

基礎行列の高精度計算法とその性能比較

菅谷 保之 金谷 健一

岡山大学大学院自然科学研究科

本論文では 2 画像の特徴点対応から基礎行列を計算する最尤推定とその KCR 下界との関係を述べ、具体的な数値計算法として FNS 法, HEIV 法, くりこみ法のアルゴリズムをまとめる。さらにガウス・ニュートン反復を用いる方法を追加し、シミュレーション画像を用いてこれらの反復解法の収束性を検討する。反復の初期値はランダムに、最小二乗法で、および Taubin 法で定める 3 通りで比較する。最後に実画像を用いた実験を示す。これらの実験によって各々の計算法の特質が明らかになり、結論として FNS 法が最も収束性に優れていることが示される。

High Accuracy Fundamental Matrix Computation and Its Performance Evaluation

Yasuyuki Sugaya and Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

This paper studies numerical schemes of maximum likelihood estimation for computing the fundamental matrix from feature point correspondences over two images. First, we state the problem and the associated KCR lower bound. Then, we describe the algorithms of three well-known methods, FNS, HEIV, and renormalization, to which we add a new algorithm based on Gauss-Newton iterations. Using simulated images, we compare their convergence properties. The initial value is chosen in three ways: randomly, by least-squares, and by the Taubin method. We also show real image experiments. These experiments reveal characteristics of each method. It is concluded that FNS has the best convergence properties.

1. まえがき

画像の間の特徴点の対応から基礎行列を計算することはカメラ校正, 密な対応探索, 3 次元形状復元, 新しい視点からの画像生成など多くの処理の出発点である。そのため, 誤差のあるデータから基礎行列を精度よく計算する手法がいろいろ研究されている。代表的なものに FNS 法 [2], HEIV 法 [16], くりこみ法 [6, 10, 11] がある。

FNS 法と HEIV 法は共に最尤推定解を計算している。そして, 高次の誤差項を除いて精度の理論限界 (KCR 下界) を達成している [1, 7, 10]。くりこみ法もこれと同等であり [13], 実験的にもこれら 3 手法の精度にほとんど差がない。

しかし, どれも反復解法であり, データの誤差が大きいときは収束までの反復回数に差が表れる。場合によっては収束しないこともある。収束性はデータの誤差のみならず, 反復の初期値に選び方にも依存する。

本論文ではまず FNS 法, HEIV 法, くりこみ法のアルゴリズムを述べ, 最尤推定および KCR 下界との関係を示す。さらに新しい方法としてガウス・ニュー

トン反復によって直接的に解を探索する方法を述べる。そして, これら 4 種類の手法の収束性をシミュレーション実験によって比較する。

FNS 法と HEIV 法についてはその原理通りの方法と, その改良法の両方を調べる。また, 収束性の初期値に対する依存性を調べるために, 反復の初期値はランダムに, 最小二乗法で, および Taubin 法で定める 3 通りで比較する。最後に実画像を用いた実験を示す。

これらの実験によって各々の計算法の特質が明らかになる。そして, 結論として FNS 法が最も収束性に優れていることを示す。

2. 基礎行列の推定

同一シーンを異なる位置から撮影した 2 画像において, 第 1 画像の点 (x, y) と第 2 画像の点 (x', y') がシーンの同一点であれば, 次のエピ極線方程式が成り立つ [5, 9, 10]。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ f_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ f_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

*700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173
{sugaya,kanatani}@suri.it.okayama-u.ac.jp

行列 $F = (F_{ij})$ は基礎行列と呼ばれる．ただし， f_0 は任意の定数である¹．新しいベクトル u, ξ を

$$u = (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33})^\top$$

$$\xi = (xx', xy', xf_0, yx', yy', yf_0, f_0x', f_0y', f_0^2)^\top \quad (2)$$

と置けば，式 (1) は次のように書ける．

$$(u, \xi) = 0 \quad (3)$$

以下，ベクトル a, b の内積を (a, b) と書く．式 (3) においてベクトル u の大きさは不定であるから $\|u\| = 1$ と正規化する．このように，基礎行列の計算は誤差のある 9 次元ベクトルデータ $\{\xi_\alpha\}$ から 9 次元ベクトル u を推定する問題に帰着する．

