因子分解を用いない因子分解法: 平行投影から透視変換へ

金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

376-8515 桐生市天神町 1–5–1 群馬大学工学部情報工学科

Tel: (0277)30-1842 Fax: (0277)30-1844, 1801 kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

本論文では画像列から 3 次元復元を行う Tomasi-Kanade の因子分解法において行列の因子分解は本質的な役割を果たしていないことを示す。そして因子分解を用いない手順を与えることによって、因子分解法の本質はすべてのデータを平均化して誤差を分散させることにあることを示す。このことは撮像が平行投影か透視変換かには依存しない。この観点から因子分解法は透視変換に自然に拡張されることを示す。

キーワード: 因子分解法, 3 次元運動解析, 動画像, 平行投影, 透視変換, ユークリッド復元

Factorization without Factorization: From Orthographic to Perspective

Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan

Tel: +81(277)30-1842 Fax: +81(277)30-1844, 1801 kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

We point out that matrix factorization does not play an essential role in reconstructing 3-D from a sequence of images by the factorization method of Tomasi and Kanade. We describe an alternative procedure that does not involve matrix factorization, revealing that the essence of the method is "averaging" the entire data to disperse the noise, which is independent of whether the projection is orthographic or perspective. We show that in this new light the factorization method can be extended to perspective projection straightforwardly.

Key words: factorization, structure from motion, motion images, orthographic projection, perspective projection, Euclidean reconstruction

1. 序論

Tomasi と Kanade [14] によって考案された因子分解法はその単純さのため、画像列から 3 次元復元を行う最も基本的な手法の一つとみなされている [3, 8, 9, 10, 11, 12]。そして、その方法の本質は、運動パラメータと形状パラメータが単にデータから成る行列を “因子分解” するだけで分離できることにあると理解されている。この因数分解は特異値分解によって容易に計算できる。このため、この計算の単純さの代償として撮像を平行投影として近似するのは止むを得ないことと考えられている。

本論文の目的は行列の因子分解は因子分解法において本質的な役割を果たしていないことを示すことにある。画像列が与えられれば、原理的にはその中から 2 画像あるいは 3 画像を選んで (何らかの不定性を含んで) 3 次元が復元ができる。したがって、さまざまな選び方からさまざまな解が得られる。実際的には何らかの平均化手法によってそれらを平均化してロバストな解を安定に得ることが望ましい。因子分解法はこれを組織的に行う方法であり、特異値分解による行列に因子分解はその一ステップの計算の一手法に過ぎない。

これまで多くの研究者が因子分解法において撮像は平行投影であるという制約を除こうと試みたが [2, 4, 13, 15, 16, 17]、どの研究も “行列の因子分解” によって 3 次元復元を行うことを前提にしている。しかし、実際には透視変換画像に因子分解法を適用するのに行列の因子分解は必要ない。

本論文ではまず行列の因子分解を用いない因子分解法のアルゴリズムを示し、次にそれを透視変換に拡張する。このアルゴリズムは次の特徴をもつ。

- カメラの姿勢を定めるものは特徴点の画像座標そのものではなく、それらの平均 (相互モーメント) である。
- 計算は固有値解析と線形計算のみであり、すべてが解析的に閉じた式で表せ、反復や探索を必要としない。
- 特異値分解による行列の因子分解は用いない。

このアルゴリズムは導出は異なるが数学的には Tomasi-Kanade 法と等価である。よく知られているように、特異値分解は固有値解析と線形計算に置き換えることができる (例えば [5, 7] 参照)。本論文のアルゴリズムはこの置き換えを Tomasi-Kanade に適用したものにほかならない。しかし、重要なことは、このような置き換えによって Tomasi-Kanade 法では明らかではなかった世界座標系の役割を明らかになり、透視変換への拡張が容易になることである。

2. 基礎原理

2.1 世界座標系

シーン中に N 個の特徴点があるとし、それらのある世界座標系に関する位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_\alpha,\ \alpha = 1,\ ...,\ N$ とする。世界座標系は任意にとれる。その原点を特徴点 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$ の重心にとれば次の式が満たされる。

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

しかし、座標軸の向きは任意である。これを特徴点 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$ の主軸に選べば、対応する主値を $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ とすると次の式が満たされる ($\top$ は転置)。

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha^\top = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

このような座標系が常に選べることは線形代数学においてよく知られている [6]。以下では特徴点 $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$ は “共面” ではない (同一平面上にはない) と仮定する。このとき $\sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0,\ \sigma_3 > 0$ である。座標軸の順序は任意であるから $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3\ (> 0)$ と選ぶ。それでも二つ (または三つの) 主値が一致すると主軸に不定性が生じる。また各主軸の方向は任意である。しかし、その内の一つを適当に選べばよい。なぜなら、最終的に求めるものは物体形状とカメラの相対的な位置関係であり、これらは世界座標系の取り方には依存しないからである。

2.2 画像特徴

N 個の特徴点を M 方向から観測した画像座標を $(x_{\kappa\alpha}, y_{\kappa\alpha}),\ \kappa = 1,\ ...,\ M,\ \alpha = 1,\ ...,\ N$ とする。κ 番目のカメラ座標系の世界座標系に関する原点とその正規直交基底をそれぞれ $\boldsymbol{t}_\kappa,\ \{\boldsymbol{i}_\kappa,\ \boldsymbol{j}_\kappa,\ \boldsymbol{k}_\kappa\}$ とする。平行投影のもとでは次の関係が成り立つ。

$$x_{\kappa\alpha} = (\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa),\quad y_{\kappa\alpha} = (\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa) \tag{3}$$

