オプティカルフロー基礎行列の最適計算とその信頼性評価

清水 慶行 * 金谷 健一 *

* 群馬大学工学部情報工学科

静止したシーン中を運動するカメラ画像に生じるオプティカルフローは誤差がなければ「エピ極線方程式」を満たす。フローから 3 次元復元を行うためには誤差のあるフローからその係数行列 (「フロー基礎行列」) を推定する必要がある。本論文では必ずしも等方一様でない独立な正規分布に従う誤差のもとでフロー基礎行列を最適に計算する手法を述べる。まず精度の理論限界を導き、次にこれを達成するアルゴリズムを記述する。これは「分解可能条件」と呼ばれる拘束を考慮せずにくりこみ法によりフロー基礎行列を計算し、次にこれが分解可能条件を満たすように補正するものである。そして本手法の精度が理論限界を実際に達成していることを実験的に検証する。本アルゴリズムにより最適解が得られるだけでなく、その信頼性も同時に評価される。シミュレーションおよび実画像実験によりエピ極点の信頼性を評価する例を示す。

キーワード: フロー基礎行列、くりこみ法、エピ極点、信頼性評価、焦点距離、精度の理論限界

Optimal Computation of the Optical Flow Fundamental Matrix and Its Reliability Evaluation

Yosiyuki Shimizu* and Kenichi Kanatani*

*Department of Computer Science
Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan

The optical flow observed by a moving camera satisfies the epipolar equation in the absence of noise. In order to recover 3-D, we need to estimate its coefficient matrix (the optical flow fundamental matrix). This paper presents an optimal algorithm for computing it in the presence of independent Gaussian noise not necessarily isotropic or homogeneous. We first derive a theoretical accuracy bound and then present an algorithm that attains it. This algorithm first applies a technique called renormalization without considering the decomposability condition and then corrects the solution to impose the condition. We demonstrate by experiments that our algorithm indeed attains the accuracy bound. Hence, our algorithm is optimal in the strict sense: no further improvement is possible. Our algorithm produces not only an optimal estimate but also evaluates its reliability. We show simulated and real-image examples of evaluating the reliability of the computed epipoles.

Key words: fundamental matrix, renormalization, epipole, reliability evaluation, theoretical accuracy bound, renormalization

謝辞: 本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究 C (2) (No. 11680377) によった。

*376-8515 桐生市天神町 1–5–1 群馬大学工学部情報工学科, Tel: (0277)30-1841, Fax: (0277)30-1801
E-mail: shimizu@ail.cs.gunma-u.ac.jp, kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

1. 序論

動画像から 3 次元情報を抽出する方法としては 2 通りの方法がある。一つは連続する画像の対応点から「基礎行列」を計算するものであり、多くの研究がある [9, 25, 34, 35]。もう一つは画像上の点の移動を瞬間速度場 (オプティカルフロー) とみなして解析するものである [7, 30]。現段階では両者の得失を比較することは難しいが、本論文ではオプティカルフローに基く方法を試みる。

オプティカルフローは普通は「勾配拘束条件」と呼ばれる微分方程式を利用して画像の濃淡値から直接に計算される [1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 36]。この計算は比較的容易であり、全画素に渡ってフローが求まるが、微分を差分で近似したり滑らかさの拘束や正則化などの恣意的な条件を用いるため精度が不十分であり、3 次元復元には向いていない。本論文では有限個の特徴点の移動がテンプレートマッチングや時空間追跡法などによってよい精度で得られる状況を想定する。

オプティカルフローは誤差がないとき「エピ極線方程式」と呼ばれる式を満たす。その係数は行列の形にまとめられ、有限変位の場合の基礎行列と同じ役割を果たすので、これを「フロー基礎行列」と呼ぶ。本論文の目的は、これを誤差のあるデータからできる限り精度よく推定することである。問題は統計的推定であるから、まず誤差の性質を明らかにしなければならない。誤差のモデルが与えられれば統計的解析によって「その誤差モデルのもとでの最適解」が定まる。しかし、従来は誤差に触れず単に最小二乗法あるいはその変形が適用されている [7, 30]。

この理由は精度よりも特徴点の誤対応に起因する「アウトライア」を除去するほうに重点があったためと思われるが、アウトライア検出に有効な手法によってアウトライアを除去した後でアウトライアのない場合の高精度手法を適用すべきである。また、従来は単に種々の手法の実験結果を互いに比較しているのみであるが、手法の最適性は精度の理論限界と比較して初めて実証される。これを達成していなければ改良の余地があるし、達成していればもはや改良の余地がない。したがって理論限界を導き、これと比較することが不可欠である。

本論文では「各特徴点の誤差が微小かつランダムであり互いに独立で期待値 0 の正規分布に従う」というモデルのもとでのフロー基礎行列の最適計算アルゴリズムを述べる。ただし誤差分布は最も一般的なものとし、「一様性」(場所によらない) も「等方性」(方向によらない) も仮定しない。まずこのモデルのもとでの精度の理論限界を示す。次にこれを達成するアルゴリズムを記述し、実際に限界に到達していることを実験的に示す。したがって、本アルゴリズムは厳密な意味で「最適」であり、仮定した誤差モデルのもとではもはや改良の余地はない。

このアルゴリズムは単に最適解を計算するのみならず、計算した解の信頼性も同時に評価する。したがって、計算したフロー基礎行列から 3 次元復元を行えば復元した 3 次元形状の信頼性も評価することができる。

カメラがあらかじめキャリブレーションされ、焦点距離が既知の透視変換と仮定できれば、フロー基礎行列はより複雑な拘束条件 (「分解可能条件」[12]) が課される。この場合の最適推定は既になされ、それによる 3 次元復元の信頼性も評価されている [14, 22]。本論文のアルゴリズムは分解可能条件を簡単化したものである。

