常に大きいとき双曲線が当てはまることもある。提案手法はそのような場合にデータ点のランダムサンプリングによって点列に最も近い楕円を選ぶ。これまでに楕円のみを当てはめる方法として Fitzgibbon らの方法、および Szpak らの方法が提案されているが、シミュレーション実験によって提案手法はそれらより精度が高いことを示す。

High Accuracy Ellipse-Specific Fitting

TOMONARI MASUZAKI^{1,a)} YASUYUKI SUGAYA^{1,b)} KENICHI KANATANI^{2,c)}

Abstract: We propose a new method that always fits an ellipse to a point sequence extracted from images. The currently known best method is hyper-renormalization of Kanatani et al., but it may return a hyperbola when the noise in the data is very large. Our proposed method returns an ellipse close to the point sequence by random sampling of data points. Doing simulation, we show that our method has higher accuracy than the method of Fitzgibbon et al. and the method of Szpak et al., the two methods so far proposed to always return an ellipse.

1. まえがき

シーン中の円形の物体を撮影すると画像中では楕円となり、その投影像からその物体の3次元位置が解析できる[6]。このため、画像から楕円を抽出することは視覚ロボットを含む広範な応用の基本的な処理の一つであり、楕円弧を抽出する種々の研究がなされている[1], [24]。そして、抽出した楕円弧に楕円を当てはめるさまざまな方法が研究されてきた[25]。

代表的なものは0になるべき楕円の式の二乗和(「代数的距離」と呼ばれる)を最小にするように式の係数を定める方法であり、計算が容易である[25]。しかし、係数をすべて0にすると代数的距離は0になるので、係数間に制約条件を課す必要があり、解はその制約に依存する。最も単純なものは係数の二乗和を1とするもので、「最小二乗法」と呼ばれる。より精度の高い方法に「Taubin法」[27]がある。筆者らは高次の誤差項を除いて偏差が存在しない「超精度最小二乗法」を提案した[5], [16], [17]。

より精度が高いのは当てはめる楕円と点列との距離の二乗和(「再投影誤差」[4])を最小にするものである。データ点は真の位置に一様等方な正規分布に従うノイズが独立に加わったとみなすと尤度の最大化に相当するので、「最尤推定」とも呼ばれる。再投影誤差は「サンプソン誤差」[4]と呼ばれる関数でよく近似され、サンプソン誤差を最小化する反復手法として Chojnacki ら[2]の「FNS法」、Leedan ら[21]や Matei ら[22]の「HEIV法」、筆者らの「射影ガウスニュートン法」[18], [29]がある。また、これらを反復的に適用することによって厳密な最尤推定解が計算できる[19], [20], [23]。

一方、何らかの評価関数を最小にするのではなく、誤差解析によって精度がなるべく高くなるように計算方式を定める方法があり、「重み反復法」とそれを改良した「くりこみ法」[7], [8]がよく知られている。最近筆者らはさらに精度を向上させる「超精度くりこみ法」[14], [15]を提案した。また、サンプソン誤差を最小化する解を計算し、その誤差を評価し、精度を向上させる「超精度補正」[12], [28]も知られている。両者はほぼ同じ精度であり[30]、誤差が小さいとき「KCR下界」[9], [13]と呼ばれる精度の理論限界をほぼ達成する。

しかし、これらはすべて点列に x, y の2次式(円錐曲線)を当てはめるものであり、ノイズが大きいと楕円以外(双曲線や放物線など)が当てはまることもある。これを

¹ 豊橋技術科学大学情報・知能工学系
Department of Computer Science and Engineering, Toyohashi University of Technology

² 岡山大学大学院自然科学研究科
Department of Computer Science, Okayama University

a) masuzaki@iim.cs.tut.ac.jp

b) sugaya@iim.cs.tut.ac.jp

c) kanatani@suri.cs.okayama-u.ac.jp

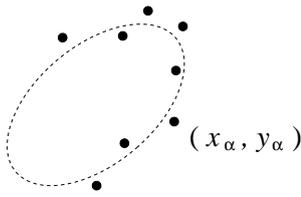


図 1 点列に楕円を当てはめる .

防いで楕円のみが当てはまる方法を最初に提案したものは Fitzgibbon ら [3] である . これは代数的距離の最小化であって計算は単純であるが精度が低い . 最近 Szpak ら [26] はより精度の高い方法を発表した . 本論文では筆者らの超精度くりこみ法を利用して , Szpak ら [26] よりも精度の高い方法を提案する .