ただし $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ はベクトル $\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{b}$ の内積である。画像座標 $\{(x_{\kappa\alpha}, y_{\kappa\alpha})\}$ の重心を $(\bar{x}_\kappa, \bar{y}_\kappa)$ とする。

$$\begin{aligned} \bar{x}_\kappa &= \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} x_{\kappa\alpha} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa) \\ &= (\boldsymbol{i}_\kappa, \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa) = -(\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \end{aligned} \tag{4}$$

同様に $\bar{y}_\kappa = -(\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa)$ である。これらは投影位置の重心は重心の投影位置に等しいというよく知られた事実を表している (ただし透視変換では成立しない)。画像座標 $(x_{\kappa\alpha}, y_{\kappa\alpha})$ の重心に相対的な位置を $(\tilde{x}_{\kappa\alpha}, \tilde{y}_{\kappa\alpha})$ とすると次の式が成り立つ。

$$\tilde{x}_{\kappa\alpha} = x_{\kappa\alpha} - \bar{x}_\kappa = (\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa) + (\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) = (\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha) \tag{5}$$

同様に $\tilde{y}_{\kappa\alpha} = (\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha)$ である。これらは次の形にまとめることができる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{\kappa\alpha} \\ \tilde{y}_{\kappa\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_\kappa^\top \\ \boldsymbol{j}_\kappa^\top \end{pmatrix} \boldsymbol{r}_\alpha \tag{6}$$

2.3 基礎方程式

次の 2×2 行列を定義する。

$$C_{\kappa\kappa'} = \sum_{\alpha=1}^{N} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{\kappa\alpha}\tilde{x}_{\kappa'\alpha} & \tilde{x}_{\kappa\alpha}\tilde{y}_{\kappa'\alpha} \\ \tilde{y}_{\kappa\alpha}\tilde{x}_{\kappa'\alpha} & \tilde{y}_{\kappa\alpha}\tilde{y}_{\kappa'\alpha} \end{pmatrix} \tag{7}$$

次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} C_{\kappa\kappa'} &= \sum_{\alpha=1}^{N} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{\kappa\alpha} \\ \tilde{y}_{\kappa'\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{\kappa'\alpha} \\ \tilde{y}_{\kappa'\alpha} \end{pmatrix}^{\top} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_{\kappa}^{\top} \\ \boldsymbol{j}_{\kappa}^{\top} \end{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{r}_{\alpha}\boldsymbol{r}_{\alpha}^{\top} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_{\kappa'} & \boldsymbol{j}_{\kappa'} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_{\kappa}^{\top} \\ \boldsymbol{j}_{\kappa}^{\top} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_{\kappa'} & \boldsymbol{j}_{\kappa'} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8}$$

次の $(2M) \times (2M)$ 相互モーメント行列を定義する。

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{M1} & C_{M2} & \cdots & C_{MM} \end{pmatrix} \tag{9}$$

次の $3 \times (2M)$ 運動行列を定義する。

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{j}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \cdots & \boldsymbol{j}_M \end{pmatrix} \tag{10}$$

次の 3×3 形状行列 (の標準形) を定義する。

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

すると次の基礎方程式が成り立つ。

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{M} \tag{12}$$

3. 計算の手順: 平行投影の場合

3.1 手順の概要

まずデータに誤差は存在しないとする。式 (12) より相互モーメント行列 $\boldsymbol{C}$ のランクは高々 3 である。式 (8), (9) より $\boldsymbol{C}$ は半正値対称行列である。したがってその固有値はすべて非負である。その大きい固有値を λ_1, λ_2, λ_3、対応する $(2M$ 次元) 単位固有ベクトルを $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$ とする。すると $\boldsymbol{C}$ は次のように書ける。

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^{\top}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$\boldsymbol{P}$ は行 $\boldsymbol{c}_1^{\top}$, $\boldsymbol{c}_2^{\top}$, $\boldsymbol{c}_3^{\top}$ から成る $3 \times (2M)$ 行列である。もし

$$\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{14}$$

となる 3×3 行列 $\boldsymbol{A}$ があれば式 (13) は次のように書ける。

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) \tag{15}$$

ゆえに、行列 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ の列が二つずつ直交する単位ベクトルの組から成っているなら運動行列は $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ である。この条件は計量条件と呼ばれている [14]。

3.2 手順の詳細

行列 $\boldsymbol{A}$ が式 (14) を満たす必要十分条件は次式である。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \tag{16}$$

ここに $\boldsymbol{U}$ は任意の 3×3 直交行列であり、任意の実数 x に対して対角行列の x 乗は (もし存在すれば) 各対角要素の x 乗から成る対角行列であると約束する。主値 σ_1, σ_2, σ_3 は正と仮定しているから $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}$ は存在する。また固有値 λ_1, λ_2, λ_3 は非負であるから $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$ も存在する。

行列 $\boldsymbol{P}$ の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{p}_i$ とし、次のように書く。

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \cdots & \boldsymbol{p}_{2M} \end{pmatrix} \tag{17}$$

また

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{p}_i, \quad i = 1, ..., 2M \tag{18}$$

と定義し、次のように書く。

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}}_1 & \tilde{\boldsymbol{p}}_2 & \tilde{\boldsymbol{p}}_3 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{p}}_{2M} \end{pmatrix} \tag{19}$$