2. フロー基礎行列

任意の画像座標系により表された N 組の対応点 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\{(x'_\alpha, y'_\alpha)\}$, $\alpha = 1, ..., N$(単位は画素) から次のように「フロー」と「中点」を表すベクトルを定義する。

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha = \begin{pmatrix} (x'_\alpha - x_\alpha)/f_0 \\ (y'_\alpha - y_\alpha)/f_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}_\alpha = \begin{pmatrix} (x_\alpha + x'_\alpha)/2f_0 \\ (y_\alpha + y'_\alpha)/2f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

f_0 はスケール因子 (単位は画素) であり、x_α/f_0, y_α/f_0, x'_α/f_0, y'_α/f_0 が $O(1)$ となるように選ぶ[1]。このとき拘束条件

$$\sum_{k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} W_{kl} C_{ij} W_{mn} = 0 \tag{2}$$

を満たすある反対称行列 $\boldsymbol{W} = (W_{ij})$ と対称行列 $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ が存在して

$$(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha) + (\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\alpha) = 0 \tag{3}$$

となっているとき、$\{\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha\}$, $\alpha = 1, ..., N$ はエピ極線拘束条件を満たすといい、式 (2) をエピ極線方程式

[1] 例えば画像サイズを用いればよい。カメラの焦点距離 (単位は画素) の近似値が既知なら、それを用いてもよい。

と呼ぶ [14]。また式 (2) を分解可能条件と呼ぶ [14]。ただし、本論文ではベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ と表す。ε_{ijk} はエディングトンのイプシロンであり、(ijk) が (123) の偶順列のとき 1、奇順列のとき -1、その他は 0 をとる。

式 (3) はフローが、静止したシーン中を焦点距離を変えながら瞬間運動をするカメラから観測したものであるための必要十分条件である [7, 14, 22]。そして行列 $\boldsymbol{W},\ \boldsymbol{C}$ がわかればカメラの 3 次元運動と焦点距離およびその変化が解析的公式により計算できる [7]。両者の和

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{C} \tag{4}$$

をフロー基礎行列と呼ぶ。これがわかれば $\boldsymbol{W},\ \boldsymbol{C}$ は次のように与えられる。

$$\boldsymbol{W} = A[\boldsymbol{F}], \qquad \boldsymbol{C} = S[\boldsymbol{F}] \tag{5}$$

ただし、$A[\cdot],\ S[\cdot]$ はそれぞれ反対称化作用素、対称化作用素であり、$A[\boldsymbol{A}] = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^\top)/2,\ S[\boldsymbol{A}] = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top)/2$ と定義する。式 (3) より $\boldsymbol{W}, \boldsymbol{C}$ はスケールの不定性があるので $\boldsymbol{F}$ のスケールも不定である。そこで $\|\boldsymbol{F}\| = 1$ と正規化する。ただし、行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ のノルムは $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}^2}$ と定義する。分解可能条件 (2) をフロー基礎行列 $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ で表すと次のようになる。

$$\sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}F_{ij}F_{kl}F_{mn} = 0 \tag{6}$$

行列 $\boldsymbol{W}$ の非対角要素を取り出してベクトル $\boldsymbol{w}$ を

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} W_{32} \\ W_{13} \\ W_{21} \end{pmatrix} \tag{7}$$

と定義すると分解可能条件は次のようにも書ける。

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{w}) = 0 \tag{8}$$

3. 誤差モデル

ベクトル $\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha,\ \boldsymbol{x}_\alpha$ の真の値を $\bar{\dot{\boldsymbol{x}}}_\alpha,\ \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ とし、次のように書く。

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha = \bar{\dot{\boldsymbol{x}}}_\alpha + \Delta\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha, \qquad \boldsymbol{x}_\alpha = \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{x}_\alpha \tag{9}$$

$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha,\ \Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ を期待値 0 の正規分布に従う独立な確率変数とみなし、その共分散行列をそれぞれ $V[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]$, $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ とする。ただし、これらの絶対的に大きさを知る必要はなく、その相対的な傾向のみ既知とする。そして

$$V[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha],\ \ V[\boldsymbol{x}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \tag{10}$$

と書き、未知の定数 ϵ をノイズレベルと呼ぶ。$V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha],\ V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ は誤差の場所や方向への相対的な依存を表し、正規化共分散行列と呼ぶ。ベクトル $\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\boldsymbol{x}_\alpha$ は第 3 成分がそれぞれ 0、1 であるため $V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]$, $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ は第 3 行第 3 列が 0 の特異行列である。誤差の出方に特に傾向がない場合はデフォルトとして、$(x_\alpha, y_\alpha),\ (x'_\alpha, y'_\alpha)$ の誤差の分布は場所や方向によらないとみなす。このとき次のようになる。

$$V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha] = 2\mathrm{diag}(1,1,0),\ \ V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] = \frac{1}{2}\mathrm{diag}(1,1,0) \tag{11}$$

ただし $\mathrm{diag}(\cdots)$ は $\cdots$ を対角要素とする対角行列を表す。

問題は $\{\bar{\dot{\boldsymbol{x}}}_\alpha,\ \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\}$ がエピ極線方程式 (2) を満たすとき、誤差のある $\{\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha\}$ からフロー基礎行列 $\boldsymbol{F}$ を推定することである。

4. 精度の理論限界

フロー基礎行列 $\boldsymbol{F}$ のある推定値を $\hat{\boldsymbol{F}}$ とし、その真の値を $\bar{\boldsymbol{F}}$ とする。この共分散テンソル $\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{F}}]$ を次のように定義する。

$$\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{F}}] = E[\mathcal{P}\Big((\hat{\boldsymbol{F}} - \bar{\boldsymbol{F}}) \otimes (\hat{\boldsymbol{F}} - \bar{\boldsymbol{F}})\Big)\mathcal{P}^\top] \tag{12}$$