3. KCR の下界

データベクトル ξ_α を次のように書く．

$$\xi_\alpha = \bar{\xi}_\alpha + \Delta\xi_\alpha \quad (4)$$

ここに $\bar{\xi}_\alpha$ は誤差のない理想的な値であり， $\Delta\xi_\alpha$ は誤差項である． ξ_α の共分散行列を次のように定義する．

$$V[\xi_\alpha] = E[\Delta\xi_\alpha \Delta\xi_\alpha^\top] \quad (5)$$

$E[\cdot]$ は誤差の分布に関する期待値を表す．各対応点の各座標に期待値 0，標準偏差 σ の誤差が独立に加わるとき，式 (2) の第 2 式より，共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ は $O(\sigma^4)$ の項を除いて次のように書ける．

$$V[\xi_\alpha] = \sigma^2 \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 + \bar{x}'_\alpha{}^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}'_\alpha & f_0 \bar{x}'_\alpha & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}'_\alpha \bar{y}'_\alpha & \bar{x}_\alpha^2 + \bar{y}'_\alpha{}^2 & f_0 \bar{y}'_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 \bar{x}'_\alpha & f_0 \bar{y}'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & \bar{y}_\alpha^2 + \bar{x}''_\alpha{}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & \bar{x}'_\alpha \bar{y}'_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_0 \bar{x}'_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}'_\alpha \bar{y}'_\alpha & f_0 \bar{x}'_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{y}_\alpha^2 + \bar{y}'_\alpha{}^2 & f_0 \bar{y}'_\alpha & 0 & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 \bar{y}'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

¹ 数値計算の安定性のためのスケールの調節である．本論文の実験では $f_0 = 600$ としたが， $f_0 = 1$ としても実際的な問題は無いであろう．

ただし， $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ はデータ点 (x_α, y_α) の真の位置であり，最適化の計算においては (x_α, y_α) に置き換えて計算する²．

このとき，データに誤差がある限り，どのような推定を行っても，得られる推定量 \hat{u} の共分散行列 $V[\hat{u}]$ には，下回ることのできない下界が存在することが知られている．ただし，推定量 \hat{u} の共分散行列 $V[\hat{u}]$ を次のように定義する．

$$V[\hat{u}] = E[(P_u \hat{u})(P_u \hat{u})^\top] \quad (7)$$

ここに P_u は次のように定義する射影行列である (I は単位ベクトル)．

$$P_u = I - uu^\top \quad (8)$$

これを作用させるのは， u が単位ベクトルに正規化されているため，その定義域が単位球面であり，これを真値 u における接平面に射影して，その接平面上で誤差を評価するという意味である．

このとき，誤差 $\Delta\xi_\alpha$ の分布を期待値 0，共分散行列 $V[\xi]$ の独立な正規分布とみなせば， \hat{u} の任意の不偏推定量に対して次の不等式が成り立つ [7, 10, 12]．

$$V[\hat{u}] \succ \sigma^2 \left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha] u)} \right)^- \quad (9)$$

ただし， \succ は左辺から右辺を引いたものが半正値対称行列であることを意味し， $(\cdot)^-$ は Moore-Penrose の一般逆行列を表す．また $V_0[\xi_\alpha]$ は式 (6) において $\sigma = 1$ としたものであり，正規化共分散行列と呼ぶ．Chernov ら [1] は式 (9) の右辺を KCR (Kanatani-Cramer-Rao) 下界と呼んだ．そして， \hat{u} が不偏推定量でなくても， $\sigma \rightarrow 0$ で $\hat{u} \rightarrow u$ であれば $O(\sigma^4)$ を除いて式 (9) が成立することを示した．

4. 基礎行列の最尤推定

この問題の最尤推定は，誤差 $\Delta\xi_\alpha$ の分布を期待値 0，共分散行列 $V[\xi]$ の独立な正規分布とみなすと，拘束条件 $(u, \xi_\alpha) = 0, \alpha = 1, \dots, N$ のもとでマハラノビス距離の二乗和

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V_0[\xi_\alpha]^- (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (10)$$

を最小にする $u, \bar{\xi}_\alpha$ を計算することである³．ラグランジュ乗数を導入して拘束条件を除去すれば，式 (10)

² そうしても計算結果はほとんど左右されないことがシミュレーションで確認される．

³ これは ξ に対応する 9 次元空間中に N 点 $\{\xi_\alpha\}$ が与えられたとき，式 (3) の表す超平面を各点の共分散行列で重み付けした距離の二乗和が最小になるように当てはめる問題と解釈できる．

は次式となる [10, 13] .

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2}{(\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\mathbf{u})} \quad (11)$$

これを最小にする最尤推定解 $\hat{\mathbf{u}}_{\text{ML}}$ の共分散行列 $V[\hat{\mathbf{u}}_{\text{ML}}]$ は式 (9) の右辺の KCR の下界に $O(\sigma^4)$ の項を除いて一致することが示せる [10, 13] .

なお, \mathbf{u} には正規化条件 $\|\mathbf{u}\| = 1$ 以外に, 対応する基礎行列 F の行列式が 0 であるという制約がある . しかし, 式 (11) を最小にする単位ベクトル \mathbf{u} が求まった後に, 容易に $\det F = 0$ となるように最適に補正することができる⁴ [10, 13, 15, 17] . この最適補正の手順は付録 A に示すことにして, 以下では制約 $\det F = 0$ を考えない最適化を考察する .