2. 楕円当てはめ

x, y の 2 次式

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2f_0(Dx + Ey) + f_0^2F = 0 \quad (1)$$

は「円錐曲線」と総称され、楕円、放物線、双曲線、およびその退化（2 直線など）を表す [10] . これが楕円を表すのは

$$AC - B^2 > 0 \quad (2)$$

の場合である [10] . 式 (1) 中の f_0 はスケールを調節する固定した定数である（実験では $f_0 = 600$ とした）. ノイズ（以下、データの誤差を「ノイズ」と呼ぶ）のある点列 $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ に楕円を当てはめることは $\alpha = 1, \dots, N$ に対して

$$Ax_\alpha^2 + 2Bx_\alpha y_\alpha + Cy_\alpha^2 + 2f_0(Dx_\alpha + Ey_\alpha) + f_0^2F \approx 0 \quad (3)$$

となる A, B, C, D, E, F を計算することである（図 1）. 6 次元ベクトル

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= (x_\alpha^2, 2x_\alpha y_\alpha, y_\alpha^2, 2f_0 x_\alpha, 2f_0 y_\alpha, f_0^2)^\top, \\ \theta &= (A, B, C, D, E, F)^\top \end{aligned} \quad (4)$$

を定義し、ベクトル a, b の内積を (a, b) と書けば式 (3) は次のように書ける .

$$(\xi_\alpha, \theta) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (5)$$

θ には定数倍の不定性があるので、 $\|\theta\| = 1$ と正規化する . データ点 (x_α, y_α) は真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ に期待値 0、標準偏差 σ の独立な正規分布に従うノイズ $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha$ が加わったものであるとみなすと ξ_α の誤差は第 1 近似において次のようになる .

$$\begin{aligned} \Delta \xi_\alpha &= (2x_\alpha \Delta x_\alpha, 2\Delta x_\alpha y_\alpha + 2x_\alpha \Delta y_\alpha, 2y_\alpha \Delta y_\alpha, \\ &2f_0 \Delta x_\alpha, 2f_0 \Delta y_\alpha, 0)^\top \end{aligned} \quad (6)$$

仮定より $E[\Delta x] = E[\Delta y] = 0, E[\Delta x^2] = E[\Delta y^2] = \sigma^2, E[\Delta x \Delta y] = 0$ であるから、 ξ_α の共分散行列は次のようになる .

$$V[\xi_\alpha] \equiv E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top] = \sigma^2 V_0[\xi_\alpha] \quad (7)$$

ただし、 $V_0[\xi_\alpha]$ を次のように置き、「正規化共分散行列」と呼ぶ .

$$V_0[\xi_\alpha] = 4 \begin{pmatrix} x_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & 0 & f_0 x_\alpha & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & f_0 y_\alpha & f_0 x_\alpha & 0 \\ 0 & x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 & 0 & f_0 y_\alpha & 0 \\ f_0 x_\alpha & f_0 y_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 x_\alpha & f_0 y_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

理論的にはこれは真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ で評価すべきであるが、実験によると観測値 (x_α, y_α) で評価しても結果に差がない . またこれは $\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha$ の第 1 次近似に基づいているが、2 次以上の項を考慮しても最終結果に影響がない .

3. 超精度くりこみ法

最近筆者らが提案した「超精度くりこみ法」の手順は次のようになる [14], [15], [30] .

- (1) $W_\alpha = 1, \alpha = 1, \dots, N, \theta_0 = \mathbf{0}$ と置く .
- (2) 次の行列 M, N を計算する .

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \xi_\alpha \xi_\alpha^\top, \\ N &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha \left(V_0[\xi_\alpha] + 2S[\xi_\alpha e^\top] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha^2 \left((\xi_\alpha, M_5^- \xi_\alpha) V_0[\xi_\alpha] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2S[V_0[\xi_\alpha] M_5^- \xi_\alpha \xi_\alpha^\top] \right) \right) \end{aligned} \quad (9)$$

ただし e は次のベクトルである .

$$e = (1, 0, 1, 0, 0, 0)^\top \quad (10)$$

また $S[\cdot]$ は対象化作用素であり ($S[A] = (A + A^\top)/2$)、 M_5^- は行列 M のランク 5 の一般逆行列、すなわち M の最小固有値を 0 に置き換えた一般逆行列である .

- (3) 一般固有値問題

$$N\theta = \mu M\theta \quad (11)$$

を解いて、絶対値が最大の一般固有値 μ に対する単位一般固有ベクトル θ を計算する .