右辺の $E[\cdot]$ は期待値を表す。演算 $\otimes$ はテンソル積であり、行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij}), \boldsymbol{B} = (B_{ij})$ に対して $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ は $(ijkl)$ 要素が $A_{ij}B_{kl}$ のテンソルである。またテンソル $\mathcal{P} = (P_{ijkl}), \mathcal{T} = (T_{ijkl})$ に対して $\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{P}^\top$ は $(ijkl)$ 要素が $\sum_{m,n,p,q=1}^{3} P_{ijmn}P_{klpq}T_{mnpq}$ のテンソルである。式 (12) 中の $\mathcal{P} = (P_{ijkl})$ は次のように定義された射影テンソルである。

$$P_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \bar{F}_{ij}\bar{F}_{kl} \tag{13}$$

ただし δ_{ij} はクロネッカデルタであり、$i = j$ のとき 1、そうでないとき 0 をとる。モーメントテンソル $\bar{\mathcal{M}} = (\bar{M}_{ijkl})$ を次のように定義する。

$$\bar{M}_{ijkl} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \bar{W}_\alpha \Big(\frac{\bar{x}_{\alpha(i)}\bar{\dot{x}}_{\alpha(j)} - \bar{x}_{\alpha(j)}\bar{\dot{x}}_{\alpha(i)}}{2} + \bar{x}_{\alpha(i)}\bar{x}_{\alpha(j)} \Big) \Big(\frac{\bar{x}_{\alpha(k)}\bar{\dot{x}}_{\alpha(l)} - \bar{x}_{\alpha(l)}\bar{\dot{x}}_{\alpha(k)}}{2} + \bar{x}_{\alpha(k)}\bar{x}_{\alpha(l)} \Big) \tag{14}$$

ここに $\bar{\dot{x}}_{\alpha(i)},\ \bar{x}_{\alpha(i)}$ はそれぞれベクトル $\bar{\dot{\boldsymbol{x}}}_\alpha,\ \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ の第 i 成分である。$\bar{W}_\alpha$ は次のように与えられる。

$$\bar{W}_\alpha = 1 \Big/ \Big((\bar{\boldsymbol{W}}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]\bar{\boldsymbol{W}}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) + (\bar{\boldsymbol{W}}\bar{\dot{\boldsymbol{x}}}_\alpha + 2\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha](\bar{\boldsymbol{W}}\bar{\dot{\boldsymbol{x}}}_\alpha + 2\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)) \Big) \tag{15}$$

ただし $\bar{\boldsymbol{W}}$, $\bar{\boldsymbol{C}}$ は行列 $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{C}$ の真の値である。このとき統計的最適化理論 [14] から共分散テンソル $\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{F}}]$ の下界が次のように得られる。

$$\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{F}}] \succ \frac{\epsilon^2}{N}\Big(\mathcal{P}^{\mathcal{S}}\bar{\mathcal{M}}\mathcal{P}^{\mathcal{S}\top}\Big)^{-}_{7} \tag{16}$$

ここにテンソル $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ に対して $\mathcal{T} \succ \mathcal{S}$ は $\mathcal{T} - \mathcal{S}$ が半正値テンソル (固有値がすべて非負のテンソル) であることを意味する。$\mathcal{P}^{\mathcal{S}} = (P^{\mathcal{S}}_{ijkl})$ は次のように定義された射影テンソルである。

$$P^{\mathcal{S}}_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\bar{K}_{ij}\bar{K}_{kl}}{\|\bar{\boldsymbol{K}}\|^2} \tag{17}$$

行列 $\bar{\boldsymbol{K}} = (\bar{K}_{ij})$ は次のように定義する。

$$\bar{K}_{ij} = \sum_{k,l,m,n=1}^{3} (\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\bar{F}_{kl} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}(\bar{F}_{kl} + \bar{F}_{lk}))\bar{F}_{mn} \tag{18}$$

テンソル $\mathcal{T}$ と行列 $\boldsymbol{A}$ に対して $\mathcal{T}\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A}$ となるとき、行列 $\boldsymbol{A}$ はテンソル $\mathcal{T}$ の固有値 λ の固有行列であるという。テンソル $\mathcal{T} = (T_{ijkl})$ と行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ の積 $\mathcal{T}\boldsymbol{A}$ は (ij) 要素が $\sum_{k,l=1}^{3} T_{ijkl}A_{kl}$ の行列である。テンソル $\mathcal{T}$ の固有値と固有行列は $\mathcal{T}$ を 9×9 行列と同一視して固有値を計算し、9 次元固有ベクトルを 3×3 行列と同一視すればよい [14]。$(\cdot)^{-}_{r}$ はランクを r に拘束した一般逆テンソルである。テンソル $\mathcal{T}$ の固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_9$、対応するノルム 1 の固有行列を $\boldsymbol{U}_1$, ..., $\boldsymbol{U}_9$ とする。$\lambda_r > 0$ となる r に対して $\mathcal{T}^{-}_{r}$ は次のように計算される。

$$\mathcal{T}^{-}_{r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\boldsymbol{U}_i \otimes \boldsymbol{U}_i}{\lambda_i} \tag{19}$$

推定値 $\hat{\boldsymbol{F}}$ の平方平均二乗誤差 (root-mean-square error) を次のように定義する。

$$\mathrm{rms}[\hat{\boldsymbol{F}}] = \sqrt{E[\|\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{F}} - \bar{\boldsymbol{F}})\|^2]} \tag{20}$$

