# フロー基礎行列の分解: 自己校正法の群論的方法

**金谷 健一** * 　**マイケル・J・ブルックス** †

* 群馬大学工学部情報工学科　† アデレード大学情報工学科

運動する未校正カメラで観測したオプティカルフローを特徴づけるフロー基礎行列から焦点距離とその変化速度、およびカメラの運動パラメータを計算するアルゴリズムを示す。まずオプティカルフローのエピ極線条件を導き、それを表すフロー基礎行列を定義するとともに、その分解可能条件を示す。次にフロー基礎行列を画像座標系の回転に対応する２次元回転群の規約表現で表す。シューアの補題により、これは複素数の範囲で１次元相対不変量に簡約される。これを用いると解が簡潔な代数的公式として表せる。最後に解が不定となる退化の条件を解析する。

**キーワード**: 動画像解析、オプティカルフロー、基礎行列、自己校正、焦点距離、群の表現

# Decomposition of the Flow Fundamental Matrices: Group-Theoretical Method for Self-Calibration

**Kenichi Kanatani*** **and Michael J. Brooks**†

*Department of Computer Science, Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan
†Department of Computer Science, University of Adelaide, Adelaide, SA 5005, Australia

We describe an algorithm for decomposing the fundamental matrices that characterize optical flow observed by an uncalibrated camera in motion into the focal length and its rate of change and the camera motion parameters. We first derive the epipolar equation for optical flow and define its flow fundamental matrices. We also derive their decomposability condition. Then, we express them in terms of irreducible representations of the two-dimensional group of rotations associated with image coordinate rotations. According to Schur's lemma, they can be reduced to one-dimensional relative invariants with weights in the domain of complex numbers. We show that the solution can be easily obtained in a simple algebraic form in terms of them. Finally, we analyze the condition for which the solution is indeterminate.

**Key words**: structure from motion, optical flow, fundamental matrix, self-calibration, focal length, group representation

**謝辞:** 本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究C (2) (No. 11680377) によった。

---

*376-8515 桐生市天神町 1–5–1 群馬大学工学部情報工学科,
Tel: (0277)30-1842, Fax: (0277)30-1801, E-mail: `kanatani@cs.gunma-u.ac.jp`
†Department of Computer Science, University of Adelaide, Adelaide, SA 5005, Australia
Tel: +61(8)8303-4626, Fax: +61(8)8303-4366, E-mail: `mjb@cs.adelaide.edu.au`

## 1. 序論

オプティカルフローから3次元復元を行うとき、シーンの構造に関する(平面であるとかの)知識がなければ、得られる情報は「フロー基礎行列」に集約される[7, 8]。これを分解してカメラの運動パラメータを計算すれば3次元復元ができる。カメラが校正されている場合はこの分解は容易であり、そのようにして3次元復元を行った例が既にいろいろ報告されている[6, 12, 14]。特に太田ら[14]は画像の誤差の統計モデルに基いた厳密な信頼性評価を行っている。

本論文ではBrooksら[1]およびViévilleら[17]に従い、より現実的なカメラが未校正の場合を考察する。フロー基礎行列は定数倍を除いて定まる対称行列と反対称行列の組であり、自由度は7である。カメラの相対運動は並進速度 $\boldsymbol{v}$ と回転速度 $\boldsymbol{\omega}$ で指定され、並進速度の絶対量が不定であるから、運動パラメータ $\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ は5自由度を持つ。したがって、カメラの運動が任意であれば最大2個のカメラのパラメータが計算できる(「自己校正」)。

その2パラメータとして現実的な選択は焦点距離 $f$ およびその変化速度 $\dot{f}$ であろう。なぜならその他のパラメータ(画像中心、アスペクト比、歪み角、等)はカメラに固有であり、あらかじめ校正しておくことができるのに対して、焦点距離(ズーム)は撮影のたびに変化することが多いからである[1]。

この分解はすでにBrooksら[1]が示しているが、複雑な変数変換と代数計算によるものである。本論文では回転群の表現論[5]を用いればこの問題が簡単に解けることを示す。これはフロー基礎行列を画像座標系の回転に対応する「2次元回転群の規約表現」で表すものであり、複素数の範囲でシューアの補題により「1次元相対不変量」となる。これを用いると解が代数的に表せることは既に、平面物体のオプティカルフローから3次元復元を行うための閉じた公式を導くのに応用されている[2, 3, 4]。本論文でもこれと同じ手法を用いる。

以下、まずオプティカルフローの「エピ極線条件」を導き、それを特徴づけるフロー基礎行列を定義するとともに、その「分解可能条件」を示す。次にフロー基礎行列を焦点距離とその変化速度、およびカメラの運動パラメータとに分解するアルゴリズムを述べ、その後に導出を示す。最後に解が不定となる退化の条件を解析する。その不定性の条件は2画像から計算した基礎行列の分解の場合[9, 13]と同様になる。このような解析が簡単に行えるのも本論文の複素規約表現による方法の利点である。

[1]市販のカメラではズーム機構の精度不足のため、ズームを変えると画像中心もやや変化するといわれている。しかし、実際的な応用ではこれを無視しても問題ないことが多い。