すると条件 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ は次のように書ける。

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{P}} \tag{20}$$

行列 $\boldsymbol{M}$ の第 i 列ベクトルは $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{p}}_i$ であるから、計量条件は次のように書ける ($i = 1, ..., 2M$, $\kappa = 1, ..., M$)。

$$\|\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{p}}_i\|^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{p}}_{2\kappa-1}, \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{p}}_{2\kappa}) = 0 \tag{21}$$

まとめると次のようになる ($i, j = 1, 2$, $\kappa = 1, ..., M$)。

$$(\tilde{\boldsymbol{p}}_{2(\kappa-1)+i}, \boldsymbol{U}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{p}}_{2(\kappa-1)+j}) = \delta_{ij} \tag{22}$$

ただし δ_{ij} はクロネッカのデルタである。上式より 3×3 行列

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{U}^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U} \tag{23}$$

を未知数とみなしてよい。$\boldsymbol{U}$ は任意の直交行列であり、$\boldsymbol{\Sigma}$ は正の対角要素から成る任意の対角行列であるから、$\boldsymbol{Q}$ は任意の正値対称行列である。$\boldsymbol{U}$ は行列 $\boldsymbol{Q}$ の単位固有ベクトルを行とする行列であり、$\boldsymbol{\Sigma}$ は対応する固有値の逆数を対角要素とする対角行列である。式 (22) は対称行列 $\boldsymbol{Q}$ の 6 個の独立な要素に関する $3M$ 個の線形方程式である。

4. アルゴリズム: 平行投影の場合

4.1 アルゴリズムのまとめ

1. 観測した特徴点の画像座標 $(x_{\kappa\alpha}, y_{\kappa\alpha})$ から式 (9) の $(2M) \times (2M)$ 相互モーメント行列 $\boldsymbol{C}$ を計算する。
2. その大きい 3 個の固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ と対応する ($2M$ 次元) 単位固有ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ を計算する。
3. 行 $\boldsymbol{c}_1^\top,\ \boldsymbol{c}_2^\top,\ \boldsymbol{c}_3^\top$ から成る $3 \times (2M)$ 行列 $\boldsymbol{P}$ の第 i 列を $\boldsymbol{p}_i$ とする。
4. $i = 1, ..., 2M$ に対して次の計算を行う。

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_i = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ & & \sqrt{\lambda_3} \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_i \tag{24}$$

5. 次の $3M$ 個の連立 1 次方程式 $(i, j = 1, 2, \kappa = 1, ..., M)$ の解 $\boldsymbol{Q}$ を求める。

$$(\tilde{\boldsymbol{p}}_{2(\kappa-1)+i}, \boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{p}}_{2(\kappa-1)+j}) = \delta_{ij} \tag{25}$$

6. 行列 $\boldsymbol{Q}$ の固有値 $s_1,\ s_2,\ s_3$ と対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を計算する。
7. カメラ座標系の基底ベクトルを次のように得る。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_\kappa &= \begin{pmatrix} \sqrt{s_1}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{p}_{2\kappa-1}) \\ \sqrt{s_2}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{p}_{2\kappa-1}) \\ \sqrt{s_3}(\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{p}_{2\kappa-1}) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{j}_\kappa &= \begin{pmatrix} \sqrt{s_1}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{p}_{2\kappa}) \\ \sqrt{s_2}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{p}_{2\kappa}) \\ \sqrt{s_3}(\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{p}_{2\kappa}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

4.2 解の一意性

単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ は向きが不定である。このとは先に指摘したように、世界座標軸の方向が不定であることに対応している。この不定性を解消するにはすべての量を第 1 カメラ座標系に関して表せばよい。まず

$$\boldsymbol{k}_\kappa = \boldsymbol{i}_\kappa \times \boldsymbol{j}_\kappa,\ \ \kappa = 1, ..., M \tag{27}$$

を定義する。第 κ カメラ座標系の基底の第 1 カメラ座標系に関する表現は次のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}'_\kappa &= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{i}_1) \\ (\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{j}_1) \\ (\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{j}'_\kappa = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{i}_1) \\ (\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{j}_1) \\ (\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{k}'_\kappa &= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{i}_1) \\ (\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{j}_1) \\ (\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{28}$$

4.3 形状の計算

特徴点の位置 $\boldsymbol{r}_\alpha$ は次の線形方程式を解いて得られる。

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}_\alpha = \begin{pmatrix} x_{1\alpha} \\ y_{1\alpha} \\ x_{2\alpha} \\ y_{2\alpha} \\ \vdots \\ y_{M\alpha} \end{pmatrix},\ \ \alpha = 1, ..., N \tag{29}$$

第 1 カメラ座標系に関する表現は次のようになる。

$$\boldsymbol{r}'_\alpha = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{i}_1) \\ (\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{j}_1) \\ (\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix},\ \ \alpha = 1, ..., N \tag{30}$$

4.4 誤差への対処

データに誤差があれば基礎方程式 (12) は厳密には成立しない。ロバストな解を求める最も簡単な方法は最小二乗法を適用することである。

- 連立方程式 (25) を最小二乗法によって解く (付録 A)。
- 式 (26) で計算した基底ベクトル $\{\boldsymbol{i}_\kappa,\ \boldsymbol{j}_\kappa\}$ が厳密に正規直交系になる最小補正を行う (付録 B)。
- 線形方程式 (29) を最小二乗法によって解く (付録 A)。

誤差があれば相互モーメント行列 $\boldsymbol{C}$ の固有値は一般にすべて正である。上記のステップ 2 で大きい 3 個の固有値を選ぶと、これが最小二乗の意味で最適解となっている。