射影テンソル $\mathcal{P}$ の定義より、取り得る値の範囲は $0 \leq \mathrm{rms}[\hat{\boldsymbol{F}}] \leq 1$ である。式 (16) から次の理論的下界が得られる。

$$\mathrm{rms}[\hat{\boldsymbol{F}}] \geq \sqrt{\mathrm{tr}\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{F}}]} \tag{21}$$

ただし、テンソル $\mathcal{T} = (T_{ijkl})$ のトレース $\mathrm{tr}\mathcal{T}$ を次のように定義する。

$$\mathrm{tr}\mathcal{T} = \sum_{k,l=1}^{3} T_{klkl} \tag{22}$$

注： $\boldsymbol{F}$ はその 9 個の要素を座標とする 9 次元空間 $\mathcal{R}^9$ の 1 点とみなせる。この空間の中で分解可能条件 (6) を満たす点の集合は 8 次元代数多様体 $\mathcal{S}$ となる。そして、$\mathcal{S}$ 上の点 $\bar{\boldsymbol{F}}$ における接空間 $T_{\bar{\mathbf{F}}}(\mathcal{S})$ への射影テンソル $\mathcal{P}^{\mathcal{S}} = (P^{\mathcal{S}}_{ijkl})$ が式 (17) で与えられる。一方、正規化 $\|\boldsymbol{F}\| = 1$ より $\boldsymbol{F}$ はその空間中の原点を中心とし、半径 1 の 8 次元球面 S^8 上にある。式 (13) は S^8 上の点 $\bar{\boldsymbol{F}}$ における接空間 $T_{\bar{\mathbf{F}}}(S^8)$ への射影テンソルに他ならない。したがって $\boldsymbol{F}$ は S^8 と $\mathcal{S}$ の交わりに拘束されている。そして $T_{\bar{\mathbf{F}}}(\mathcal{S})$ は $\bar{\boldsymbol{F}}$ において $\bar{\boldsymbol{K}}$ と直交する線形空間であり、$T_{\bar{\mathbf{F}}}(S^8)$ は $\bar{\boldsymbol{F}}$ において $\bar{\boldsymbol{F}}$ と直交する線形空間である。ただし行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ の内積を $(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{3} A_{ij}B_{ij}$ と定義する。さらに $\bar{\boldsymbol{F}}$ と $\bar{\boldsymbol{K}}$ が直交することが分解可能条件 (6) から次のように示せる。

$$\begin{aligned}(\bar{\boldsymbol{K}};\bar{\boldsymbol{F}}) &= \sum_{i,j=1}^{3}\bar{F}_{ij}\sum_{k,l,m,n=1}^{3}(\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\bar{F}_{kl} \\ &\quad +\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}(\bar{F}_{kl}+\bar{F}_{lk}))\bar{F}_{mn} \\ &= \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3}\bar{F}(\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\bar{F}_{ij}\bar{F}_{kl}\bar{F}_{mn} \\ &\quad +\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\bar{F}_{ij}\bar{F}_{kl}\bar{F}_{mn} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}\bar{F}_{ij}\bar{F}_{lk}\bar{F}_{mn}) \\ &= 3\sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}\bar{F}_{ij}\bar{F}_{kl}\bar{F}_{mn} = 0\end{aligned} \tag{23}$$

この結果、射影テンソル $\mathcal{P}^{\mathcal{S}}$ は接空間 $T_{\bar{\mathbf{F}}}(S^8)$ をそれ自身の中に射影する。定義よりモーメントテンソル $\bar{\mathcal{M}}$ の定義域は接空間 $T_{\bar{\mathbf{F}}}(S^8)$ であるが式 (16) の右辺の定義域は $T_{\bar{\mathbf{F}}}(\mathcal{S}) \cap T_{\bar{\mathbf{F}}}(S^8)$ である。これは $\bar{\boldsymbol{F}}$ における 7 次元空間であり、その零空間は $\bar{\boldsymbol{F}}$ と $\bar{\boldsymbol{F}}^{\dagger\top}$ の張る 2 次元空間である。

5. アルゴリズムの概要

以下に述べるアルゴリズムは 2 段階から成る。第 1 段階では分解可能条件 (6) を考えずにくりこみ法 [13, 14] と呼ぶ手法を用いて $\boldsymbol{F}$ を最適に計算する。これは最小二乗法による解を計算してはそれに含まれる統計的偏差を逐次的に除去するものである。第 2 段階では第 1 段階で得られる $\boldsymbol{F}$ の共分散テンソル $\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{F}}]$ に基づいて分解可能条件 (6) が満たされるように最適に補正する。これは $\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{F}}]$ に関するマハラノビス距離を最小化するものである。

5.1 くりこみ法

1. $c = 0$, $W_\alpha = 1$, $\alpha = 1$, ..., N, $J = \infty$ と置く。% 実際の計算では ∞ は十分大きい数とする (例: 10^{10})。
2. 次のようにテンソル $\mathcal{M} = (M_{ijkl})$, $\mathcal{N} = (N_{ijkl})$