- (4) 符号を除いて $\theta \approx \theta_0$ なら θ を返して終了する . そうでなければ次のように更新してステップ (2) に戻る .

$$W_\alpha \leftarrow \frac{1}{(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)}, \quad \theta_0 \leftarrow \theta \quad (12)$$

実験によれば解は再投影誤差最小化（最尤推定）よりも精度が高く，最尤推定の超精度補正 [12], [28] とほぼ同等である [30]．しかし，ノイズが大きいと超精度補正のための最尤推定の反復が収束しないことがある．一方，超精度くりこみ法はノイズにロバストであり，現時点ではもっとも優れた手法であると言える．ただし，超精度くりこみ法は式 (2) を考慮しない方法であり，データのノイズが大きくなると楕円以外（実データでは式 (2) の左辺が厳密に 0 になることはないので双曲線）が計算されることがある．

4. Fitzgibbon らの方法

式 (2) が必ず満たされる楕円当てはめ法を初めて示したのは Fitzgibbon ら [3] である．これは式 (5) の左辺の二乗和（「代数的距離」）

$$J_{LS} = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha, \theta)^2 \quad (13)$$

を $\|\theta\| = 1$ ではなく，次の正規化条件のもとで最小にするものである．

$$AC - B^2 = 1 \quad (14)$$

具体的な手順は以下ようになる．

(1) 次の行列 M_{LS} , N_F を計算する．

$$M_{LS} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \xi_\alpha \xi_\alpha^\top, \quad N_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

(2) 一般固有値問題

$$N_F \theta = \mu M_{LS} \theta, \quad (16)$$

の最大一般固有値 μ に対する単位一般固有ベクトル θ を計算する．

これにより必ず楕円が得られるが，精度は低い．それは各データ ξ_α の誤差特性を表す式 (7) の共分散行列を考慮せず，一律に二乗和した式 (13) の代数的距離を最小にしているためである．

5. Szpak らの方法

最近 Szpak ら [26] は式 (7) の共分散行列を考慮して楕円のみを計算する方法を考案した．式 (2) の楕円の条件は式 (15) の行列 N_F を用いれば次のように書ける．

$$(\theta, N_F \theta) > 0 \quad (17)$$

そこで Szpak ら [26] は次の関数を最小にする θ を計算した

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\xi_\alpha, \theta)^2}{(\theta, V_0[\xi_\alpha]\theta)} + \frac{\lambda \|\theta\|^4}{(\theta, N_F \theta)^2} \quad (18)$$

右辺第 1 項は「サンプソン誤差」[4] と呼ばれるもので，再投影誤差の非常によい近似である． θ の空間は楕円から成る領域 $(\theta, N_F \theta) > 0$ と双曲線から成る領域 $(\theta, N_F \theta) < 0$ とに分離され，放物線から成る $(\theta, N_F \theta) = 0$ が境界面となる．式 (18) の右辺第 2 項は境界面で ∞ になるので，領域 $(\theta, N_F \theta) > 0$ 内の初期値から探索を行えば境界 $(\theta, N_F \theta) = 0$ を超えないというのが基本的な考え方である．これは一種の正則化であり，正則化定数 λ は楕円が求まる限り微小にとる．Szpak ら [26] は式 (18) の最小化にレーベンバーグ・マーカート法 [11] を用いている．

6. 提案方法

Szpak らの方法は正則化項を含んでいるが，基本的にはサンプソン誤差を最小化するものである．しかし，超精度くりこみ法のほうがサンプソン誤差最小化より精度が高いことが確認されているので [30]，超精度くりこみ法で楕円が当てはまれば（すなわち式 (2) が満たされれば）それを解とするのが合理的である．問題は式 (2) が満たされない場合である．これに対処するためにランダムサンプリングを用いる．すなわち点列からランダムに異なる 5 点を選び，それらを通る楕円を計算する．それが楕円であればそれを捨てて新しい 5 点を選ぶ．このようにして得られる楕円の中でサンプソン誤差を最小にするものを選ぶ．これは一種の RANSAC であり，具体的な手順は次の通りである．

- (1) 点列 (x_α, y_α) , $\alpha = 1, \dots, N$ に超精度くりこみ法によって楕円を当てはめ，そのパラメータ θ を計算する．
- (2) それが式 (17) を満たせば，それを解として終了する．
- (3) 超精度くりこみ法の反復が一定回数（実験では 100 回を上限とした）以内に収束しない，あるいは収束した解が式 (17) を満たさなければ， N 点から異なる 5 点をランダムに選び，それを通る楕円のパラメータ θ を計算する．
- (4) それが式 (17) を満たさなければその解を捨て，異なる 5 点を新しく選び直す．
- (5) 式 (17) を満たせば，そのサンプソン誤差（式 (18) の右辺第 1 項）を計算する．
- (6) これを多数回反復し，サンプソン誤差が最小になる解を返す（実験では 1000 回反復した）．