5. FNS 法

式 (11) を最小化するには, \mathbf{u} で微分した式

$$\nabla_{\mathbf{u}} J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)\boldsymbol{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\mathbf{u})} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\mathbf{u}}{(\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\mathbf{u})^2} \quad (12)$$

を 0 と置いた次式を解けばよい⁵ .

$$(M - L)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (13)$$

ただし, 9×9 行列 M, N を次のように置いた .

$$M = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top}{(\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\mathbf{u})}, \quad L = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]}{(\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\mathbf{u})^2} \quad (14)$$

Chojnacki ら [2] の FNS 法は式 (13) の解を次の反復によって計算するものである .

1. \mathbf{u} の初期値を与える .
2. 式 (14) の行列 M, L を計算する .
3. 固有値問題

$$(M - L)\mathbf{u}' = \lambda \mathbf{u}' \quad (15)$$

の絶対値最小固有値 λ に対する単位固有ベクトル \mathbf{u}' を計算する .

4. 符号を除いて $\mathbf{u}' \approx \mathbf{u}$ なら \mathbf{u}' を返して終了する .
5. そうでなければ $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{u}'$ としてステップ 2 に戻る .

⁴これは誤差の高次の項を除けば $\det F = 0$ のもとで式 (11) を最小化するのと精度が同等である . また, 式 (9) の KCR の下界をこの制約を伴うものに修正することができる [17] .

⁵正規化条件 $\|\mathbf{u}\| = 1$ は考慮しなくてよい . なぜなら式 (11) は \mathbf{u} の 0 次同次式であり, \mathbf{u} を定数倍しても J の値は変化しないので, $\nabla_{\mathbf{u}} J$ は \mathbf{u} のノルムを変化させる方向 (= \mathbf{u} の方向) の成分が 0 だからである .

Chojnacki ら [3] は制約条件 $\det F = 0$ を上記の反復中に組み込む方法も示している . しかし, 後に Chojnacki ら [4] はステップ 3 で絶対値最小ではなく, 最小固有値を選ぶほうが収束性が優れていることを述べている . そこで以下では, 上記のものを「オリジナル FNS 法」, 最小固有値を用いるものを「改良 FNS 法」と呼ぶ .

どのように固有値を選んでも, 収束時には $\lambda = 0$ である . なぜなら, 収束時にはある \mathbf{u} に対して

$$(M - L)\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (16)$$

が成り立つので, 両辺と \mathbf{u} との内積をとれば

$$(\mathbf{u}, M\mathbf{u}) - (\mathbf{u}, L\mathbf{u}) = \lambda \quad (17)$$

となる . しかし, 式 (14) より $(\mathbf{u}, M\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, L\mathbf{u})$ が恒等的に成り立つから $\lambda = 0$ でなければならない .

6. HEIV 法

式 (13) は次のようにも書ける .

$$M\mathbf{u} = L\mathbf{u} \quad (18)$$

Leedan ら [16] の HEIV 法はこれを一般固有値問題 $M\mathbf{u} = \lambda L\mathbf{u}$ の反復によって解こうとするものである . しかし, L が正値対称行列ではないので直接には計算できない . そこで次のように置く .

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix} z_\alpha \\ f_0^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ F_{33} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \begin{pmatrix} V_0[z_\alpha] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

そして, 8×8 行列 \tilde{M}, \tilde{L} を次のように置く .

$$\tilde{M} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\tilde{z}_\alpha \tilde{z}_\alpha^\top}{(\mathbf{v}, V_0[z_\alpha]\mathbf{v})}, \quad \tilde{L} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{v}, \tilde{z}_\alpha)^2 V_0[z_\alpha]}{(\mathbf{v}, V_0[z_\alpha]\mathbf{v})^2} \quad (21)$$

ただし, 次のように定義した .

$$\tilde{z}_\alpha = z_\alpha - \bar{z} \quad (22)$$

$$\bar{z} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{z_\alpha}{(\mathbf{v}, V_0[z_\alpha]\mathbf{v})} \bigg/ \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{(\mathbf{v}, V_0[z_\beta]\mathbf{v})} \quad (23)$$

すると, 式 (18) は次のように書き直せる .

$$\tilde{M}\mathbf{v} = \tilde{L}\mathbf{v}, \quad (\mathbf{v}, \bar{z}) + f_0^2 F_{33} = 0 \quad (24)$$

第1式を満たす8次元単位ベクトル v が求めれば, 第2式から F_{33} が求まり, u が次のように与えられる.

$$u = N \left[\begin{pmatrix} v \\ F_{33} \end{pmatrix} \right] \quad (25)$$

ただし, $N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化を表す. 式(24)の第1式を満たす単位ベクトル v は次の反復法によって計算できる.

1. v の初期値を与える.
2. 式(21)の行列 \tilde{M} , \tilde{L} を計算する.
3. 一般固有値問題

$$\tilde{M}v' = \lambda \tilde{L}v' \quad (26)$$

の1に最も近い一般固有値 λ に対する単位一般固有ベクトル v' を計算する(付録B).