を計算する。

$$M_{ijkl} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \Big(\frac{x_{\alpha(i)}\dot{x}_{\alpha(j)} - x_{\alpha(j)}\dot{x}_{\alpha(i)}}{2} + x_{\alpha(i)}x_{\alpha(j)}\Big)\Big(\frac{x_{\alpha(k)}\dot{x}_{\alpha(l)} - x_{\alpha(l)}\dot{x}_{\alpha(k)}}{2} + x_{\alpha(k)}x_{\alpha(l)}\Big) \tag{24}$$

$$\begin{aligned} N_{ijkl} = \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha \Big(&\frac{1}{4}(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ik}\dot{x}_{\alpha(j)}\dot{x}_{\alpha(l)} \\ &- V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{il}\dot{x}_{\alpha(j)}\dot{x}_{\alpha(k)} - V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jk}\dot{x}_{\alpha(i)}\dot{x}_{\alpha(l)} \\ &+ V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jl}\dot{x}_{\alpha(i)}\dot{x}_{\alpha(k)}) \\ &+ \frac{1}{2}(V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ik}x_{\alpha(l)}\dot{x}_{\alpha(j)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{il}x_{\alpha(k)}\dot{x}_{\alpha(j)} \\ &- V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jk}x_{\alpha(l)}\dot{x}_{\alpha(i)} - V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jl}x_{\alpha(k)}\dot{x}_{\alpha(i)} \\ &+ V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ik}x_{\alpha(j)}\dot{x}_{\alpha(l)} - V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{il}x_{\alpha(j)}\dot{x}_{\alpha(k)} \\ &+ V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jk}x_{\alpha(i)}\dot{x}_{\alpha(l)} - V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jl}x_{\alpha(i)}\dot{x}_{\alpha(k)}) \\ &+ \frac{1}{4}(V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]_{jl}x_{\alpha(i)}x_{\alpha(k)} - V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]_{jk}x_{\alpha(i)}x_{\alpha(l)} \\ &- V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]_{il}x_{\alpha(j)}x_{\alpha(k)} + V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]_{ik}x_{\alpha(j)}x_{\alpha(l)}) \\ &+ V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ik}x_{\alpha(j)}x_{\alpha(l)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{il}x_{\alpha(j)}x_{\alpha(k)} \\ &+ V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jk}x_{\alpha(i)}x_{\alpha(l)} + V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{jl}x_{\alpha(i)}x_{\alpha(k)}\Big) \end{aligned} \tag{25}$$

% $\dot{x}_{\alpha(i)}$, $x_{\alpha(i)}$ はそれぞれベクトル $\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha$ の第 i 成分であり、$V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]_{ij}$, $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]_{ij}$ はそれぞれ $V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]$, $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ の (ij) 要素である。

3. テンソル $\mathcal{M}$ の 9 個の固有値 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_9$ と対応するノルム 1 の固有行列の正規直交系 $\{\boldsymbol{F}_1, ..., \boldsymbol{F}_9\}$ を計算する。
4. 次の計算を行う。

- c を次のように更新する。

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda_9}{(\boldsymbol{F}_9, \mathcal{N}\boldsymbol{F}_9)} \tag{26}$$

- W_α, $\alpha = 1, ..., N$ を次のように計算する。

$$W_\alpha = 1\Big/\Big((\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_\alpha, V_0[\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha]\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}_\alpha) + (\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha + 2\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha](\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha + 2\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\alpha))\Big) \tag{27}$$

- 式 (25) によってテンソル $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ を計算する。
- 次の計算を行う。

$$J' \leftarrow J, \quad J \leftarrow (\boldsymbol{F}_9, \mathcal{M}\boldsymbol{F}_9) \tag{28}$$

- $J' < J$ であれば $J \leftarrow J'$ とする。
- そうでなければ次のテンソルの 9 個の固有値 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_9$ と対応するノルム 1 の固有行列の正規直交系 $\{\boldsymbol{F}_1, ..., \boldsymbol{F}_9\}$ を計算する。

$$\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} - c\mathcal{N} \tag{29}$$

5. これを $J' \leq J$ または $|\lambda_9| \approx 0$ となるまで反復する。% これによって収束が保証される。

5.2 最適補正

1. くりこみ法で得られた行列 $\boldsymbol{F}_9$ を $\boldsymbol{F}$ とする。
2. 二乗ノイズレベルの推定値 $\hat{\epsilon}^2$ を次のように計算する。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{J}{1 - 8/N} \tag{30}$$

3. $\boldsymbol{F}$ の正規化共分散テンソルを次のように計算する。

$$\mathcal{V}_0[\boldsymbol{F}] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{8} \frac{\boldsymbol{F}_i \otimes \boldsymbol{F}_i}{\lambda_i} \tag{31}$$

4. 次のように関数 $E(\boldsymbol{F})$ を定義する。

$$D(\boldsymbol{F}) = \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}F_{ij}F_{kl}F_{mn} \tag{32}$$

5. $D(\boldsymbol{F}) \approx 0$ となるまで次の計算を反復する。

- 次の行列 $\boldsymbol{K} = (K_{ij})$ を計算する。

$$K_{ij} = \sum_{k,l,m,n=1}^{3} \Big(\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn}F_{kl} + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}(F_{kl} + F_{lk})\Big)F_{mn} \tag{33}$$

- 行列 $\boldsymbol{F}$ を次のように更新する。

$$\boldsymbol{F} \leftarrow N[\boldsymbol{F} - \frac{D(\boldsymbol{F})\mathcal{V}_0[\boldsymbol{F}]\boldsymbol{K}}{(\boldsymbol{K}, \mathcal{V}_0[\boldsymbol{F}]\boldsymbol{K})}] \tag{34}$$

% $N[\cdot]$ はノルムを 1 とする正規化作用素である。

- 射影テンソル $\mathcal{P} = (P_{ijkl})$ を次のように定義する。

$$P_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - F_{ij}F_{kl} \tag{35}$$

- 正規化共分散テンソル $\mathcal{V}_0[\boldsymbol{F}]$ を次のように更新する。

$$\mathcal{V}_0[\boldsymbol{F}]_{ijkl} \leftarrow \sum_{m,n,p,q=1}^{3} P_{ijmn}P_{klpq}\mathcal{V}_0[\boldsymbol{F}]_{mnpq} \tag{36}$$

% $\boldsymbol{F}$ の誤差は $\boldsymbol{F}$ に直交するので、$\boldsymbol{F}$ が変われば誤差の定義域も変わる。上式は誤差の挙動を新しい接空間 $T_{\mathbf{F}}(S^8)$ に射影するものである。