7. 実験

楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (19)$$

の弧長（始点は $(1, 0)$ ）の区間 $[s_0, s_1]$ を $N - 1$ 等分する

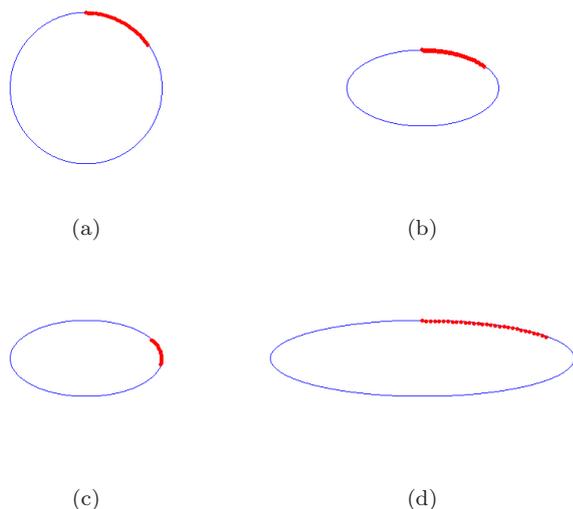


図 2 実験に用いた楕円上の点列．隣接点間の平均距離はそれぞれ 2.96, 3.31, 2.72, 5.72 .

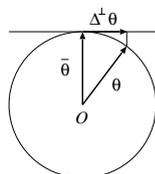


図 3 計算値 θ の真値 $\bar{\theta}$ に垂直な成分 $\Delta^\perp\theta$.

N 点 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, $\alpha = 1, \dots, N$ をとる．次の 4 通りを考える (図 2(a)~(d)) .

- (a) $a = 100, b = 100, N = 30, [s_0, s_1] = [0, s(55^\circ)]$
- (b) $a = 50, b = 100, N = 30, [s_0, s_1] = [0, s(55^\circ)]$
- (c) $a = 50, b = 100, N = 15, [s_0, s_1] = [s(60^\circ), s(100^\circ)]$
- (d) $a = 50, b = 200, N = 30, [s_0, s_1] = [0, s(55^\circ)]$

ただし $s(\phi)$ は始点から測った偏角 ϕ の点までの弧長である (実験では弧長は数値積分で評価した) . 隣接点間の平均距離は図 2 に記入したようになる . これらの点列の各点の x, y 座標に独立に期待値 0, 標準偏差 σ の正規分布に従う誤差を加えた点 (x_α, y_α) , $\alpha = 1, \dots, N$ に楕円を当てはめる .

計算値 θ と真値 $\bar{\theta}$ は共に単位ベクトルであるから, その誤差 $\Delta\theta$ を θ の $\bar{\theta}$ に垂直な成分 $\Delta^\perp\theta = P_{\bar{\theta}}\theta$ で測る (図 2(d)) . ただし $P_{\bar{\theta}} (\equiv I - \bar{\theta}\bar{\theta}^\top)$ は $\bar{\theta}$ に垂直な空間への射影行列である [10] . そしていろいろな σ に対して 10000 回の独立に試行し, 次の RMS(平方平均二乗) 誤差 D を計算する .

$$D = \sqrt{\frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \|\Delta^\perp\theta^{(a)}\|^2} \quad (20)$$

ここに $\theta^{(a)}$ は a 回目の試行の解である . 精度の理論限界を表す KCR 下界 [9], [13] であり, 次のように計算される .

$$D_{\text{KCR}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sqrt{\text{tr}M^{-1}} \quad (21)$$

図 4(a), 図 5(a), 図 6(a), 図 7(a) はそれぞれ図 2(a), (b), (c), (d) のデータに対する各手法の RMS 誤差をプロットしたものである . 横軸 ϵ は加えたノイズの標準偏差 σ の隣接点間の平均距離との比, すなわち隣接点間の平均距離を 1 とする尺度で測ったものであり, 仮に「相対ノイズレベル」と呼ぶ . 点線は式 (21) の KCR の下界である . 図 4(b), 図 5(b), 図 6(b), 図 7(b) は超精度くりこみ法^{*1}によって双曲線が当てはまる割合である . 図 5 でプロットが途切れているのは, それ以上のノイズでは超精度くりこみ法の反復が 100 回を超えることがあることを表す .

図 4(a), 図 5(a), 図 6(a), 図 7(a) から分かるように, Fitzgibbon らの方法は非常に精度が低い . ただし, 図 2(d) のような曲率が小さい部分に点列を選ぶと, 図 7(a) から分かるようにノイズが非常に大きいと, Fitzgibbon らの方法が超精度くりこみ法や Szpak らの方法^{*2}よりも精度が高くなることもある .

それに対して超精度くりこみ法は精度が高く, ノイズが小さいと RMS 誤差は KCR 下界に近い . しかし, 図 4(b), 図 5(b), 図 6(b), 図 7(b) の双曲線の割合が増えると KCR 下界から離れ始める . このとき図 5(a), 図 7(a) では誤差が大きくなっていくが, 図 6(a) では逆に KCR 下界を下回り, 図 4(a) でほぼ KCR 下界と一致している .