## 2. エピ極線方程式

静止したシーンに相対的にカメラが並進速度 $\boldsymbol{v}$ で並進し、回転速度 $\boldsymbol{\omega}$ (軸 $\boldsymbol{\omega}$ の周りの角速度 $\|\boldsymbol{\omega}\|$)で回転しているとする。カメラ座標系から見るとシーンが並進速度 $-\boldsymbol{v}$、回転速度 $-\boldsymbol{\omega}$ の逆の運動をしており、カメラ座標系に関して点 $\boldsymbol{r}$ の運動は次のように書ける。

$$\dot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{1}$$

以下 $\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ を**運動パラメータ**と呼ぶ。カメラの撮像が透視変換とみなせるとし、点 $\boldsymbol{r}$ は画像面上の点 $(x, y)$ に投影されるとする。焦点距離を $f$ とすると、ベクトル

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f \end{pmatrix} \tag{2}$$

はレンズの中心からその点に向かう視線の方向を示す。したがって $\boldsymbol{r} = c\boldsymbol{\xi}$ と書け、$\dot{\boldsymbol{r}} = c\dot{\boldsymbol{\xi}} + \dot{c}\boldsymbol{\xi}$ である。これらを式(1)に代入すると次のようになる。

$$c(\dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi}) = -\dot{c}\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{v} \tag{3}$$

これはベクトル $\dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi}$ が $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{v}$ の張る平面内にあることを意味する。したがって $|\dot{\boldsymbol{\xi}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi}, \xi, \boldsymbol{v}| = 0$ であり、書き直すと次の**エピ極線方程式**を得る[8]。

$$|\dot{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}| + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{4}$$

ただし、$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$ はベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のスカラ三重積であり、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ はベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積である。上式は2画像の対応点の満たす「エピ極線方程式」[7, 8, 15, 18, 19]の瞬間的運動の極限をとっても得られ、古くはMaybank [10]によって指摘された関係である。

## 3. フロー基礎行列

カメラが未校正であるとし、画像面上に任意に画像座標系をとる。画像座標 $(u, v)$ の点の校正された場合の座標 $(x, y)$ が次の関係にあるとする。

$$u = x - y\cot\theta + u_0, \qquad v = \frac{y}{\alpha\sin\theta} + v_0 \tag{5}$$

ここに $(u_0, v_0)$ はカメラの光軸にあたる点(**画像中心**)の画像座標であり、$\alpha$、$\theta$ はそれぞれ**アスペクト比**、**歪み角**と呼ばれている[15, 18, 19]。焦点距離 $f$ が未知であるので、その推定値 $f_0$ を用いて画像座標 $(u, v)$ の点を次のベクトルで表す。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u/f_0 \\ v/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

式 (5) よりこれはベクトル $\boldsymbol{\xi}$ と次の関係にある。

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{f_0}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 1 & -(f/f_0)\cot\theta & u_0/f \\ 0 & 1/\alpha\sin\theta & v_0/f \\ 0 & 0 & f_0/f \end{pmatrix} \tag{7}$$

$\boldsymbol{K}$ を ((1,1) 要素を 1 に正規化した) **カメラ行列**と呼ぶ。式 (7) を $\boldsymbol{\xi}$ について解いて時間微分をとると次のようになる (まぎらわしいが $\dot{\boldsymbol{K}}^{-1}$ は $d\boldsymbol{K}^{-1}/dt$ の略記であり、 $(d\boldsymbol{K}/dt)^{-1}$ ではない)。

$$\boldsymbol{\xi} = f_0\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}, \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = f_0\boldsymbol{K}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} + f_0\dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{8}$$

これらをエピ極線方程式 (4) に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
&|\dot{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}| + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\xi}) \\
&= f_0^2\Big((\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{K}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{v}) \\
&\quad + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x})\Big) \\
&= -f_0^2\Big((\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{K}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{x})) \\
&\quad - ((\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x})\Big) \\
&= -f_0^2\Big((\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{K}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{x}) \\
&\quad - (\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})^\top(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x})\Big) \\
&= -f_0^2\Big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{K}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}) \\
&\quad + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{K}}^{-1})\boldsymbol{x}) \\
&\quad + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{x})\Big)
\end{aligned} \tag{9}$$

ただし $\boldsymbol{K}^{-\top}$ は $(\boldsymbol{K}^{-1})^\top$ $(= (\boldsymbol{K}^\top)^{-1})$ の略記である。またベクトル $\boldsymbol{a}$ と行列 $\boldsymbol{A}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{a}$ と行列 $\boldsymbol{A}$ の各列とのベクトル積を列とするベクトルである [8]。

対称行列 $\boldsymbol{C}$ と反対称行列 $\boldsymbol{W}$ を次のように定義する [1, 17]。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{K}^{-\top}S[(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I}) + \boldsymbol{v}\times\dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{K}]\boldsymbol{K}^{-1} \\
\boldsymbol{W} &= \boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{K}^{-1}
\end{aligned} \tag{10}$$

ただし $S[\cdot]$ は対称化作用素である ($S[\boldsymbol{A}] = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top)/2$)。行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ を用いるとエピ極線方程式 (4) は次のように書ける。