方程式 (29) を最小二乗法で解くには正規方程式と呼ばれる線形方程式を解けばよいが、これは方程式を M 画像に渡って平均することに相当している (付録 A)。したがって、計算は次のことを意味する。

1. まず特徴点の画像座標を式 (7) の相互モーメントの形ですべての特徴点に関して “平均” してカメラの姿勢を計算する。
2. その解を用い、各特徴点の位置をすべての画像に関する観測値の “平均” から計算する。

これが Tomasi-Kanade 法の本質であり、特異値分解による行列の因子分解は一手段に過ぎない。

4.5 種々の拡張

因子分解法に対してこれまで提案された種々の拡張は本方法にもそのまま適用できる。例えば、計量条件 (25) を修正すれば平行投影を “スケール平行投影” や “パラ透視変換” にゆるめることができる [8, 11]。この近似を反復して透視変換を近似することもできる [1, 16]。

一方、各特徴点に画像の濃淡勾配やエッジ強度から推定した信頼性の重み w_α を付加してもよい [8]。それには式 (4), (7) の $\sum_{\alpha=1}^{N}$ を $\sum_{\alpha=1}^{N} w_\alpha$ に置き換えればよい。これに伴って世界座標系の定義も変更し、原点と座標軸をそれぞれ特徴

点の “重み付き重心” と “重み付き主軸” に選ぶ。このとき式 (1), (2) は $\sum_{\alpha=1}^{N}$ を $\sum_{\alpha=1}^{N} w_\alpha$ に読み変えれば成立し、σ_1, σ_2, σ_3 は重み付き特徴点の主値と解釈される。

このように考えると Tomasi-Kanade 法では明らかではなかった世界座標系の果たす役割が明らかになる。またカメラの姿勢の計算に必要なのは特徴点の個々の座標ではなくその相互モーメントであることも明らかになる。この考察が因子分解法を透視変換に拡張する際の基本となる。

5. 透視変換

5.1 奥行比

ここではカメラは既に校正済みであると仮定し、完全なユークリッド復元を固有値解析と線形計算のみを用いて記述する。未校正カメラによる射影復元に拡張するのは容易であり、文献 [2, 3, 4, 13, 15] の定式化を応用すればよい。カメラが校正済みであれば、焦点距離を長さの単位をとり、光軸が画像座標系の原点に対応するカメラ座標系をとることができる。このとき透視変換によって画像座標は世界座標と次のように関係づけられる。

$$x_{\kappa\alpha} = \frac{(\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa)}{(\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa)}, \quad y_{\kappa\alpha} = \frac{(\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa)}{(\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa)} \tag{31}$$

ここに

$$Z_{\kappa\alpha} = (\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa) \tag{32}$$

は第 α 特徴点の第 κ カメラ座標系から測った奥行きである。式 (31) は次のように書き直せる (透視変換の場合は画像座標の重心をとって並進 $\boldsymbol{t}_\kappa$ を消去することはできない)。

$$Z_{\kappa\alpha} \begin{pmatrix} x_{\kappa\alpha} \\ y_{\kappa\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa) \\ (\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa) \\ (\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}_\kappa) \end{pmatrix} \tag{33}$$

平行投影の場合と異なるのは未知の奥行き $Z_{\kappa\alpha}$ が含まれていることである。これが因子分解法を透視変換に拡張する最大の障害と考えられていた。しかし、これは行列の因子分解によって 3 次元復元を行おうと考えるからである。そうではなく、因子分解法を “平均操作による解の安定化” とみなすなら、3 次元復元自体は別の手段をとればよい。例えば画像列が与えられたとき、その中から 2 画像を選べば、その選んだ画像のカメラ座標系に相対的に定数倍を除いて 3 次元復元ができる。したがって、両方のカメラからの奥行きの比を計算することができる [5, 7]。そこで第 1 画像と第 κ 画像を比較し、奥行き比 $Z_{\kappa\alpha}/Z_{1\alpha}$, $\kappa = 2, ..., M$, $\alpha = 1, ..., N$ を計算する。そして式 (33) を次のように書く。

$$\frac{Z_{\kappa\alpha}}{Z_{1\alpha}} \begin{pmatrix} x_{\kappa\alpha} \\ y_{\kappa\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{1\alpha}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_\kappa^\top & -(\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \\ \boldsymbol{j}_\kappa^\top & -(\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \\ \boldsymbol{k}_\kappa^\top & -(\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

これに伴って世界座標系の定義を変更し、原点と座標軸をそれぞれ各特徴点に $1/Z_{1\alpha}^2$ の重みを付加した重心および主軸にとる。したがって次の関係が成立する。

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\boldsymbol{r}_\alpha}{Z_{1\alpha}^2} = \boldsymbol{0}, \quad \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha^\top}{Z_{1\alpha}^2} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{35}$$

ここに σ_1, σ_2, σ_3 は重み付き特徴点の主値である。σ_4 を次のように定義する。

$$\sigma_4 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{Z_{1\alpha}^2} \tag{36}$$

5.2 基礎方程式

次の 2×2 行列を定義する。

$$C_{\kappa\kappa'} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{Z_{\kappa\alpha}}{Z_{1\alpha}}\right)\left(\frac{Z_{\kappa'\alpha}}{Z_{1\alpha}}\right) \begin{pmatrix} x_{\kappa\alpha}u_{\kappa'\alpha} & x_{\kappa\alpha}y_{\kappa'\alpha} & x_{\kappa\alpha} \\ y_{\kappa\alpha}x_{\kappa'\alpha} & y_{\kappa\alpha}y_{\kappa'\alpha} & y_{\kappa\alpha} \\ x_{\kappa'\alpha} & y_{\kappa'\alpha} & 1 \end{pmatrix} \tag{37}$$