4. 符号を除いて $v' \approx v$ なら v' を返して終了する.
5. そうでなければ $v \leftarrow v'$ としてステップ2に戻る.

しかし, Leedanら[16]はステップ3で1に最も近い一般固有値ではなく, 最小一般固有値を選ぶほうが収束性が優れていることを述べている. そこで以下では, 上記のものを「オリジナルHEIV法」, 最小一般固有値を用いるものを「改良HEIV法」と呼ぶ.

どのように一般固有値を選んで, 収束時には $\lambda = 1$ である. なぜなら, 収束時にはある v に対して

$$\tilde{M}v = \lambda \tilde{L}v \quad (27)$$

が成り立つので, 両辺と v との内積をとれば

$$(v, \tilde{M}v) = \lambda (v, \tilde{L}v) \quad (28)$$

となる. しかし, 式(21)より $(v, \tilde{M}v) = (v, \tilde{L}v)$ が恒等的に成り立つから $\lambda = 1$ でなければならない.

7. くりこみ法

くりこみ法[6, 10, 11]は式(14)の第2式の L を次のように近似するものである.

$$L \approx cN, \quad N = \sum_{\alpha=1}^N \frac{V_0[\xi_\alpha]}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)}. \quad (29)$$

そして $M - cN$ が固有値0を持つように定数 c を定める. これは次の反復によって計算できる.

1. u の初期値を与え, $c = 0$ と置く.
2. 式(14)の行列 M と式(29)の行列 N を計算する.

3. 固有値問題

$$(M - cN)u' = \lambda u' \quad (30)$$

の最小固有値 λ に対する単位固有ベクトル u' を計算する.

4. $\lambda \approx 0$ なら u' を返して終了する.
5. そうでなければ

$$c \leftarrow c + \frac{\lambda}{(u', Nu')}, \quad u \leftarrow u' \quad (31)$$

と更新してステップ2に戻る.

このような反復で得られる解の誤差は理論的にはFNS法, HEIV法と同じ次数をもつ[13].

8. ガウス・ニュートン法

式(11)の関数 J の勾配 $\nabla_u J$ が式(12)で与えられるので, ヘッセ行列 $\nabla_u^2 J$ を求めれば, ニュートン法によって J を直接に最小化することができる. ニュートン法による u の増分 Δu は次の連立1次方程式の解である[14].

$$(\nabla_u^2 J)\Delta u = -\nabla_u J \quad (32)$$

しかし, 関数 J が u 方向に一定であるので⁶, ヘッセ行列 $\nabla_u^2 J$ は固有値0の固有ベクトル u をもつ特異行列であり, 式(32)は無数の解をもつ. このとき, 一般逆行列を用いて

$$\Delta u = -(\nabla_u^2 J)^{-} \nabla_u J \quad (33)$$

とすれば, u に直交する方向に Δu が得られる.

式(12)の勾配 $\nabla_u J$ を微分してガウス・ニュートン近似[14] ((u, ξ_α) の項を無視)を行うと, ヘッセ行列 $\nabla_u^2 J$ は式(14)の行列 M そのものになる. これが u を固有値0の固有ベクトル u を持つようになるには, 式(8)の射影行列 P_u を適用すればよい.

以上より, 次のガウス・ニュートン法が得られる.

1. u の初期値を与える.
2. u' を次のように計算する.

$$u' = N[u - (P_u M P_u)^{-} (M - L)u] \quad (34)$$

3. $u' \approx u$ なら u' を返して, 終了する.
4. そうでなければ $u \leftarrow u'$ としてステップ2に戻る.

9. 初期値の設定

以上の方法はどれも反復法であり, 初期値が必要である. 収束性の初期値に対する依存性を調べるために, 次の3種類を考える.

⁶脚注5) 参照.

9.1 ランダム初期化

初期値 u をランダムに選ぶ．具体的には平均 0，標準偏差 1 の正規乱数を独立に 9 個発生させ，それらを成分とするベクトルを単位長に正規化したものを u とする．

9.2 最小二乗法 (代数距離最小化法)

式 (11) の右辺の分母を無視すると，次のように書き直せる．

$$J_{LS} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{u}, \mathbf{M}_{LS} \mathbf{u}) \quad (35)$$

ただし，次のように置いた．

$$\mathbf{M}_{LS} = \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \quad (36)$$

式 (35) は u の 2 次形式であるから，これを最小にする単位ベクトル u は固有値問題

$$\mathbf{M}_{LS} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (37)$$

の最小固有値 λ に対する単位固有ベクトルである [10, 14]．

9.3 Taubin 法

Taubin 法 [18] は，次のように式 (11) の右辺の分母をすべての項の平均値で置き換えるものである．

$$J_{TB} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2}{\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{M}}_{LS} \mathbf{u}) \quad (38)$$