一方, Szpak らの方法や提案方法は楕円のみが返るように強制しているので, どの例でも超精度くりこみ方よりも精度が向上している . そして, 多くの場合 Szpak らの方法より提案方法のほうが精度が高い . この理由は, 提案方法に対しては, ϵ が大きいと真の位置から大きくずれるデータが現れ, それらを選ぶと双曲線が当てはまりやすいため, 楕円のみを選択すると自動的に真の位置に近いデータ点を選ばれるためと考えられる . Szpak らの方法でも双曲線を防ぐような当てはめが行われるので, 同様な効果が生じていると思われる . ただし, Szpak らの方法ではすべての特徴点を考慮しているのに対して, 提案方法では双曲線を生じるようなデータを無視しているため, より精度の向上に寄与したと考えられる . ただし, いろいろな実験によれば, 図 2(c) のような曲率が大きい部分に点列を選ぶと図 6(a) から分かるように, Szpak らの方法と提案方法の差がほとんどなくなる傾向にある .

図 8 は図 2(a), (b), (c), (d) のそれぞれについて, 超精度くりこみ法によって双曲線が当てはまる場合の各手法の当てはめの一例を示したものであり, 点線は真の形状である . 相対ノイズレベル ϵ はそれぞれ 0.169, 0.151, 0.092, 0.087 である . これから Fitzgibbon らの方法では扁平な楕円が当てはまりやすいことが分かる . 一方, Szpak らの方法では当てはまる双曲線に近い大きい楕円が当てはまっている . このように Fitzgibbon らの方法と Szpak らの方法は両極端で対照的であるのに対して, 提案手法ではその中

*1 <http://www.iim.cs.tut.ac.jp/sugaya/> のプログラムを利用

*2 <https://sites.google.com/site/szpakz/> のプログラムを利用

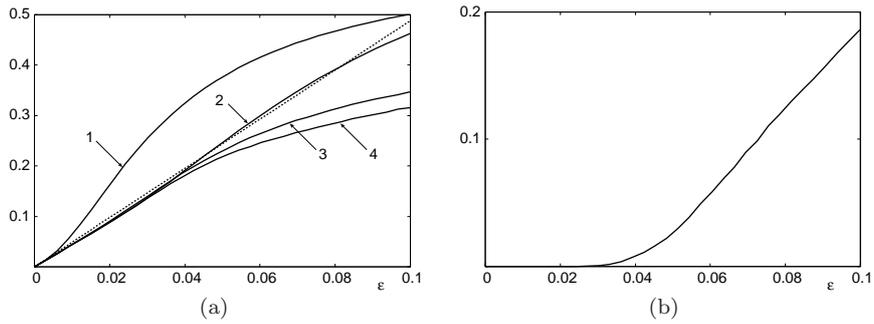


図 4 (a) 図 2(a) のデータに対する RMS 誤差．横軸は相対ノイズレベル ϵ . 1. Fitzgibbon ら, 2. 超精度くりこみ法, 3. Szpak ら, 4. 提案手法．点線は KCR 下界．(b) 超精度くりこみ法によって双曲線が計算される割合．

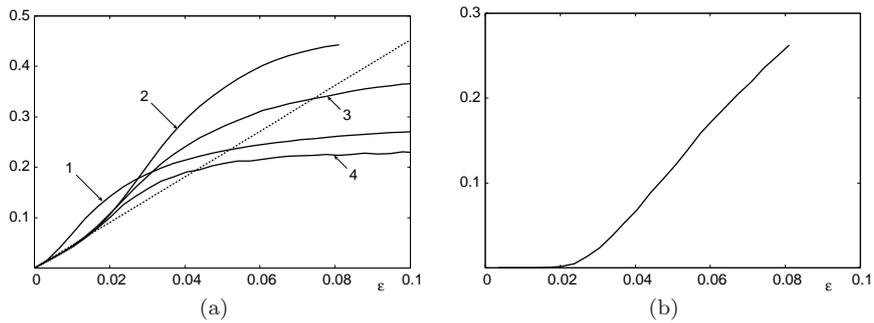


図 5 (a) 図 2(b) のデータに対する RMS 誤差．横軸は相対ノイズレベル ϵ . 1. Fitzgibbon ら, 2. 超精度くりこみ法, 3. Szpak ら, 4. 提案手法．点線は KCR 下界．(b) 超精度くりこみ法によって双曲線が計算される割合．途切れたプロットは, それ以上のノイズでは超精度くりこみ法の反復回数が上限越えることがあることを表す．