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}) = 0 \tag{11}$$

行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ は 2 画像間のエピ極線方程式を定める「基礎行列」 [15, 18, 19] に相当しているので、これらを**フロー基礎行列**と呼ぶ [16]。

## 4. 分解可能条件

行列 $\boldsymbol{C}$ は次のように書き直せる [1]。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{K}^{-\top}S[\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{K})]\boldsymbol{K}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{K}^{-\top}\Big((\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{K}) \\
&\quad - (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{K})^\top(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})\Big)\boldsymbol{K}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I} \\
&\quad + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}^{-1} - \boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I} \\
&\quad + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{K})^\top\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{K}^{-1}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{W}\boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}^{-1} \\
&\quad + \boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{K})^\top\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{W}^\top\Big) \\
&= S[\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}]
\end{aligned} \tag{12}$$

ただし次のように置いた。

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{K}^{-\top}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I} + \dot{\boldsymbol{K}}^{-1}\boldsymbol{K})\boldsymbol{K}^{-1} \tag{13}$$

$\boldsymbol{W}$ $=(W_{ij})$ は反対称行列であるから、これを次のようなベクトルとみなすことができる。

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} W_{32} \\ W_{13} \\ W_{21} \end{pmatrix} \tag{14}$$

このベクトルを用いると $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{I}$ と書ける [8]。したがって式 (12) は次のようにも表せる。

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}^\top(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{I})\Big) \tag{15}$$

ゆえに次の恒等式が成り立つ [1, 17]。

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{w}) = 0 \tag{16}$$

これをフロー基礎行列の**分解可能条件**と呼ぶ [16]。これは 2 画像の対応から定めた基礎行列は行列式が 0 であるという「分解可能条件」 [11, 15, 18, 19] に対応するものである。カメラが校正されている場合はより強い分解可能条件が課される [8, 14]。

## 5. オプティカルフローからの３次元復元

３次元復元の手順は次のようになる。まず画像上の複数の点でオプティカルフロー $\dot{\boldsymbol{x}}$ を検出する。次にそれらのフローにエピ極線方程式 (11) を最適に当てはめてフロー基礎行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ を計算する。ただし式 (11) から直ちにわかるように、$\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ には定数倍の不定性がある。そこで $\|\boldsymbol{C}\|^2 + \|\boldsymbol{W}\|^2 = 1$ と正規化する。

我々は既に画像の誤差の統計的モデルに基いてフロー基礎行列を最適に計算するアルゴリズムを発表している [16]。すぐわかるように、行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ を個別に計算する必要はなく、その和

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{W} \tag{17}$$

を計算すればよい。なぜなら $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ は次のように定まるからである。

$$\boldsymbol{C} = S[\boldsymbol{F}], \qquad \boldsymbol{W} = A[\boldsymbol{F}] \tag{18}$$

ただし $A[\cdot]$ は反対称化作用素である ($A[\boldsymbol{A}] = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\top)/2$)。正規化 $\|\boldsymbol{C}\|^2 + \|\boldsymbol{W}\|^2 = 1$ は正規化 $\|\boldsymbol{F}\| = 1$ に同値である。文献 [16] では**くりこみ法**と呼ぶ手法で行列 $\boldsymbol{F}$ を計算すると同時にその共分散テンソルを計算し、分解可能条件 (16) が満たされるようにその共分散テンソルに関する最適補正を施している。文献 [16] ではさらに解の精度の理論限界を導き、解がその限界を満たすことを実験的に確認している。したがって、理論的にはもはや改良の余地はなく、解は最適である。そして、その計算のための C++ プログラムが公開されている[2]。

このプログラムでは最適に計算した行列 $\hat{\boldsymbol{F}}$ だけでなく、その**標準偏位** $\boldsymbol{F}^{(+)}$, $\boldsymbol{F}^{(-)}$ も出力している。標準偏位はパラメータ空間で $\hat{\boldsymbol{F}}$ から最も誤差が生じやすい両方向に標準偏差だけずれた値を示すものであり、精度の理論限界に対応するものである。したがって、例えば $\boldsymbol{F}^{(+)}$ と $\boldsymbol{F}^{(+)}$ が有効数字 3 桁で一致していれば、解 $\hat{\boldsymbol{F}}$ にほぼ有効数字 3 桁の精度があることが保証され、これ以上の精度が不可能であるという意味で解の信頼性が定量的に評価される。

フロー基礎行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ が計算されれば、次のステップは式 (10) が満たされるようにカメラ行列 $\boldsymbol{K}$、その変化率 $\dot{\boldsymbol{K}}$、および運動パラメータ $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ を計算することである。これらが計算できれば物体の 3 次元形状が復元できる [8, 14]。

## 6. フロー基礎行列の表現

フロー基礎行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ は一個の行列 $\boldsymbol{F}$ に等価であり、スケールが不定であるから並進速度 $\boldsymbol{v}$ の絶対量が不定となる。さらに分解可能条件 (16) を満たさなければならないから $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ には 7 個の自由度しかない。並進速度 $\boldsymbol{v}$ の絶対値が不定であるから運動パラメータ $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ は 5 自由度ある。そこで序論に述べたように画像中心、アスペクト比、および歪み角をあらかじめ校正しておき、焦点距離 $f$ とその変化速度 $\dot{f}$ および運動パラメータ $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ を計算する方法を考える。