ただし，次のように置いた．

$$\tilde{\mathbf{N}}_{TB} = \sum_{\alpha=1}^N V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] \quad (39)$$

式 (38) は u のレイリー商であるから，これを最小にする単位ベクトル u は一般固有値問題

$$\tilde{\mathbf{M}}_{LS} \mathbf{u} = \lambda \tilde{\mathbf{N}}_{TB} \mathbf{u} \quad (40)$$

の最小一般固有値 λ に対する単位一般固有ベクトルである [10]．しかし， $\tilde{\mathbf{N}}_{TB}$ が正値対称行列でないので⁷，直接には解くことができない．そこで $u, \boldsymbol{\xi}_\alpha$ を式 (19) のように置き， 8×8 行列 $\tilde{\mathbf{M}}_{LS}, \tilde{\mathbf{N}}_{TB}$ を次のように置く．

$$\tilde{\mathbf{M}}_{LS} = \sum_{\alpha=1}^N \tilde{z}_\alpha \tilde{z}_\alpha^\top, \quad \tilde{\mathbf{N}}_{TB} = \sum_{\alpha=1}^N V_0[z_\alpha] \quad (41)$$

⁷各 $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ が式 (20) の形をしていることに注意．

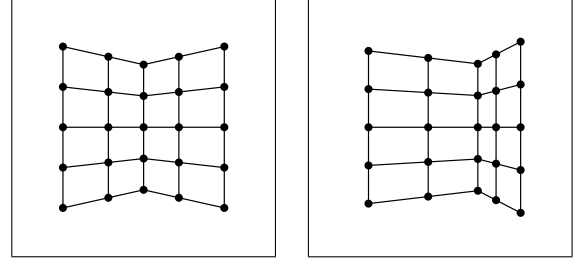


図 1: 2 枚の平面格子シミュレーション画像

ただし，次のように置いた．

$$\tilde{z}_\alpha = z_\alpha - \bar{z}, \quad \bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N z_\alpha \quad (42)$$

すると，式 (40) は次のように書ける．

$$\tilde{\mathbf{M}}_{LS} \mathbf{v} = \lambda \tilde{\mathbf{N}}_{TB} \mathbf{v}, \quad (\mathbf{v}, \bar{z}) + f_0^2 F_{33} = 0 \quad (43)$$

第 1 式の一般固有値問題の最小一般固有値 λ に対応する 8 次元単位一般固有ベクトルを v を求めれば (付録 B)， F_{33} が第 2 式から求まり， u が式 (25) のように与えられる．

10. シミュレーション実験

図 1 はシーン中で角度 60° をなす 2 枚の平面格子を異なる 2 方向から見た画像である．画像サイズは 600×600 画素を想定し，焦点距離は 1200 画素である．画像中の格子点を特徴点として，各点の x, y 座標に平均 0，標準偏差 σ 画素の正規分布に従う乱数誤差を独立に加え，これから FNS 法，HEIV 法，くりこみ法，ガウス・ニュートン法によって基礎行列を計算した．そして， σ を横軸にとり，各 σ に対して 1000 回の独立に試行し，その収束までの反復回数の平均値をプロットした．

加える誤差の範囲は得られる解 \hat{u} の真値 u から u に直交する方向への平方平均二乗誤差が最大でも約 0.5 程度になるように設定した⁸．これはそれ以上の誤差を加えると，もはや意味のある解が得られないと思われるからである⁹．

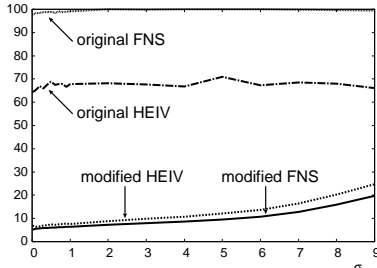
また，反復回数は収束の判定条件に依存するので，すべての手法に対して更新値 u' と前回の反復の値 u が $\|u' - u\| < 10^{-6}$ となったときに終了した¹⁰．

図 2 はランダム初期化に対する結果であり．図 2(a) は FNS 法，HEIV 法に対する固有値の選択方法を比

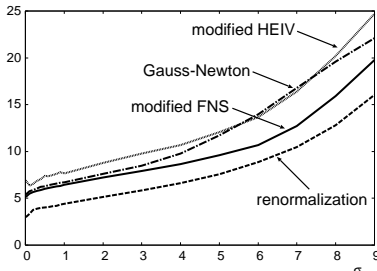
⁸これは解 \hat{u} と真値 u との成す角の平均が最大 30° 程度になることに相当する．

⁹誤差が多いと式 (11) の評価関数 J の関数形が次第に平坦になり，最終的には任意の値が解になり得ると考えられる．

¹⁰ u と $-u$ とは同じ解を表すので，計算では $\|u' \pm u\|$ の小さいほうを用いた．



(a) 固有値の選択



(b) 手法の比較

図 2: ランダム初期化に対する平均反復回数.