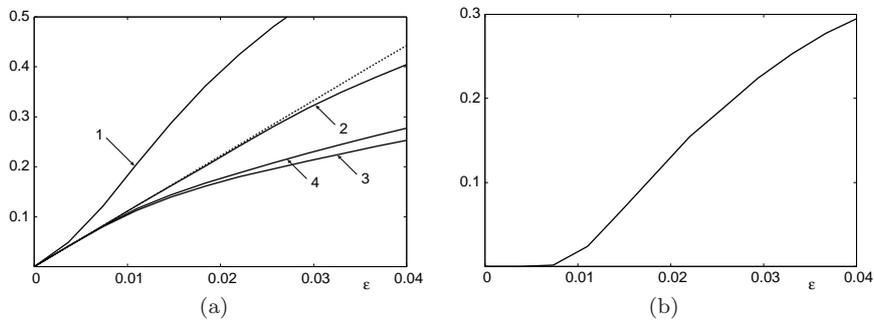


図 6 (a) 図 2(c) のデータに対する RMS 誤差．横軸は相対ノイズレベル ϵ . 1. Fitzgibbon ら, 2. 超精度くりこみ法, 3. Szpak ら, 4. 提案手法．点線は KCR 下界．(b) 超精度くりこみ法によって双曲線が計算される割合．

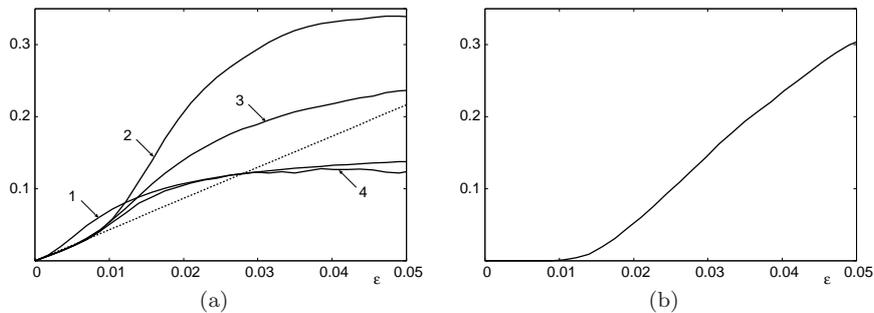


図 7 (a) 図 2(d) のデータに対する RMS 誤差．横軸は相対ノイズレベル ϵ . 1. Fitzgibbon ら, 2. 超精度くりこみ法, 3. Szpak ら, 4. 提案手法．点線は KCR 下界．(b) 超精度くりこみ法によって双曲線が計算される割合．

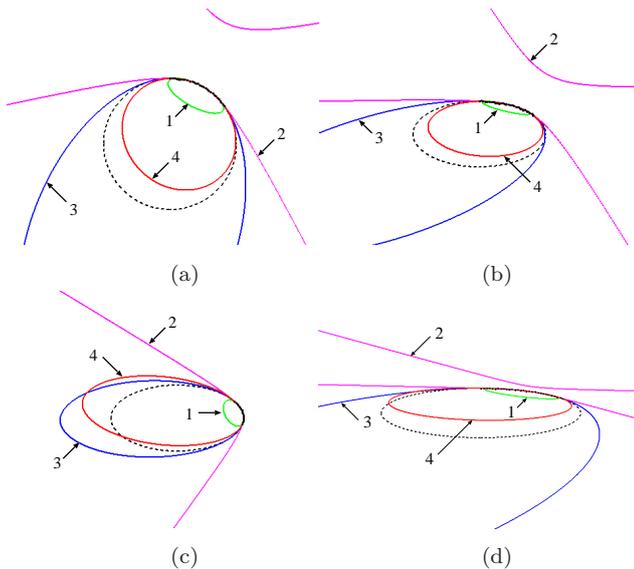


図 8 図 2 の各データに対して超精度くりこみ法によって双曲線が当てはまる場合の各手法の当てはめの一例。点線は真の形状。相対ノイズレベル ϵ はそれぞれ 0.169, 0.151, 0.092, 0.087。1. Fitzgibbon ら, 2. 超精度くりこみ法, 3. Szpak ら, 4. 提案手法。

間で、真の形状に近い楕円が当てはまっている。

図 9(a) は円形物体を含む画像から検出したエッジ画像であり、赤色で示した 200 個のエッジ点に楕円を当てはめた。図 9(b) はそれを原画像上に重ねて表示したものである。この例では超精度くりこみ法で楕円が当てはまる。Fitzgibbon らの方法はやや小さめの楕円が当てはまるが、提案方法（この場合は超精度くりこみ法に一致）も Szpak らの方法も真の楕円にかなり近い結果を与えている。