次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} C_{\kappa\kappa'} &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{Z_{\kappa\alpha}}{Z_{1\alpha}} \begin{pmatrix} x_{\kappa\alpha} \\ y_{\kappa'\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \frac{Z_{\kappa'\alpha}}{Z_{1\alpha}} \begin{pmatrix} x_{\kappa'\alpha} \\ y_{\kappa'\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}^\top \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{Z_{1\alpha}^2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_\kappa^\top & -(\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \\ \boldsymbol{j}_\kappa^\top & -(\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \\ \boldsymbol{k}_\kappa^\top & -(\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha^\top & \boldsymbol{r}_\alpha \\ \boldsymbol{r}_\alpha^\top & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_\kappa & \boldsymbol{j}_\kappa & \boldsymbol{k}_\kappa \\ -(\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) & -(\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) & -(\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_\kappa^\top & -(\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \\ \boldsymbol{j}_\kappa^\top & -(\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \\ \boldsymbol{k}_\kappa^\top & -(\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \sigma_3 & \\ & & & \sigma_4 \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_\kappa & \boldsymbol{j}_\kappa & \boldsymbol{k}_\kappa \\ -(\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) & -(\boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) & -(\boldsymbol{k}_\kappa, \boldsymbol{t}_\kappa) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{38}$$

次の $(3M) \times (3M)$ 相互モーメント行列を定義する。

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{M1} & C_{M2} & \cdots & C_{MM} \end{pmatrix} \tag{39}$$

次の $3 \times (3M)$ 運動行列を定義する。

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{j}_1 & \boldsymbol{k}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{j}_2 & \cdots & \boldsymbol{k}_M \\ -(\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{t}_1) & -(\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{t}_1) & -(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{t}_1) & -(\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{t}_2) & -(\boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{t}_2) & \cdots & -(\boldsymbol{k}_M, \boldsymbol{t}_M) \end{pmatrix} \tag{40}$$

次の 4×4 形状行列 (の標準形) を次のように定義する。

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \sigma_3 & \\ & & & \sigma_4 \end{pmatrix} \tag{41}$$

すると次の基礎方程式が成り立つ。

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{M}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{M} \tag{42}$$

6. 計算の手順: 透視変換の場合

6.1 手順の概要

平行投影の場合と同様にまずデータに誤差は存在しないとする。式 (42) より相互モーメント行列 $\boldsymbol{C}$ のランクは高々 4 である。式 (38), (39) より $\boldsymbol{C}$ は半正値対称行列である。したがってその固有値はすべて非負である。その大きい固有値を λ_1, λ_2, λ_3, λ_4、対応する ($3M$ 次元) 単位固有ベクトルを $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$, $\boldsymbol{c}_4$ とする。すると $\boldsymbol{C}$ は次のように書ける。

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix} \tag{43}$$

$\boldsymbol{P}$ は行が $\boldsymbol{c}_1^\top$, $\boldsymbol{c}_2^\top$, $\boldsymbol{c}_3^\top$, $\boldsymbol{c}_4^\top$ の $4 \times (3M)$ 行列である。もし

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{44}$$

となる 3×3 行列 $\boldsymbol{A}$ があれば式 (43) は次のように書ける。

$$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^\top \boldsymbol{\Sigma} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) \tag{45}$$

ゆえに、行列 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ の $3 \times (3M)$ 上部分行列の列が三つずつ直交する単位ベクトルの組から成っているなら運動行列は $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ である。これが透視変換の場合の計量条件である。

6.2 手順の詳細

平行投影の場合と同様に、行列 $\boldsymbol{A}$ が式 (44) を満たす必要十分条件は次式である。

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \tag{46}$$

ここに $\boldsymbol{U}$ は任意の 4×4 直交行列である。行列 $\boldsymbol{P}$ の第 i 列ベクトルを $\boldsymbol{p}_i$ とし、次のように書く。

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \cdots & \boldsymbol{p}_{3M} \end{pmatrix} \tag{47}$$

また 4 次元ベクトル $\tilde{\boldsymbol{p}}_i$ を

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{\Lambda}^{1/2} \boldsymbol{p}_i, \quad i = 1, ..., 3M \tag{48}$$

と定義し、次のように書く。

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{p}}_1 & \tilde{\boldsymbol{p}}_2 & \tilde{\boldsymbol{p}}_3 & \cdots & \tilde{\boldsymbol{p}}_{3M} \end{pmatrix} \tag{49}$$

すると条件 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ は次のように書ける。

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \boldsymbol{U} \tilde{\boldsymbol{P}} \tag{50}$$

行列 $\boldsymbol{M}$ の第 i 列ベクトルの上 3 要素は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{\sigma_1} & & & 0 \\ & 1/\sqrt{\sigma_2} & & 0 \\ & & 1/\sqrt{\sigma_3} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{U} \tilde{\boldsymbol{p}}_i \tag{51}$$

ゆえに計量条件は次式となる ($i, j = 1, 2, 3$, $\kappa = 1, ..., M$)。

$$(\boldsymbol{p}_{3(\kappa-1)+i}, \boldsymbol{U}^\top \mathrm{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_3}, 0) \boldsymbol{U} \boldsymbol{p}_{3(\kappa-1)+j}) = \delta_{ij} \tag{52}$$