較したものである. このときオリジナル FNS 法では試行回数のほぼ 99%, オリジナル HEIV 法ではほぼ 40% が収束しなかった. その場合は反復を 100 回打ち切り, 反復回数を 100 と数えた.

図 2(a) はオリジナル FNS 法, オリジナル HEIV 法に比較して改良 FNS 法, 改良 HEIV 法のほうが明らかに収束性が優れていることを示している. これは次のように説明される.

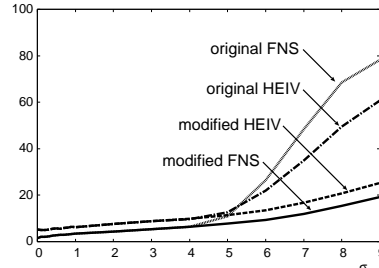
既に指摘したように, FNS 法と HEIV 法でどのように固有値や一般固有値を選んでも, 収束時点ではそれぞれ 0, 1 となる. このとき式 (14) 中の行列 L も式 (21) 中の行列 \tilde{L} も O に近い値となる¹¹. しかし, ランダムに初期値を選ぶと L や \tilde{L} が O からかけ離れた値になる. 式 (15), (26) はそれぞれ次のように書ける.

$$(M - L - \lambda I)u' = 0, \quad (\tilde{M} - \lambda \tilde{L})v' = 0 \quad (44)$$

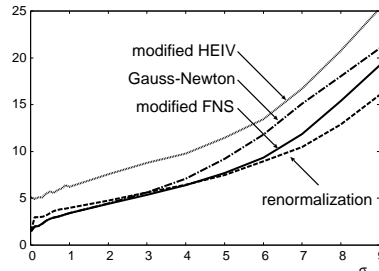
L も \tilde{L} も正値対称行列であるから, その影響を打ち消すためには第 1 式では λ を負に, 第 2 式では λ を 1 より小さい値を選ぶほうが解に近くなると考えられる.

図 2(b) は改良 FNS 法, 改良 HEIV 法, くりこみ法, ガウス・ニュートン法を比較したものである. これからくりこみ法が最も効率的であることがわかる. その理由は次のように考えられる.

¹¹ データに誤差がなければ u の真値に対して $(u, \xi_\alpha) = 0$ であり, v の真値に対して $(v, z_\alpha) = 0$ であるから, 収束時には $(u, \xi_\alpha) \approx 0, (v, z_\alpha) \approx 0$ である.

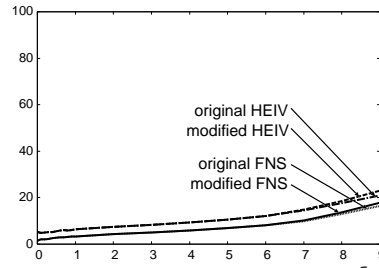


(a) 固有値の選択

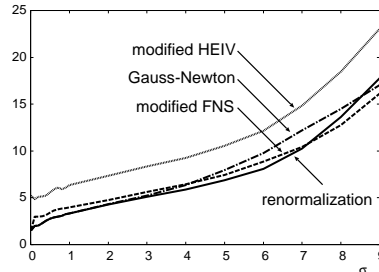


(b) 手法の比較

図 3: 最小二乗法による初期化に対する平均反復回数.



(a) 固有値の選択



(b) 手法の比較

図 4: Taubin 法による初期化に対する平均反復回数.

くりこみ法では式 (30) において $c = 0$ から出発するので, 最初に計算される u 値は M の最小固有値に対する固有ベクトルであり, u の初期値が何であれ最小二乗法の解に近い解が計算される. それに対して, FNS 法と HEIV 法では上述のように, ランダムな初期値に対して L や \tilde{L} が O から離れた値をもつので, 計算される u も解から離れる. ガウス・ニュートン法は当然, 解から離れた値から出発すると収束しにくくなる.

図 3, 4 は初期値をそれぞれ最小二乗法, Taubin 法

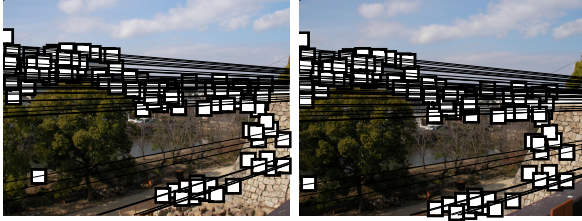


図 5: 実画像上の対応点と計算したエピ極線 .

で定めた場合を同様にプロットしたものである . 図 2(a), 3(a), 4(a) を比較してわかるように , 初期値が向上するとオリジナル FNS 法 , オリジナル HEIV 法と改良 FNS 法 , 改良 HEIV 法との差が少なくなる . これは前述の考察から予想された結果である . さらにオリジナル/改良 HEIV 法よりもオリジナル/改良 FNS 法のほうが収束性がよいことがわかる .