[2] `http://www.ail.cs.gunma-u.ac.jp/~kanatani/j`

画像座標が $(u_0, v_0) = (0,0), \alpha = 1, \theta = \pi/2$ となるように補正されているとすると、式 (6) のカメラ行列 $\boldsymbol{K}$ は次のようになる ($\mathrm{diag}(\cdots)$ は $\cdots$ を対角要素とする対角行列)。

$$\boldsymbol{K} = \mathrm{diag}(1, 1, \frac{f_0}{f}) \tag{19}$$

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \mathrm{diag}(1, 1, \frac{f}{f_0}), \quad \dot{\boldsymbol{K}}^{-1} = \mathrm{diag}(0, 0, \frac{\dot{f}}{f_0}) \tag{20}$$

これらを式 (10), (13) に代入すると次のようになる。

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & (f/f_0)v_2 \\ v_3 & 0 & -(f/f_0)v_1 \\ -(f/f_0)v_2 & (f/f_0)v_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & (f/f_0)\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -(f/f_0)\omega_1 \\ -(f/f_0)\omega_2 & (f/f_0)\omega_1 & \dot{f}/f \end{pmatrix} \tag{22}$$

式 (12), (14) より行列 $\boldsymbol{W} = (W_{ij}), \boldsymbol{C} = (C_{ij})$ の要素は次のようになる。ただし、式 (14) のベクトル $\boldsymbol{w}$ の要素をそれぞれ $w_1 = W_{32}$, $w_2 = W_{13}$, $w_3 = W_{21}$ と置く。

$$w_1 = \frac{f}{f_0}v_1, \qquad w_2 = \frac{f}{f_0}v_2, \qquad w_3 = v_3 \tag{23}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= -\frac{f_0}{f}w_2\omega_2 - w_3\omega_3 \\ C_{12} &= \frac{f_0}{2f}(w_2\omega_1 + w_1\omega_2) \\ C_{13} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\dot{f}}{f}w_2 + \frac{f}{f_0}w_3\omega_1 + w_1\omega_3\Big) \\ C_{22} &= -w_3\omega_3 - \frac{1}{f_0}w_1\omega_1 \\ C_{23} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{f}{f_0}w_3\omega_2 - \frac{\dot{f}}{f}w_1 + w_2\omega_3\Big) \\ C_{33} &= -\frac{1}{f_0}\Big(w_1\omega_1 + w_2\omega_2\Big) \end{aligned} \tag{24}$$

## 7. フロー基礎行列の分解

カメラが校正されている場合は $f$, $\dot{f}$ が既知であるから方程式が余分であり、運動パラメータは余分の条件を利用して最適化によって定められている [8, 14]。カメラが未校正の場合に Brooks ら [1] は複雑な変数変換および代数的演算によって式 (23), (24) を $f$, $\dot{f}$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}$ について解いている。ここでは群表現論に基いた

簡潔な解を与える。まずアルゴリズムを述べて、導出は後に示す。並進速度 $\boldsymbol{v}$ には定数倍の不定性があるので $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ と正規化する。

**入力:** フロー基礎行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$。

**出力:**
- 焦点距離 $f$ およびその変化速度 $f'$。
- 運動パラメータ $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ ($\|\boldsymbol{v}\| = 1$)。

**手順:**

1. 行列 $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ から次の量を計算する。

$$A = C_{11} + C_{22}, \qquad \tilde{B} = (C_{11} - C_{22}) + 2iC_{12}$$

$$\tilde{C} = 2(C_{13} + iC_{23}), \qquad D = C_{33} \tag{25}$$

2. 行列 $\boldsymbol{W}$ から式 (14) のベクトル $\boldsymbol{w} = (w_i)$ を計算する。

3. 次のように複素数 $\tilde{w}$ を計算する。

$$\tilde{w} = w_1 + iw_2 \tag{26}$$

4. 次のように複素数 $\tilde{\omega}$ を計算する。

$$\tilde{\omega}' = \frac{\tilde{B}}{\tilde{w}} \tag{27}$$

5. 次のように $\omega_1'$, $\omega_2'$ を計算する。

$$\omega_1' = \Re[\tilde{\omega}'], \qquad \omega_2' = \Im[\tilde{\omega}'] \tag{28}$$

6. 次のように $\omega_3$ を計算する。

$$\omega_3 = -\frac{A + (\tilde{w}, \tilde{\omega}')}{2w_3} \tag{29}$$

7. 次のように $f'$ を計算する。

$$f' = \sqrt{-\frac{D}{(\tilde{w}, \tilde{\omega}')}} \tag{30}$$

8. 次のように複素数 $\tilde{\phi}$ を計算する。

$$\tilde{\phi} = \frac{\tilde{C} - f'^2 w_3 \tilde{\omega}'}{\tilde{w}} \tag{31}$$

9. 次のように $\omega_3$、$\dot{f}'$ を計算する。

$$\omega_3 = \Re[\tilde{\phi}], \qquad \dot{f}' = -f'\Im[\tilde{\phi}] \tag{32}$$