図 10 は別の例であり、図 10(a) の赤色で示した 140 個のエッジ点に楕円を当てはめた。図 10(b) はそれを原画像上に重ねて表示したものである。この例では超精度くりこみ法で双曲線が当てはまる。そして図 8 と同様に、Fitzgibbon らの方法では扁平な楕円が当てはまり、Szpak らの方法では当てはめた双曲線に近い大きな楕円が当てはまる。提案方法は真の形状に近いとはいえないが、Fitzgibbon らの方法と Szpak らの方法の中間の、これらの中では最も妥当な楕円であるといえる。この例は指定したエッジ点列が楕円を指定するのに十分な情報を持っていないので、そもそも楕円を当てはめる意味がないと思われるが、それでも提案手法ではある程度現実的な楕円が得られている。

8. まとめ

本論文では画像から抽出した点列に常に楕円が当てはまる新しい方法を提案した。現時点で最も優れた楕円当てはめ法は金谷ら [14], [15] の超精度くりこみ法であるが、ノイズが非常に大きいとき双曲線が当てはまることもある。提案手法はそのような場合にデータ点のランダムサンプリングによって点列に最も近い楕円を選ぶ方法である。これまでに楕円のみを当てはめる方法を提案したのは Fitzgibbon

ら [3] および Szpak ら [26] であるが、シミュレーション実験によって提案手法はそれらより精度が高いことを確認した。そして、Fitzgibbon らの方法では扁平な楕円が当てはまりやすく、Szpak らの方法では双曲線に近い楕円が当てはまりやすいのに対して、提案方法はその中間で、より真の形状に近い楕円が当てはまることを観察した。

現実の問題で楕円弧に双曲線が当てはまるのは、点数が少なく、かつ検出が不正確であるなどの、本来は楕円検出に失敗しているとみなすべき場合である。しかし、そのような状況でも、提案手法はかなり妥当な楕円を当てはめることができる。

謝辞: 本研究に関して有益な議論を頂いたオーストラリア・アデレード大学の Wojciech Chojnacki 博士、米国ミシシッピ大学の Ali Al-Sharadqah 博士に感謝します。本研究の一部は日本学術振興会科学研究費（挑戦的萌芽研究 24650086, 若手研究 B No. 23700202）の助成によった。

参考文献

- [1] 有馬利洋, 菅谷保之, エッジ点列の分割とモデル選択を用いた統合による楕円検出, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-166-5 (2009-3), 33-40.
- [2] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000), 1294-1303.
- [3] A. Fitzgibbon, M. Pilu, and R. B. Fisher, Direct least squares fitting of ellipses, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **21**-5 (1999-5), 476-480.
- [4] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004.
- [5] 岩元祐輝, ブラサンナ・ランガラヤン, 金谷 健一, 楕円当てはめの超精度最小二乗法, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-168-14 (2009-8/9), 1-8.
- [6] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [7] K. Kanatani, Renormalization for unbiased estimation, *Proc. 4th Int. Conf. Comput. Vis. (ICCV'93)*, May 1993, Berlin, Germany, pp. 599-606.
- [8] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994-2), 201-209.
- [9] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice* Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted, Dover, York, NY, U.S.A., 2005.
- [10] 金谷健一, 「形状CADと図形の数学」, 共立出版, 1998.
- [11] 金谷健一, 「これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—」, 共立出版, 2005.
- [12] K. Kanatani, Ellipse fitting with hyperaccuracy, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E89-D**-10 (2006-10), 2653-2660.
- [13] K. Kanatani, Statistical optimization for geometric fitting: Theoretical accuracy analysis and high order error analysis, *Int. J. Comput. Vis.*, **80**-2 (2008-11), 167-188.
- [14] 金谷健一, アリ・アルシャラドカー, ニコライ・チェルノフ, 菅谷保之, 超精度くりこみ法, 情報処理学会研究報告, 2012-CVIM-180-23 (2012-1), 1-8.
- [15] K. Kanatani, A. Al-Sharadqah, N. Chernov, and Y. Sugaya, Renormalization Returns: Hyper-renormalization and Its Applications, *Proc. 12th Euro. Conf. Comput.*

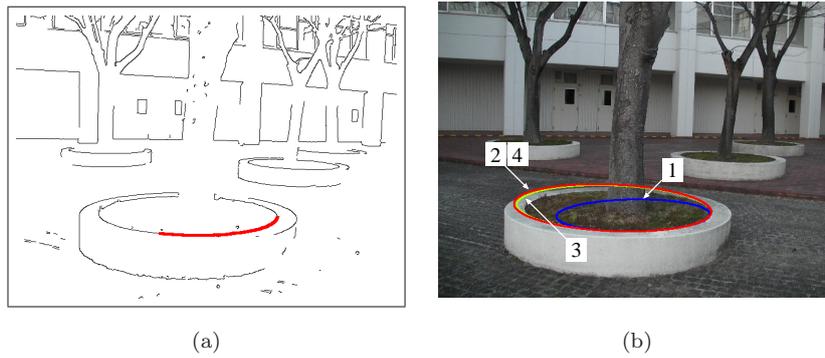


図 9 (a) 円形物体を含む画像から検出したエッジ画像と、楕円を当てはめたエッジ点 (200 個). (b) 当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したもの. 1. Fitzgibbon ら, 2. 超精度くりこみ法, 3. Szpak ら, 4. 提案手法.