また , 図 2(b), 3(b), 4(b) を比較してわかるように , FNS 法 , HEIV 法 , ガウス・ニュートン法では初期値を改善すると収束性が向上するが , くりこみ法はほとんど変化がない . これは前述のように , くりこみ法はそれ自身で最小二乗法に相当する初期値を作り出しているからである .

以上を総合すると , 最も収束性が優れているのは Taubin 法によって初期化した FNS 法であると結論される . また , FNS 法 , HEIV 法の固有値の選択の改良は初期値の精度が悪いときに差が現れるが , Taubin 法のようによい初期値を用いると差がないこともわかった . これ以外のシミュレーション例でも実験を行ったが , ほぼ同様の状況であった .

11. 実画像実験

図 5 は同一シーンを異なる視点から撮影した実画像である . これらから 100 個の特徴点を手動で指定し , その対応から基礎行列を計算した . 収束性を除けば得られる解はどの手法でも同じであり , 図 5 中に計算したエピ極線を図示している .

表 1, 2, 3 はそれぞれランダム , 最小二乗法 , および Taubin 法で初期化した場合の各手法の反復回数である . ただし , ランダム初期化の場合は 100 回の試行の平均値である . 表 1, 2, 3 から , 初期値をどう選んでも HEIV 法より FNS 法のほうが収束性に優れ , 初期値に最小二乗法または Taubin 法を用いると , 固有値の選択には差が見られない . そして , 初期値が正しいほど収束しやすいことがわかる . 一方 , くりこみ法の収束回数はほとんど初期値の選び方によらない .

表 1: ランダム初期化に対する平均反復回数 (100 回の試行の平均値) .

手法	反復回数
オリジナル FNS 法	94.26 回
オリジナル HEIV 法	74.62 回
改良 FNS 法	11.99 回
ガウス・ニュートン法	10.34 回
改良 HEIV 法	9.1 回
くりこみ法	6.99 回

表 2: 最小二乗法による初期化に対する反復回数 .

手法	反復回数
オリジナル HEIV 法	7 回
改良 HEIV 法	7 回
くりこみ法	7 回
ガウス・ニュートン法	5 回
オリジナル FNS 法	5 回
改良 FNS 法	5 回

表 3: Taubin 法による初期化に対する反復回数 .

手法	反復回数
オリジナル HEIV 法	7 回
改良 HEIV 法	7 回
くりこみ法	7 回
ガウス・ニュートン法	6 回
オリジナル FNS 法	5 回
改良 FNS 法	5 回

12. まとめ

本論文では , まず 2 画像の点対応から基礎行列を計算する最尤推定とその KCR 下界との関係を述べ , 具体的な数値計算法として FNS 法 , HEIV 法 , くりこみ法のアルゴリズムをまとめた . そして , 同等の解を計算するガウス・ニュートン法を新たに追加した .

次に , 誤差を加えたシミュレーション画像を用いてこれらの反復解法の収束性を検討した . FNS 法と HEIV 法についてはオリジナルな方法と改良法を比較した . 初期値はランダムに , 最小二乗法で , および Taubin 法で定める 3 通りで比較した . さらに実画像を用いて実験を行った .

その結果 , 初期値の誤差が大きいときはオリジナル FNS 法 , オリジナル HEIV 法よりも改良 FNS 法 , 改良 HEIV 法のほうが収束性に優れているが , 初期値の誤差が小さいと固有値の選択法の影響がないことがわかり , その理由を考察した .

また , くりこみ法以外の方法は反復回数が初期値の精度に依存するのに対して , くりこみ法は初期値の影響がほとんどないことを実証し , その理由を考察した .

全体的には (改良) FNS 法が最も収束性に優れ ,

くりこみ法およびガウス・ニュートン法がそれに次ぐ収束性を持っている。初期値としては Taubin 法を用いるのが最も効果的である。

謝辞：本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 17500112) の助成による。有益な議論を行って頂いた米国 Alabama 大学の Nikolai Chernov 博士、およびオーストラリア Adelaide 大学の Wojciech Chojnacki 博士に感謝します。

参考文献

- [1] N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47-4** (2004-11), 713–728.
- [2] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22-11** (2000-11), 1294–1303.
- [3] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, A new constrained parameter estimator for computer vision applications, *Image Vision Comput.*, **22-2** (2004-2), 85–91.
- [4] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, FNS, CFNS and HEIV: A unifying approach, *J. Math. Imaging Vision*, **23-2** (2005-9), 175–183.
- [5] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [6] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35-2** (1994-2), 201–209.
- [7] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36-8** (1995-8), 1865–1873.
- [8] 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **37-3** (1996-3), 363–370.
- [9] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [10] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, 2005.
- [11] 金谷 健一, くりこみ法その後: 波紋と発展, 情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-139-5 (2003-7), 33–40.
- [12] 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
- [13] 金谷 健一, くりこみ法の謎を解く, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-149-3 (2005-5), 15–22.
- [14] 金谷健一, 「これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—」, 共立出版, 2005.
- [15] K. Kanatani and N. Ohta, Comparing optimal three-dimensional reconstruction for finite motion and optical flow, *J. Elec. Imaging*, **12-3** (2003-7), 478–488.
- [16] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37-2** (2000-6), 127–150.
- [17] 三島等, 金谷健一, 基礎行列の最適計算とその信頼性評価, 情報処理学会研究報告, 99-CVIM-118-10 (1999-9), 67–74.
- [18] G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13-11** (1991-11), 1115–1138.