10. 次のように $\omega_1$, $\omega_2$ を計算する。

$$\omega_1 = f'\omega_1', \qquad \omega_2 = f'\omega_2' \tag{33}$$

11. 次のように焦点距離 $f$ とその変化速度 $\dot{f}$ を計算する。

$$f = f'f_0, \qquad \dot{f} = \dot{f}'f_0 \tag{34}$$

12. 次のように並進速度 $\boldsymbol{v}$ を計算する。

$$\boldsymbol{v} = N[\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ (f/f_0)w_3 \end{pmatrix}] \tag{35}$$

ただし $i$ は虚数単位であり、チルドのついた量は複素数である。$\Re[\,\cdot\,]$, $\Im[\,\cdot\,]$ は複素数の実数部、虚数部を表す。また複素数 $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$ の "内積" を $(z, z') = xx' + yy'$ と定義した。$N[\,\cdot\,]$ は単位ベクトルへの正規化作用である ($N[\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\|$)。

$\omega_3$ が式 (29) と式 (32) の第 1 式と**二通りに計算される**が、これは分解可能条件 (16) のためである。この事実はエラーチェックに利用できる (分解可能条件 (16) が満たされていないと両者は一致しない)。

上記の手順以外にもう一つの解が存在する。なぜならフロー基礎行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ に定数倍の不定性があり、特に符号が不定だからである。上記の手順でフロー基礎行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ の符号を換えると並進速度 $\boldsymbol{v}$ の符号が反転した解が得られる。これは数学的にはシーンがカメラの前方にあっても後方にあっても同じ透視変換の式となるためであり、２つの解はそれぞれシーンがカメラの前方にある解と後方にある解とに対応する。３次元復元を行うには奥行きが正となる解を選ぶ [7, 8]。

## 8. アルゴリズムの導出

基本的な考え方は次の通りである。焦点距離 $f$ がフロー基礎行列 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}$ の関数として $f = f(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W})$ と表されたとする。このとき $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ は (既知と仮定している) 画像中心を原点とする $xy$ 画像座標系、およびそれに垂直な $z$ 軸に関して記述されている。しかし $xy$ 画像座標系の方向に特に制約はない。もし $xy$ 画像座標を原点の周りにある角度だけ回転した別の $x'y'$ 画像座標をとれば、基礎行列 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ も別の値 $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{W}'$ をとる。しかし、焦点距離 $f$ は画像座標系の向きには無関係であるから、**同じ公式** $f = f(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{W})$ で計算できなければならない。すなわち、**同じ関数** $f(\cdot, \cdot)$ に対して $f(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}) = f(\boldsymbol{C}', \boldsymbol{W}')$ でなければならない。言い換えれば関数 $f$ が $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ の**座標回転に関して不変**でなければならない。

座標系を原点の周りに回転すると、対称行列で表される量 (3 次元 2 階テンソル) はその左上の $2 \times 2$ 小行列が 2 次元 2 階テンソルとして変換し、(1,3) 要素と

(2,3) 要素の組および (3,1) 要素と (3,2) 要素が 2 次元ベクトル (2 次元 1 階テンソル) として変換し、(3,3) 要素がスカラ (0 階テンソル) となる。これらの変換はすべて要素の線形写像である。したがってその変換は座標回転の**2 次元回転群の表現**となる [5]。しかし 2 次元回転群は可換群であり、**可換群の表現はすべて複素数の範囲で 1 次元規約表現に簡約できる**（「シューアの補題」[5])。以上より焦点距離 $f$ はこれらの複素数 1 次元規約表現の関数である。焦点距離 $f$ の変化速度 $\dot{f}$ についても同様である。

一方、運動パラメータ $\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ は各々 3 次元ベクトル (3 次元 1 階テンソル) であり、$xy$ 座標系の回転に関して第 1、第 2 成分が 2 次元ベクトル (2 次元 1 階テンソル) として変換し、第 3 成分がスカラ (0 階テンソル) となる。したがって、$\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ の各々の第 3 成分は $f$, $\dot{f}$ と同様に $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ の複素数 1 次元規約表現の関数である。一方、$\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ の各々の第 1、第 2 成分は (絶対) 不変量ではないが、それらに座標回転を施したものは $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ に同じ座標回転を施しても同じ関数で表されなければならない。すなわち $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ の**座標回転に関して共変**でなければならない [5]。したがって、$\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{\omega}\}$ から複素数の範囲で座標回転に関する**重み 1 の相対不変量**を作ると、これが $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{W}$ の複素数 1 次元規約表現の関数でなければならない。

まず行列 $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ から式 (25) の 1 次元規約表現が作られる (付録参照)。$A$, $D$ は絶対不変量であり、$\tilde{C}$ は重み 1 の相対不変量であり、$\tilde{B}$ は重み 2 の相対不変量である [5]。同様に、式 (26) の $\tilde{w}$ は重み 1 の相対不変量であり、$w_3$ は絶対不変量である [5]。一方、未知数に関しても次の不変量を定義する。

$$\tilde{\omega}' = \frac{f_0}{f}(\omega_1 + i\omega_2), \qquad \tilde{\phi} = \omega_3 - i\frac{\dot{f}}{f} \tag{36}$$