ただし $\mathrm{diag}(\cdots)$ は $\cdots$ を順に対角要素とする対角行列である。上式より次の 4×4 行列を未知数とみなしてよい。

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{U}^\top \mathrm{diag}(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \frac{1}{\sigma_3}, 0) \boldsymbol{U} \tag{53}$$

$\boldsymbol{U}$ は任意の直交行列であり、 σ_1, σ_2, σ_3 は任意の正数であるから、 $\boldsymbol{Q}$ は任意のランク 3 の半正値対称行列である。 $\boldsymbol{U}$ は行列 $\boldsymbol{Q}$ の単位固有ベクトルを行とする行列であり、 σ_1, σ_2, σ_3 は対応する固有値の逆数である。式 (52) は対称行列 $\boldsymbol{Q}$ の 10 個の独立な要素に関する $6M$ 個の線形方程式である。

7. アルゴリズム: 透視変換の場合

7.1 アルゴリズムのまとめ

1. 第 1 画像と第 κ 画像とを比較し、 2 画像からの 3 次元解析アルゴリズムにより奥行き比 $Z_{1\alpha}/Z_{\kappa\alpha}$ を計算する。これを $\kappa = 2, ..., M$ に渡って行う。
2. 観測した特徴点の画像座標 $(x_{\kappa\alpha}, y_{\kappa\alpha})$ から式 (39) の $(3M) \times (3M)$ 相互モーメント行列 $\boldsymbol{C}$ を計算する。
3. その大きい 4 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ と対応する ($3M$ 次元) 単位固有ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3, \boldsymbol{c}_4$ を計算する。
4. 行 $\boldsymbol{c}_1^\top$, $\boldsymbol{c}_2^\top$, $\boldsymbol{c}_3^\top$, $\boldsymbol{c}_4^\top$ から成る $4 \times (3M)$ 行列 $\boldsymbol{P}$ の第 i 列を $\boldsymbol{p}_i$ とする。
5. $i = 1, ..., 3M$ に対して次の計算を行う。

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_i = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \sqrt{\lambda_3} & \\ & & & \sqrt{\lambda_4} \end{pmatrix} \boldsymbol{p}_i \tag{54}$$

6. 次の $6M$ 個の連立 1 次方程式 ($i, j = 1, 2, 3$, $\kappa = 1, ..., M$) の解 $\boldsymbol{Q}$ を求める。

$$(\tilde{\boldsymbol{p}}_{3(\kappa-1)+i}, \boldsymbol{Q} \tilde{\boldsymbol{p}}_{3(\kappa-1)+j}) = \delta_{ij} \tag{55}$$

7. 行列 $\boldsymbol{Q}$ の大きい 3 個の固有値 s_1, s_2, s_3 と対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ を計算する。

8. カメラ座標系の基底ベクトルを次のように得る。

$$\boldsymbol{i}_\kappa = \begin{pmatrix} \sqrt{s_1}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{p}_{3\kappa-2}) \\ \sqrt{s_2}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{p}_{3\kappa-2}) \\ \sqrt{s_3}(\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{p}_{3\kappa-2}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{j}_\kappa = \begin{pmatrix} \sqrt{s_1}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{p}_{3\kappa-1}) \\ \sqrt{s_2}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{p}_{3\kappa-1}) \\ \sqrt{s_3}(\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{p}_{3\kappa-1}) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_\kappa = \begin{pmatrix} \sqrt{s_1}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{p}_{3\kappa}) \\ \sqrt{s_2}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{p}_{3\kappa}) \\ \sqrt{s_3}(\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{p}_{3\kappa}) \end{pmatrix} \tag{56}$$

7.2 解の一意性

単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3$ は向きが不定である。このとは先に指摘したように、世界座標軸の方向が不定だからである。この不定性を解消するにはすべての量を第 1 カメラ座標系に関して表せばよい。第 κ カメラ座標系の基底の第 1 カメラ座標系に関する表現は式 (28) で与えられる。

7.3 並進の計算

式 (50) より $\boldsymbol{M}$ の第 i 列の第 4 要素は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1/\sqrt{\sigma_4} \end{pmatrix} \boldsymbol{U}\tilde{\boldsymbol{p}}_i = \sqrt{s_4}(\boldsymbol{u}_4, \tilde{\boldsymbol{p}}_i) \tag{57}$$

$\boldsymbol{u}_4$ は行列 $\boldsymbol{Q}$ の第 4 固有値 s_4 に対する単位固有ベクトルである。式 (40) とを比較して並進 $\boldsymbol{t}_\kappa$ を次のように得る。

$$\boldsymbol{t}_\kappa = -\sqrt{s_4}\Big((\boldsymbol{u}_4, \tilde{\boldsymbol{p}}_{3(\kappa-1)+1})\boldsymbol{i}_\kappa + (\boldsymbol{u}_4, \tilde{\boldsymbol{p}}_{3(\kappa-1)+2})\boldsymbol{j}_\kappa + (\boldsymbol{u}_4, \tilde{\boldsymbol{p}}_{3(\kappa-1)+3})\boldsymbol{k}_\kappa\Big),\ \ \kappa = 1, ..., M \tag{58}$$