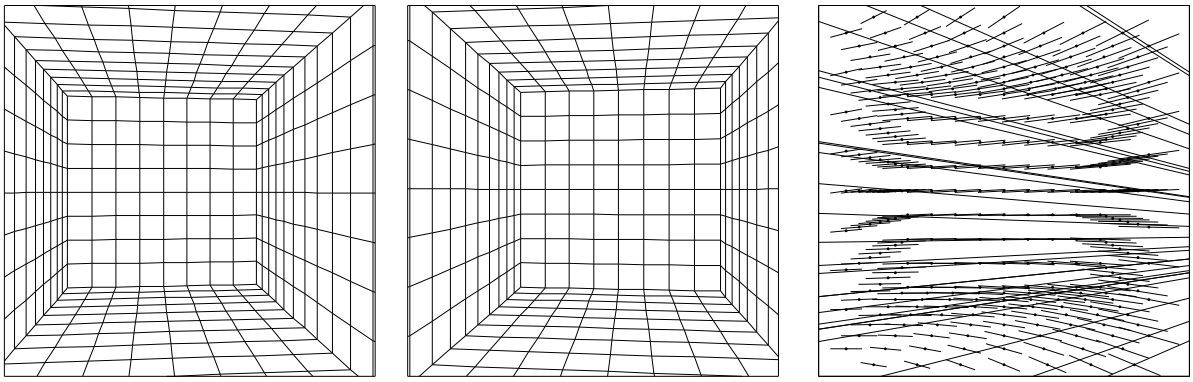


図 1: 2 枚のシミュレーション画像とそのフローおよびエピ極線。

6. エピ極点とエピ極線

フローのエピ極点を式 (7) のベクトルの表す点

$$\boldsymbol{x}_e = Z[\boldsymbol{w}] \tag{37}$$

であると定義する。ただし $Z[\cdot]$ は第 3 成分を 1 とする正規化作用素である。エピ極点は画像上のカメラの並進方向を示す点である。ただし焦点距離が与えられない限り、その物理的な方向を知ることはできない。

エピ極線を次の直線と定義する。

$$(\boldsymbol{n}_\alpha, \boldsymbol{x}) = 0, \qquad \boldsymbol{n}_\alpha = N[\boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{x}_e] \tag{38}$$

$\boldsymbol{n}$ はこの直線のＮベクトルと呼ばれる [11, 12]。定義より、すべてのエピ極線はエピ極点 $\boldsymbol{x}_e$ で交わる。カメラが回転しなければフローはエピ極線に沿う発散、収束する。カメラが回転するとフローは渦パタンをとる。

データに誤差があるとき、エピ極点 $\boldsymbol{x}_e$ の共分散行列は固有値問題の摂動定理 [14] を用いて次のように導ける。

$$V[\boldsymbol{x}_e] = \frac{\boldsymbol{Q}_{\bar{\mathbf{x}}_e} V[\boldsymbol{w}] \boldsymbol{Q}_{\bar{\mathbf{x}}_e}^\top}{(\boldsymbol{k}, \bar{\boldsymbol{w}})^2} \tag{39}$$

ただしバーは真の値を意味し、射影行列 $\boldsymbol{Q}$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{Q}_{\mathbf{x}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{k}^\top \tag{40}$$

式 (39) 中のベクトル $\boldsymbol{w}$ の共分散行列 $V[\boldsymbol{w}]$ の (ij) 要素は次のように与えられる。

$$V[\boldsymbol{w}]_{ij} = \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jmn} \mathcal{V}_0[\boldsymbol{F}]_{klmn} \tag{41}$$

7. シミュレーション実験

図 1は移動するカメラで焦点距離を変えながら撮影した格子パタンからなる環境モデルのシミュレーション画像 (512×512 画素) と、それから抽出したオプティカルフローである。その中点を通るいくつかのエピ極線も重ねてある。この 2 画像中の格子点の x, y 座標に独立に期待値 0、標準偏差 σ(画素) の正規乱数を独立に加え、それを対応点としてフロー基礎行列を計算した。5.1 節のくりこみ法は収束が保証されており、通常は 3, 4 回の反復で収束する。

図 2は横軸を σ とし、各 σ に対して異なる誤差を加えて 100 回計算して、平方平均二乗誤差

$$\sqrt{\frac{1}{100}\sum_{a=1}^{100} \|\mathcal{P}(\hat{\boldsymbol{F}}^a - \bar{\boldsymbol{F}})\|^2} \tag{42}$$

をプロットしたものである ($\hat{\boldsymbol{F}}^a$ は a 回目の推定値、$\bar{\boldsymbol{F}}$ は真の値、$\mathcal{P}$ は式 (35) の射影テンソル)。□ が本手法によるものであり、破線は式 (21) の理論的下界である。● は 5.1 節のくりこみ法のみを行い、5.2 節の最適補正を行わない場合である。また △ は最小二乗法 (代数的距離最小法) によるものである。これは式 (3) から直接に

$$\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^{N} \Big((\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}_\alpha) + (\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_\alpha) \Big)^2 \to \min \tag{43}$$

とするものであり、5.1 節のくりこみ法のステップ 4 の反復を行わないものに相当している。

図からわかるように、フロー基礎行列はわずかな誤差にも大きく左右される。しかし、これは本手法が不十分だからではない。本手法は精度の理論限界に到達しており、これ以上の精度を得ることが原理的に不可能だからである。図 3は図 2の計算のワークステーション Sun Ultra-30 (SunOS 5.6) 上での平均実行時間である。当然ながら、本手法は最小二乗法に比べて時間がかかるが、この程度の計算時間で精度を限界まで高めることができるともいえる。