$\tilde{\omega}'$ は重み 1 の相対不変量であり、$\tilde{\phi}$ は絶対不変量である。

式 (24) を式 (25) の不変量に代入して整理すると次のようになる。

$$A = -(\tilde{w}, \tilde{\omega}') - 2w_3\omega_3, \qquad \tilde{B} = \tilde{w}\tilde{\omega}'$$

$$\tilde{C} = f'^2 w_3 \tilde{\omega}' + \tilde{w}\tilde{\phi}, \qquad D = -f'^2(\tilde{w}, \tilde{\omega}'), \tag{37}$$

まず上の第 2 式から式 (27) が得られる。したがって $\omega_1' = (f_0/f)\omega_1$, $\omega_2' = (f_0/f)\omega_2$ が式 (28) のように得られる。その結果、上の第 1 式から $\omega_3$ が式 (29) のように得られる。次に上の第 4 式から $f' = f/f_0$ が式 (30) のように得られる。最後に上の第 3 式から $\tilde{\phi}$ が式 (31) のように得られ、$\omega_3$, $\dot{f}' = \dot{f}/f$ が式 (32) のように得られる。$\omega_1'$, $\omega_2'$, $f'$, $f''$ が定まれば、$\omega_1$, $\omega_2$, $f$, $\dot{f}$ が式 (33), (34) で定り、並進速度 $\boldsymbol{v}$ は式 (23) から式 (35) のように定まる。

## 9．退化の解析

第 7 節のアルゴリズムが破綻するのは式 (27)、式 (29), (30), (31) の分母が 0 になる場合であり、$w_3 = 0$ または $\tilde{w} = 0$ または $(\tilde{w}, \tilde{\omega}) = 0$ の場合である。$w_3 = 0$ かつ $\tilde{w} = 0$ であるのは $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の場合である。この場合は視差が生じないので何らの 3 次元情報も得られない。そこでこの場合は除外して考える。

**場合 1:** $w_3 = 0$, $\tilde{w} \neq 0$, $(\tilde{w}, \tilde{\omega}') \neq 0$

式 (37) は次のようになる。

$$A = -(\tilde{w}, \tilde{\omega}'), \qquad \tilde{B} = \tilde{w}\tilde{\omega}'$$

$$\tilde{C} = \tilde{w}\tilde{\phi}, \qquad D = -f'^2(\tilde{w}, \tilde{\omega}') \tag{38}$$

第 2 式より式 (27) が得られ、$\omega_1'$, $\omega_2'$ が式 (28) のように得られる。第 1 式、第 3 式から

$$f' = \sqrt{\frac{D}{A}} \tag{39}$$

となる。第 3 式から

$$\tilde{\phi} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{w}} \tag{40}$$

となり、$\omega_3$, $\dot{f}'$ が式 (32) のように得られる。したがって $\omega_1$, $\omega_2$ が式 (33) のように、$f$, $\dot{f}$ が式 (34) のように得られる。最後に並進速度が次のように得られる。

$$\boldsymbol{v} = N[\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}] \tag{41}$$

**場合 2:** $\tilde{w} = 0$, $w_3 \neq 0$, $(\tilde{w}, \tilde{\omega}') \neq 0$

式 (37) は次のようになる。

$$A = -2w_3\omega_3,\ \ \tilde{B} = 0,\ \ \tilde{C} = f'^2 w_3 \tilde{\omega}',\ \ D = 0 \tag{42}$$

第 1 式から

$$\omega_3 = -\frac{A}{2w_3} \tag{43}$$

が得られる。しかし、第 3 式からは $f$ と $\omega_1$, $\omega_2$ とが分離できない。したがって $\dot{f}$ も定まらない。しかし並進速度は次のように定まる。

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{sgn}(w_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{44}$$

ただし $\mathrm{sgn}(x)$ は $x$ が正、零、負に応じて 1, 0, $-1$ をとる符号関数である。

**場合 3:** $(\tilde{w}, \tilde{\omega}) = 0$

1. $w_3 \neq 0, \tilde{w} \neq 0$ とすると、式 (37) は次のようになる。

$$A = -2w_3\omega_3, \quad \tilde{B} = \tilde{w}\tilde{\omega}'$$

$$\tilde{C} = f'^2 w_3 \tilde{\omega}' + \tilde{w}\tilde{\phi}, \ D = 0 \qquad (45)$$

第 1 式より $\omega_3$ が式 (43) のように得られ、第 2 式より式 (27) が得られ、$\omega_1'$, $\omega_2'$ が式 (28) のように得られる。しかし第 3 式からは $f$ と $\dot{f}$ が分離できない。したがって $\omega_1, \omega_2$ も並進速度 $\boldsymbol{v}$ も定まらない。

2. $w_3$ =0 とすると、式 (37) は次のようになる。

$$A = 0, \ \tilde{B} = \tilde{w}\tilde{\omega}', \ \tilde{C} = \tilde{w}\tilde{\phi}, \ D = 0 \quad (46)$$

第 3 式から $\tilde{\phi}$ が式 (40) のように得られ、$\omega_3$, $\dot{f}'$ が式 (32) のように得られる。しかし、やはり $f$ と $\dot{f}$ とが分離できない。したがって $\omega_1, \omega_2$ も並進速度 $\boldsymbol{v}$ も定まらない。