このように並進には定数倍の不定性が残る。これは、透視変換画像のみからはシーンの絶対的なスケールが復元できないというよく知られた事実に対応する [5, 7]。そこでスケールを任意に (例えば $s_4 = 1$ と) 選ぶ。計算した並進 $\boldsymbol{t}_\alpha$ の第 1 カメラ座標系に関する表現は次のようになる。

$$\boldsymbol{t}'_\kappa = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{t}_\kappa, \boldsymbol{i}_1) \\ (\boldsymbol{t}_\kappa, \boldsymbol{j}_1) \\ (\boldsymbol{t}_\kappa, \boldsymbol{k}_1) \end{pmatrix},\ \ \kappa = 1, ..., M \tag{59}$$

7.4 形状の計算

スケールを指定して並進が定まれば第 1 カメラに関する奥行き $Z_{1\alpha}$ が、したがってすべての奥行き $Z_{\kappa\alpha}$ が定まる。例えば第 1 画像と第 κ 画像から計算した奥行き $Z_{1\alpha}$ が 2 画像解析でよく行われるように、第 1 カメラと第 κ カメラの基線長を 1 とするスケールが選ばれているなら [5, 7]、それに $\|\boldsymbol{t}_\kappa - \boldsymbol{t}_1\|$ を掛ければよい。奥行きが定まれば特徴点の位置 $\boldsymbol{r}_\alpha$ は次の線形方程式の解として得られる ($\alpha = 1, ..., N$)。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_1^\top \\ \boldsymbol{j}_1^\top \\ \boldsymbol{k}_1^\top \\ \boldsymbol{i}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{k}_M^\top \end{pmatrix} \boldsymbol{r}_\alpha = \begin{pmatrix} Z_{1\alpha}x_{1\alpha} + (\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{t}_1) \\ Z_{1\alpha}y_{1\alpha} + (\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{t}_1) \\ Z_{1\alpha} + (\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{t}_1) \\ Z_{2\alpha}x_{2\alpha} + (\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{t}_2) \\ \vdots \\ Z_{M\alpha} + (\boldsymbol{i}_M, \boldsymbol{t}_M) \end{pmatrix} \tag{60}$$

$\boldsymbol{r}_\alpha$ の第 1 カメラ座標系に関する表現は式 (30) である。

7.5 誤差への対処

データに誤差があれば基礎方程式 (42) は厳密には成立しない。ロバストな解を求める最も簡単な方法は最小二乗法を適用することである。

- 連立方程式 (55) を最小二乗法によって解く (付録 A)。
- 式 (56) で計算した基底ベクトル $\{\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{k}_\kappa\}$ が厳密に正規直交系になる最小補正を行う (付録 B)。
- 奥行き $Z_{1\alpha}$ として第 1 画像と第 κ 画像から計算したものを $\kappa = 2, ..., M$ に渡って平均する。
- 線形方程式 (60) を最小二乗法によって解く (付録 A)。

基底ベクトル $\boldsymbol{k}_\kappa$、並進 $\boldsymbol{t}_\kappa$、位置 $\boldsymbol{r}_\alpha$ が得られれば奥行き $Z_{\kappa\alpha}$ が式 (32) から、したがって奥行き比 $Z_{\kappa\alpha}/Z_{1\alpha}$ が定まる。これらは最初に計算に用いた値に等しいとは限らない。必要ならこの新しい値を用いて上記の手順を繰り返して精度を向上させることも可能である。

8. まとめ

本論文では Tomasi-Kanade の因子分解法 [14] において行列の因子分解は本質的な役割を果たしていないことを指摘し、因子分解を用いない手順を示すことにより、本質はデータの誤差を分散させる “平均化” にあることを示した。これは撮像が平行投影であるか透視変換であるかには独立である。この観点から因子分解法を透視変換の場合に拡張した。

本論文では適用例を示さなかったが、これは本方法が Tomasi-Kanade 法と等価であり、同じ結果しか得られないからである。本論文の目的は新しい手法の提案にあるのではなく、別の定式化を与えることにより世界座標系や相互モーメントの役割に対する認識を深め、新しい拡張や応用の可能性を示すことにある。

謝辞。コメントや文献に関する情報を頂いた米国カーネギーメロン大学の Daniel Morris 氏、東京大学の出口光一郎助教授、群馬大学の太田直哉助手に感謝します。本研究を行う契機となったカーネギーメロン大学訪問を支援して下さった同大学の金出武雄教授にも感謝します。本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究 C (2) (No. 09680352) によった。

参考文献

[1] S. Christy and R. Horaud, Euclidean shape and motion from multiple perspective views by affine iterations, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **18**-11 (1996), 1098–1104.

[2] 出口光一郎, 透視投影条件の下での因子分解法による多視点画像からの形状復元, 情報処理学会研究報告, 97-CVIM-106-6 (1997-07), 35–42.

[3] K. Deguchi, T. Sasano, H. Arai and H. Yoshikawa, 3-D shape reconstruction from endoscope image sequences by the factorization method, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E79-D**-9 (1996), 1329–1336.

[4] 出口光一郎, B. Triggs, 多視点透視投影画像の因子分解, 電子情報通信学会技術研究報告, PRMU96-139 (1997-01), 81–88.

[5] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[6] 金谷健一, 「空間データの数理 — 3次元コンピューティングに向けて —」, 朝倉書店, 1995.

[7] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[8] 金出武雄, コンラッド・ポールマン, 森田俊彦, 因子分解法による物体形状とカメラ運動の復元, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J76-D-II**-8 (1993), 1497–1505.

[9] D. Morris and T. Kanade, A unified factorization algorithm for points, line segments and planes with uncertainty models, *Proc. 6th Int. Conf. Comput. Vision*, January 1998, Bombay, India, pp. 696–702.