図 4(a) は図 1のエピ極点付近を拡大したものであり、これに $\sigma = 0.5$(画素) として誤差をいろいろに

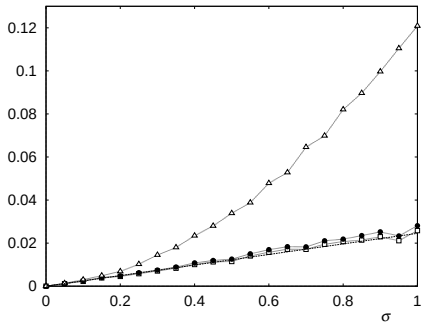


図 2: 計算したフロー基礎行列の平方平均二乗誤差。□: 本手法、 ●: 最適補正を行わない場合、 △: 最小二乗法。破線は理論的下界。

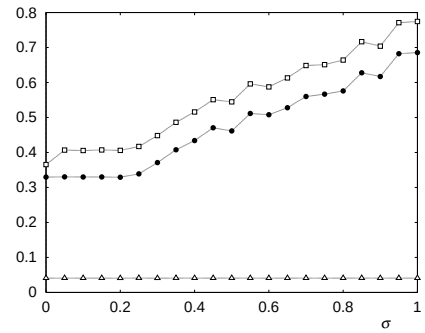


図 3: 平均実行時間 (秒)。□: 本手法、 ●: 最適補正を行わない場合、 △: 最小二乗法。

変えて計算したエピ極点を 100 点プロットしている。楕円は真のエピ極点 $\bar{\boldsymbol{x}}_e$ を中心とし、式 (39) の共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_e]$ を表すものである (各方向の標準偏差を示す)。再び本手法が理論限界に到達していることがわかる。図 4(b) は最小二乗法による結果である。図からエピ極点の分散が大きいのみならず、統計的偏差が存在することがわかる。

8. 実画像実験

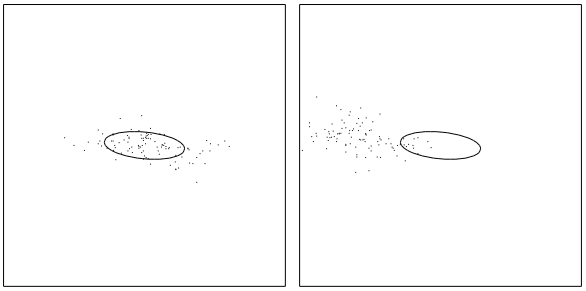
図 5は移動するカメラで焦点距離を変えながら撮影した室内シーンの実画像である (768×512 画素)。これから図中にマークした特徴点を選び、式 (1) に従ってフローと中点を定義し、フロー基礎行列を計算した。そして、得られたエピ極線を抽出したフローに重ねて示した。エピ極点の信頼性 (式 (34) にデータと推定値を代入して計算した $\sqrt{\mathrm{tr}V[\boldsymbol{x}_e]}$) は 12.8 画素である。このように、本手法では最適解が得られるだけでなく、計算した解の信頼性の評価が可能となる。これを用いると、推定したフロー基礎行列から復元した 3 次元形状の信頼性も計算できる [14, 22]。

9. 公開プログラム

本論文に述べたアルゴリズムは C++ により公開プログラムが作成されている[2]。これは最適に計算したフロー基礎行列 $\hat{\boldsymbol{F}}$ だけでなく、その標準偏位 $\boldsymbol{F}^{(+)}$, $\boldsymbol{F}^{(-)}$ も出力する。標準偏位はパラメータ空間で $\hat{\boldsymbol{F}}$ から最も誤差が生じやすい両方向に標準偏差だけずれた値を示すものである。これは式 (16) の右辺にデータと推定値 $\hat{\boldsymbol{F}}$ を代入したテンソルの最大固有値を $\lambda_{\max}$、対応するノルム 1 の固有行列を $\boldsymbol{U}_{\max}$ とするとき、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^{(+)} &= N[\hat{\boldsymbol{F}} + \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{U}_{\max}] \\ \boldsymbol{F}^{(-)} &= N[\hat{\boldsymbol{F}} - \sqrt{\lambda_{\max}}\boldsymbol{U}_{\max}] \end{aligned} \tag{44}$$

例えば $\boldsymbol{F}^{(+)}$ と $\boldsymbol{F}^{(+)}$ が有効数字 3 桁で一致していれば、解 $\hat{\boldsymbol{F}}$ にほぼ有効数字 3 桁の精度があることが保証される。このように、解の信頼性が定量的に評価されるのが特徴である。



(a) (b)

図 4: 図 1の画像のエピ極点の信頼性。(a) 本手法、 (b) 最小二乗法。

よく知られているように、特徴点が「退化」と呼ばれる特殊な配置[3]にあれば、原理的に基礎行列が一意的に定まらない。そこで、計算の過程で式 (44) 中の $\lambda_{\max}$ が 1 程度になる予測される退化と判定し、警告メッセージを出して計算を中止する。

10. まとめ

本論文ではオプティカルフローの満たすエピ極線方程式の係数行列 (「フロー基礎行列」) を必ずしも等方一様でない独立な正規分布に従う誤差のもとで最適に計算する手法を述べた。まず精度の理論限界を導き、次にこれを達成するアルゴリズムを記述した。これはまず分解可能条件を考慮せずにくりこみ法によりフロー基礎行列を計算し、次に分解可能条件を満たすように補正するものである。そして本手法の精度が理論的限界を実際に達成していることを実験的に検証した。したがって、本手法は厳密に最適であり、もはや

[2] http://www.ail.cs.gunma-u.ac.jp/Labo/research.html

[3] 並進が零に近い場合や物体が平面または「臨界曲面」と呼ばれる特殊な 2 次曲面の場合に生じる [12]。

図 5: 実画像とそれから計算したフローおよびエピ極線。

改良の余地はない。また、本アルゴリズムにより最適解が得られるだけでなく、その信頼性も同時に評価される。シミュレーションおよび実画像実験によりエピ極点の信頼性を評価する例を示した。

参考文献

[1] N. Ancona and T. Poggio, Optical flow from 1-D correlation: Application to a simple time-to-clash detection, *Int. J. Comput. Vision*, **14**-2 (1995), 131-146.