3. $\tilde{w}$ =0 とすると、式 (37) は次のようになる。

$$A = -2w_3\omega_3, \ \tilde{B} = 0, \ \tilde{C} = f'^2 w_3 \tilde{\omega}', \ D = 0 \quad (47)$$

第 1 式より $\omega_3$ が式 (43) のように得られる。しかし第 3 式からは $f$ と $\omega_1$, $\omega_2$ が分離できない。したがって $\dot{f}$ も並進速度 $\boldsymbol{v}$ も定まらない。

場合 2, 3 を合わせると、解が求まらないのは $(\tilde{w}, \tilde{\omega}) = 0$ の場合である。この幾何学的意味は次のようになる。並進速度 $\boldsymbol{v}$ および回転速度 $\boldsymbol{\omega}$ は光軸方向の成分と画像面に平行な成分の和に分解できる。$(\tilde{w}, \tilde{\omega}) = 0$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{\omega}$ の画像面に平行な成分が互いに直交することを意味している。光軸方向の運動では光軸は移動しないが、画像面に平行な運動では光軸は平行移動する。一方、光軸周りの回転では光軸は移動しないが、画像面内の軸の周りの回転では光軸は平面をスイープする。これから次の結論を得る。

**【命題 1】** フロー基礎行列が焦点距離 $f$ とその変化速度 $\dot{f}$ および運動パラメータ $\{\boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{\omega}\}$ に分解できないのは、光軸がそれ自身と並進速度 $\boldsymbol{v}$ の張る平面内に留まるような運動をする場合である。

特にカメラが回転せずに単に並進する場合、あるいは光軸が空間の一点を常に通るような運動 (**注視運動**) は上記の条件を満たす。この条件は 2 画像の場合に基礎行列が分解できない条件 [9, 13] に合致している。命題 1を言い換えると、解が求まるためには光軸が "ねじれの位置" に移動しなければならないということである。

実際問題としては $f$ が定まらないときはデフォルト値 $f = f_0$ を仮定するしかない。こうするとすべての場合に $\{\boldsymbol{v}, \ \boldsymbol{\omega}\}$ が定まる。また場合 3.3 以外は $\dot{f}$ も定まる。一方、場合 3.1 では $\tilde{\omega} \neq 0$ なら $\dot{f} = 0$ の条件から $f$ を定めることもできる (詳細省略)。

## 11. まとめ

本論文では、運動する未校正カメラで観測したオプティカルフローを特徴づけるフロー基礎行列から焦点距離とその変化速度、およびカメラの運動パラメータを計算するアルゴリズムを示した。まずオプティカルフローのエピ極線条件を導き、それを特徴づけるフロー基礎行列を定義するとともに、その分解可能条件を示した。次にフロー基礎行列を画像座標系の回転に対応する 2 次元回転群の規約表現で表した。シューアの補題により、これは複素数の範囲で 1 次元相対不変量に簡約される。これを用いると解が簡潔な代数的公式として表せる。最後に解が不定となる退化の条件を解析した。

## 参考文献


[1] M. J. Brooks, W. Chojnacki and L. Baumera, Determining the egomotion of an uncalibrated camera from instantaneous optical flow, *J. Opt. Soc. Am.*, A, **14**-10 (1997), 2670-2677.

[2] K. Kanatani, Structure and motion from optical flow under orthographic projection, *Comput. Vision Graphics Image Process.*, **35** (1986), 181–199.

[3] K. Kanatani, Structure and motion from optical flow under perspective projection, *Comput. Vision Graphics Image Process.*, **38** (1987), 122–146.

[4] 金谷健一, 3 次元復元のための座標回転不変量の構成, 電子情報通信学会論文誌 D, **J70-D**-5 (1987), 937–945.

[5] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, 1990,

[6] K. Kanatani, 3-D interpretation of optical flow by renormalization, *Int. J. Comput. Vision*, **11**-3 (1993), 267–282.

[7] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[8] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[9] 金谷健一, 松永力, 基礎行列の分解: 焦点距離の直接的表現, 情報処理学会コンピュータビジョンとイメージメディア研究会, 99-CVIM-120 (2000-1).

[10] S. J. Maybank, The angular velocity associated with a optical flowfield arising from motion through

a rigid environment, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A**401** (1985), 317–326.
[11] 三島等, 金谷健一, 基礎行列の最適計算とその信頼性評価, 情報処理学会コンピュータビジョンとイメージメディア研究会, 99-CVIM-118-10 (1999-9), pp. 67–74.
[12] 向井利春, 大西昇, オプティカルフロー画像からの線形計算による３次元運動パラメータと構造の復元, 計測自動制御学会論文誌, **34**-5 (1998), 438–444.
[13] G. N. Newsam, D. Q. Huynh, M. J. Brooks and H.-P. Pan, Recovering unknown focal lengths in self-calibration: An essentially linear algorithm and degenerate configurations, *Int. Arch. Photogram. Remote Sensing*, **31**-B3-III, July 1996, Vienna, Austria, pp. 575–580.
[14] N. Ohta and K. Kanatani, Optimal structure-from-motion algorithm for optical flow, *IEICE Trans. Inf. & Sys.*, **E78-D**-12 (1995), 1559–1566.
[15] 佐藤淳, 「コンピュータビジョン—視覚の幾何学—」, コロナ社, 1999.
[16] 清水慶行, 金谷健一, オプティカルフロー基礎行列の最適計算とその信頼性評価, 情報処理学会コンピュータビジョンとイメージメディア研究会, 99-CVIM-118-11 (1999-9), pp. 75–82.
[17] T. Viéville and O. D. Faugeras, The first order expansion of motion equations in the uncalibrated case, *Comput. Vision Image Understanding*, **64**-1 (1996), 128–146.
[18] 徐剛, 辻三郎, 「３次元ビジョン」, 共立出版, 1998.
[19] G. Xu and Z. Zhang, *Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object Recognition: A Unified Approach*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1996.