[10] 長崎健, 川嶋稔夫, 青木由直, 因子分解法に基づく運動画像列解析による多関節物体の構造推定, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J81-D-II**-3 (1998), 483–492.

[11] C. J. Poelman and T. Kanade, A paraperspective factorization method for shape and motion recovery, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19**-3 (1997), 206–218.

[12] L. Quan and K. Kanade, A factorization method for affine structure from line correspondences, *Proc. Conf. Comput. Vision Patt. Recog.*, June 1996, San Francisco, CA, U.S.A., pp. 803–808.

[13] P. Sturm and B. Triggs, A factorization based algorithm for multi-image projective structure and motion, *Proc. 4th Euro. Conf. Comput. Vision*, April 1996, Cambridge, U.K., Vol. 2, pp. 709–720.

[14] C. Tomasi and T. Kanade, Shape and motion from image streams under orthography: A factorization method, *Int. J. Comput. Vision*, **9**-2 (1992), 137–154.

[15] B. Triggs, Factorization methods for projective structure and motion, *Proc. Conf. Comput. Vision Pattern Recog.*, June 1996, San Francisco, CA, U.S.A., pp. 845–851.

[16] 植芝俊夫, 富田文明, 初期モデルとしてアフィン投影を用いた多視点透視投影画像からの運動と形状の復元, 情報処理学会研究報告, 97-CVIM-107-1 (1997-09), 1–8.

[17] 浮田宗伯, 尺長健, 透視投影因子分解法による広範囲画像系列からの3次元物体モデル生成, 電子情報通信学会技術研究報告, PRMU97-276 (1998-03), 81–88.

付録 A. 最小二乗解

連立方程式

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{61}$$

の最小二乗解 x_1, ..., x_n とは次の量を最小にする解である。

$$\sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - b_i)^2 \tag{62}$$

これを各 x_i で微分して 0 と置くと次の正規方程式を得る。

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ki}a_{kj}x_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}b_k, \quad i = 1, ..., n \tag{63}$$

行列で表すと、線形方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{64}$$

の最小二乗解は次の正規方程式を解いて得られる。

$$\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{b} \tag{65}$$

式 (29), (60) の最小二乗解はこのような正規方程式を解いて求まる。方程式 (25) の正規方程式は次のように書ける。

$$\sum_{k,l=1}^{3} A_{ijkl}Q_{kl} = B_{ij} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} A_{ijkl} = \sum_{\kappa=1}^{M}\sum_{m,n=1}^{2} &\frac{1}{2}(1+\delta_{mn})(\boldsymbol{p}_{2(\kappa-1)+m})_i(\boldsymbol{p}_{2(\kappa-1)+n})_j \\ &(\boldsymbol{p}_{2(\kappa-1)+m})_k(\boldsymbol{p}_{2(\kappa-1)+n})_l \end{aligned} \tag{67}$$

$$B_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{M}\sum_{m=1}^{2}(\boldsymbol{p}_{2(\kappa-1)+m})_i(\boldsymbol{p}_{2(\kappa-1)+m})_j \tag{68}$$

$(\boldsymbol{p}_{2(\kappa-1)+m})_i$ はベクトル $\boldsymbol{p}_{2(\kappa-1)+m}$ の第 i 成分である。$(1+\delta_{mn})/2$ の項はすべての方程式に同じ重みを課すためであるが、式 (21) の第 2 式に第 1 式の 2 倍の重みを与えるなら不要である。添え字の対 (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3) に通し番号 $\lambda = 1, ..., 6$ をつけると式 (66) は $\sum_{\mu=1}^{6} A_{\lambda\mu}Q_\mu = B_\lambda$ と書き直せる。

方程式 (55) の正規方程式も次のように書ける。

$$\sum_{k,l=1}^{4} A_{ijkl}Q_{kl} = B_{ij} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} A_{ijkl} = \sum_{\kappa=1}^{M}\sum_{m,n=1}^{3} &\frac{1}{2}(1+\delta_{mn})(\boldsymbol{p}_{3(\kappa-1)+m})_i(\boldsymbol{p}_{3(\kappa-1)+n})_j \\ &(\boldsymbol{p}_{3(\kappa-1)+m})_k(\boldsymbol{p}_{3(\kappa-1)+n})_l \end{aligned} \tag{70}$$

$$B_{ij} = \sum_{\kappa=1}^{M}\sum_{m=1}^{3}(\boldsymbol{p}_{3(\kappa-1)+m})_i(\boldsymbol{p}_{3(\kappa-1)+m})_j \tag{71}$$

添え字の対 (1,1), (1,2), ..., (4,4) に通し番号 $\lambda = 1, ..., 10$ をつけると式 (69) は $\sum_{\mu=1}^{10} A_{\lambda\mu}Q_\mu = B_\lambda$ と書き直せる。

付録 B. 直交補正

3 次元空間においてベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を最小二乗

$$\|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{c}\|^2 \to \min \tag{72}$$

の意味で最もよく近似する正規直交系 $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3\}$ は次のように計算される [5, 7]。まず列 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ から成る行列を次のように特異値分解する。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \boldsymbol{V}\mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\boldsymbol{U}^\top \tag{73}$$

$\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{U}$ は直交行列、$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \gamma_3$ (≥ 0) は特異値である。このとき $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ を列とする行列は次のようなる。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{V}\mathrm{diag}(1, 1, \det(\boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^\top))\boldsymbol{U}^\top \tag{74}$$

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を最小二乗の意味で最もよく近似する正規直交系 $\{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\}$ を計算するには $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ と置いて上記の計算を行えばよい。