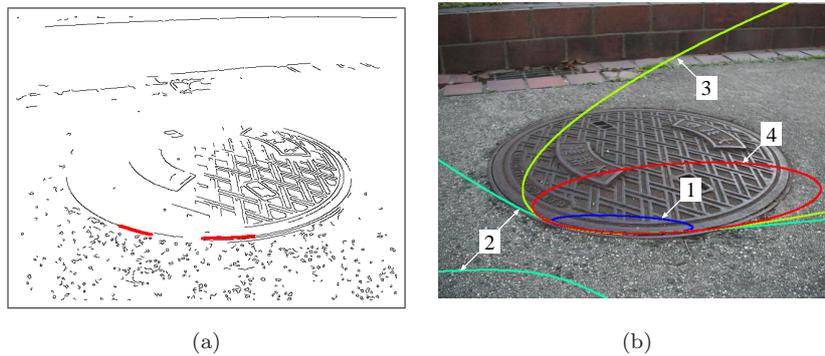


図 10 (a) 円形物体を含む画像から検出したエッジ画像と、楕円を当てはめたエッジ点 (140 個). (b) 当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したもの. 1. Fitzgibbon ら, 2. 超精度くりこみ法, 3. Szpak ら, 4. 提案手法.

Vis., October 2012, Florence, Italy, Vol. 3, pp. 385–398.

[16] K. Kanatani and P. Rangarajan, Hyper least squares fitting of circles and ellipses, *Comput. Stat. Data Anal.*, **55-6** (2011-6), 2197–2208.

[17] K. Kanatani, P. Rangarajan, Y. Sugaya and H. Niitsuma, HyperLS and its applications, *IPSJ Trans. Comput. Vis. Appl.*, **3** (2011-10), 80–94.

[18] K. Kanatani and Y. Sugaya, Performance evaluation of iterative geometric fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **52-2** (2007-10), 1208–1222.

[19] 金谷健一, 菅谷保之, 幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の統一的計算法, *情報処理学会論文誌: CVIM*, **2-1** (2009-3), 53–62.

[20] K. Kanatani and Y. Sugaya, Unified computation of strict maximum likelihood for geometric fitting, *J. Math. Imaging Vis.*, **38-1** (2010-9), 1–13.

[21] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vis.*, **37-2** (2000-6), 127–150.

[22] J. Matei and P. Meer, Estimation of nonlinear errors-in-variables models for computer vision applications, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **28-10** (2006-10), 1537–1552.

[23] 中川裕介, 金谷健一, 菅谷保之, 高ノイズレベルにおける最尤楕円当てはめ, *情報処理学会研究報告*, 2008-CVIM-162-10 (2008-3), 53–60.

[24] 岡部光生, 金谷健一, 太田直哉, 楕円成長法による円形物体の自動検出, *電子情報通信学会論文誌 D-II*, **J85-D-II-12** (2002-12), 1823–1831.

[25] 菅谷保之, 金谷健一, [講座] 画像の三次元理解のための最適化計算 [I]–[IV] *電子情報通信学会会誌*, **92-3**, 4, 6, 7 (2009-3, 4, 6, 7), 229–233, 301–306, 463–468, 573–578.

[26] Z. L. Szpak, W. Chojnacki, and A. van den Hengel, Guaranteed ellipse fitting with Sampson distance, *Proc. 12th Euro. Conf. Comput. Vis.*, October 2012, Florence, Italy, Vol. 5, pp. 87–100.

[27] G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13-11** (1991-11), 1115–1138.

[28] 山田純平, 金谷健一, 超精度の楕円当てはめ, *情報処理学会研究報告*, 2005-CVIM-151-15 (2005-11), 197–114.

[29] 山田 純平, 金谷 健一, 菅谷 保之, 楕円当てはめの高精度計算法とその性能比較, *情報処理学会研究報告*, 2006-CVIM-154-36 (2006-5), 339–346.

[30] 横田健太, 村田和洋, 菅谷保之, 金谷健一, 楕円当てはめの精度比較: 最小二乗法から超精度くりこみ法まで, *情報処理学会研究報告*, 2012-CVIM-180-26 (2012-1), 1–8.