## 付録: ２次元回転群の規約表現

$xy$ 座標系を原点の周りに角度 $\theta$ だけ回転すると、２次元ベクトル $(a,b)^\top$ は次のように変換する。

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{48}$$

これは２次元回転群 $SO(2)$ の表現である [5]。変数を $a$, $b$ から複素数

$$\alpha = a + ib, \qquad \alpha^* = a - ib \tag{49}$$

に変換すると式 (48) は次のように書ける。

$$\alpha' = e^{-i\theta}\alpha, \qquad \alpha^{*\prime} = e^{i\theta}\alpha^* \tag{50}$$

ゆえに $\alpha$, $\alpha^*$ は $SO(2)$ の規約表現であり、それぞれ重み 1, $-1$ の相対不変量である。したがって両者の積 $\alpha\alpha^*$ $(= a^2 + b^2)$ は絶対不変量 (重み 0 の相対不変量) である。２次元対称行列 $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ は次のように変換する。

$$\boldsymbol{C}' = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{C} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{51}$$

これも $SO(2)$ の表現である。変数を $C_{11}, C_{12}, C_{22}$ から

$$A = C_{11} + C_{22}, \quad B = (C_{11} - C_{22}) + 2iC_{12}, \quad B^* = (C_{11} - C_{22}) - 2iC_{12} \tag{52}$$

に変換すると式 (51) は次のように書ける。

$$A' = A, \quad B' = e^{-2i\theta}B, \quad B^{*\prime} = e^{2i\theta}B^* \tag{53}$$

ゆえに $A$, $B$, $B^*$ は $SO(2)$ の規約表現であり、それぞれ絶対不変量、重み 2, $-2$ の相対不変量である [5]。したがって $BB^*$ $(= (\mathrm{tr}\boldsymbol{C})^2 - 4\det\boldsymbol{C})$ は絶対不変量である。

$xyz$ 座標系を $xy$ 面内で原点の周りに角度 $\theta$ だけ回転するとき、３次元ベクトル $(a,b,c)$ はその $(a,b)^\top$ が２次元ベクトルとして変換し、$c$ がスカラとなる。したがって $SO(2)$ の規約表現が次のように得られる。

$$\alpha = a + ib, \quad \alpha^* = a - ib, \quad c \tag{54}$$

重みはそれぞれ 1, $-1$, 0 である。３次元対称行列 $\boldsymbol{C}$ $= (C_{ij})$ はその $2\times 2$ 小行列 $\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$ が２次元対称行列として変換し、$(C_{13}, C_{23})^\top$ $(= (C_{31}, C_{32})^\top)$ が２次元ベクトルとして変換し、$C_{33}$ がスカラである。ゆえに $SO(2)$ の規約表現が次のように得られる [5]。

$$A = C_{11} + C_{22}, \quad B = (C_{11} - C_{22}) + 2iC_{12}$$
$$B^* = (C_{11} - C_{22}) - 2iC_{12}, \quad C = C_{13} + iC_{23}$$
$$C^* = C_{13} - iC_{23}, \quad D = C_{33} \tag{55}$$

重みはそれぞれ 0, 2, $-2$, 1, $-1$, 0 である。３次元反対称行列 $\boldsymbol{W} = (W_{ij})$ は $(W_{32}, W_{13}, W_{21})^\top$ が３次元ベクトルとして変換する。したがって $SO(2)$ の規約表現が次のように得られる [5]。

$$w = W_{32} + iW_{13}, \quad w^* = W_{32} - iW_{13}, \quad W_{21} \tag{56}$$

重みはそれぞれ 1, $-1$, 0 である。一般の３次元行列 $\boldsymbol{A}$ はその対称部分 $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top)/2$ と反対称部分 $\boldsymbol{W}$ $= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\top)/2$ の和に分解され、それぞれから上記のようにして $SO(2)$ の規約表現が作られる [5]。

相対不変量に非零の定数を掛けたものも同じ重みの相対不変量であり、重みが同じ相対不変量の和も同じ重みの相対不変量である。相対不変量の積は重みの和や差を重みとする相対不変量であり、相対不変量の商は重みの差を重みとする相対不変量である。特に重みを打ち消すような積や商は絶対不変量である。３次元ベクトルや３次元行列に関する $SO(2)$ の絶対不変量、相対不変量はすべてこのようにして生成される [5]。