付録 A: 基礎行列の最適補正

計算した基礎行列 F を $\det F = 0$ になるように最適に補正する方法は以下の通りである [8, 10, 15, 17] .

まず, 拘束 $\det F = 0$ を考慮しないで計算した基礎行列の最尤推定解 \hat{F} を表す 9 次元ベクトルを \hat{u} とする. そして次の行列を計算する .

$$\tilde{M} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{P_{\hat{u}} \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}^{\top} P_{\hat{u}}}{(\hat{u}, V_0[\xi_{\alpha}]\hat{u})} \quad (45)$$

ただし, $P_{\hat{u}}$ は式 (8) の射影行列を \hat{u} に対して計算したものである .

\tilde{M} の 9 個の固有値を $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_9 (= 0)$ とし, 対応する単位固有ベクトルを $u_1, u_2, \dots, u_9 (= \hat{u})$ とすると, 推定値 \hat{u} の正規化共分散行列 $V_0[\hat{u}]$ は次のように推定される¹²[10] .

$$V_0[\hat{u}] = \frac{u_1 u_1^{\top}}{\lambda_1} + \dots + \frac{u_8 u_8^{\top}}{\lambda_8} \quad (46)$$

ここで, \hat{u} , および $V_0[\hat{u}]$ を次のように更新し, これを収束するまで反復する .

$$\hat{u} \leftarrow N[\hat{u} - \frac{(\det F) V_0[\hat{u}]\hat{u}^{\dagger}}{(\hat{u}^{\dagger}, V_0[\hat{u}]\hat{u}^{\dagger})}] \quad (47)$$

$$V_0[\hat{u}] \leftarrow P_{\hat{u}} V_0[\hat{u}] P_{\hat{u}} \quad (48)$$

ただし, \hat{u}^{\dagger} はベクトル \hat{u} を次のように変換したものである¹³ .

$$\hat{u}^{\dagger} = \begin{pmatrix} \hat{u}_5 \hat{u}_9 - \hat{u}_8 \hat{u}_6 \\ \hat{u}_6 \hat{u}_7 - \hat{u}_9 \hat{u}_4 \\ \hat{u}_4 \hat{u}_8 - \hat{u}_7 \hat{u}_5 \\ \hat{u}_8 \hat{u}_3 - \hat{u}_2 \hat{u}_6 \\ \hat{u}_9 \hat{u}_1 - \hat{u}_3 \hat{u}_7 \\ \hat{u}_7 \hat{u}_2 - \hat{u}_1 \hat{u}_8 \\ \hat{u}_2 \hat{u}_6 - \hat{u}_5 \hat{u}_3 \\ \hat{u}_3 \hat{u}_4 - \hat{u}_6 \hat{u}_1 \\ \hat{u}_1 \hat{u}_5 - \hat{u}_4 \hat{u}_2 \end{pmatrix} \quad (49)$$

付録 B: 一般固有値問題

一般固有値問題とは与えられた $n \times n$ 対称行列 A と $n \times n$ 正値対称行列 G に対して

$$Aw = \lambda Gw \quad (50)$$

の関係が成り立つ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (一般固有値) と対応する w_1, \dots, w_n (一般固有ベクトル) を計算することである (G が単位行列 I のときが普通の固有値問題である) . これを計算するには, G の固有値 μ_1, \dots, μ_n と対応する単位固有ベクトル g_1, \dots, g_n を計算して, 次のようにおく

$$T = \frac{g_1 g_1^{\top}}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{g_2 g_2^{\top}}{\sqrt{\mu_2}} + \dots + \frac{g_n g_n^{\top}}{\sqrt{\mu_n}} \quad (51)$$

すると, 行列 $\tilde{A} = TAT$ の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が求める一般固有値である . また, 対応する \tilde{A} の固有ベクトルを u_1, \dots, u_n とすると, 求める一般固有ベクトルは $w_1 = Tu_1, \dots, w_n = Tu_n$ である .

¹²ただし, λ_8 が非常に小さい値になることがあるので, 全体に λ_8 を掛けてスケールを $O(1)$ にするほうが数値計算が安定する .

¹³ \hat{F} の余因子行列 $F^{\dagger}U^{\dagger}$ をベクトル表現したものである .