[2] A. Bab-Hadiashar and D. Suter, Robust optic flow computation, *Int. J. Comput. Vision*, **29**-1 (1998), 59-77.

[3] A. Bainbridge-Smith and R. G. Lane, Determining optical flow using a differential method, *Image Vision Comput.*, **15**-1 (1997), 11-22.

[4] J. L. Barron, D. J. Fleet and S. S. Beachemin, Performance of optical flow techniques, *Int. J. Comput. Vision*, **12**-1 (1994), 43-77.

[5] M. J. Black and A. D. Jepson, Estimating optical flow in segmented images using variable-order parametric models with local deformations, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **18**-10 (1996), 972-786.

[6] J. W. Brandt, Improved accuracy in gradient-based optical flow estimation, *Int. J. Comput. Vision*, **25**-1 (1997), 1-22.

[7] M. J. Brooks, W. Chojnacki and L. Baumela, Determining the egomotion of an uncalibrated camera from instantaneous optical flow, *J. Opt. Soc. Am.*, A, **14**-10 (1997), 2670-2677.

[8] C. M. Fan, N. M. Namazi and P. B. Penafiel, A new image motion estimation algorithm based on the EM technique, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **18**-3 (1996), 348-352.

[9] O. D. Faugeras, *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*, MIT Press, Cambridge, MA, U.S.A., 1993.

[10] L. Florack, W. Niessen and M. Nielsen, The intrinsic structure of optic flow, *Int. J. Comput. Vision*, **27**-3 (1998), 263-286.

[11] 金谷健一, 画像理解 – 3次元認識の数理 –, 森北出版, 1990.

[12] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.

[13] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994), 201-209.

[14] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1996.

[15] S.-H. Lai and B. C. Vemuri, Reliable and efficient computation of optical flow, *Int. J. Comput. Vision*, **29**-2 (1998), 87-105.

[16] H. Liu, T-H. Hong, M. Herman, T. Camus and R. Chellappa, Accuracy vs efficiency trade-offs in optical flow algorithms, *Comp. Vis. Image Understanding*, **72**-3 (1998), 271–286.

[17] A. Mitiche and P. Bouthemy, Computation and analysis of image motion: A synopsis of current problems and methods, *Int. J. Comput. Vision*, **19**-1 (1996), 29-55.

[18] H.-H. Nagel, Optical flow estimation and interaction between measurement errors at adjacent pixel positions, *Int. J. Comput. Vision*, **15**-3 (1995), 271-288.

[19] P. Nesi, A. Del Bimbo and D. Ben-Tzvi, A robust algorithm for optical flow estimation, *Comput. Vision Image Understanding*, **62**-1 (1995), 59-68.

[20] N. Ohta, Optical flow detection using a general noise model, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E79-D**-7 (1996), 951-957.

[21] N. Ohta, Uncertainty models of the gradient constraint for optical flow computation, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E79-D**-7 (1996), 958-964.

[22] N. Ohta and K. Kanatani, Optimal structure-from-motion algorithm for optical flow, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E78-D**-12 (1995), 1559-1566.

[23] 太田直哉, 齋藤佳明, オプティカルフローの再検出による高精度な形状復元, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J81-D-II**-6 (1998), 1123–1131.

[24] E. P. Ong and M. Spann, Robust optical flow computation based on least-median-of squares regression, *Int. J. Comput. Vision*, **31**-1 (1999), 51–82.

[25] 佐藤淳, 「コンピュータビジョン — 視覚の幾何学 —」, コロナ社, 1999.

[26] H. (S.) Schweitzer, Occam algorithm for computing visual motion, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **17**-11 (1995), 1033-1042.

[27] R. Szeliski and H.-Y. Shum, Motion estimation with quadtree splines, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **18**-12 (1996), 1199-1210.

[28] M. Tistarelli, Multiple constraints to compute optical flow, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **18**-12 (1996), 1243-1250.

[29] D. Vernon, Computation of instantaneous optical flow using the phase of Fourier components, *Imaga Vision Comput.*, **17**-3/4 (1999), 189–199.

[30] T. Viéville and O. D. Faugeras, The first order expansion of motion equations in the uncalibrated case, *Comput. Vision Image Understanding*, **64**-1 (1996), 128–146.

[31] J. Weber and J. Malik, Robust computation of optical flow in multi-scale differential framework, *Int. J. Comput. Vision*, **14**-1 (1995), 67-81.

[32] Y. Xiong and S. A. Shafer, Moment and hypergeometric filters for high precision computation of focus, stereo and optical flow, *Int. J. Comput. Vision*, **22**-1 (1997), 25-59.

[33] Y. Xiong and S. A. Shafer, Hypergeometric filters for optical flow and affine matching, *Int. J. Comput. Vision*, **24**-2 (1997), 163-177.

[34] 徐剛, 辻三郎, 「3次元ビジョン」, 共立出版, 1998.

[35] G. Xu and Z. Zhang, *Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object Recognition: A Unified Approach*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1996.

[36] L. Zhang, T. Sakurai and H. Miike, Detection of motion fields under spatio-temporal non-uniform illumination, *Image Vision Comput.*, **17**-3/4 (1999), 309–320.