不定性をもつ幾何学構造の不確定性の記述: ゲージとゲージ変換

Uncertainty Description of Geometric Stucture with Indeterminacy: Gauges and Gauge Transformations

金 谷 健 一* ダニエル・D・モリス†
Kenichi Kanatani Daniel D. Morris

Abstract—This paper presents a consistent theory for describing indeterminacy and uncertainty of 3-D reconstruction from a sequence of images. First, we present a group-theoretical analysis of gauge transformations and gauges by invoking the Lie group theory. We then discuss how to evaluate the reliability of the solution that has indeterminacy. We also extend the Cramer-Rao lower bound to problems with internal indeterminacy. Finally, we describe the free-gauge approach and the canonical form of a covariance matrix that is independent of particular gauges.

Keywords—3-D reconstruction, Lie group theory, gauge transformation, canonical form, reliability evaluation, Cramer-Rao lower bound

1. 序論

画像列からの 3 次元復元はさまざまの研究がなされたが [9, 13]、これまでは主としてアルゴリズムの構築に重点が置かれ、その精度、ロバスト性、計算効率に関心が持たれていた。しかし、アルゴリズムの構築と同様に重要な課題は、復元した解の信頼性評価である。本論文は新しい復元アルゴリズムを提案するものではなく、その信頼性評価の仕方を検討するものである。

解の信頼性は従来は単に実験的に評価されることが多かったが [12]、最近は厳密な統計解析が強調されるようになり、共分散行列のよる評価や精度の理論限界が解析されるようになった [2, 3, 4]。しかし、重要なことは画像列からの 3 次元復元問題には必然的に解の不定性が伴うという事実である。これが信頼性評価に大きく影響する。

まず、解の不確定性は空間にどのような座標系を定義するかに依存する。例えば物体上のある点を原点とする座標系をとれば、データに誤差があってもその点は定義により常に (0,0,0) であり、不確定性がない。その代わり、他の点はその点の不確定性が重畳されるので、本来以上の不確定性を持つ。また 3 次元空間が 2 次元画像に投影されるので、何らかの (奥行きやスケールなど) 情報が失われ、解が一意的でなくなる。これを定めるために例えばある点の奥行きが 0 であるとか、ある長さが 1 であるなどの正規化が行われる。そのため、正規化された量には定義より不確定性がなく、異なる正規化を採用すれば同じ量でも異なる不確定性を持つ。従来はこのことが十分には考慮されていなかった [10]。

本論文では座標系や正規化を変えたときのパラメータの変化の規則を「ゲージ変換」と呼び、特定の座標系や正規化を仮定することを「ゲージ」と呼ぶ [6, 7, 8]。前述の考察より、個々のパラメータの絶対的な不確定を議論することはできない。絶対的な信頼性評価はゲージ変換の不変量についてのみ可能である。以下ではリー群論 [1] を用い、画像系列からの 3 次元復元における解の不定性と不確定性を記述する一貫した理論体系を述べる。そして、共分散行列の「ゲージ変換則」を導くとともに、「ゲージ不変量」の性質を解析する。また、クラメル・ラオの下界を不定性のある問題に拡張する。最後に「自由ゲージ法」の利点を述べ、特定のゲージによらない共分散行列の「標準形」を定義する。

*群馬大学工学部情報工学科, 〒 376-8515 桐生市天神町 1–5–1, Department of Computer Science, Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan, E-mail: kanatani@cs.gunma-u.ac.jp
†Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 1523-3890, U.S.A., E-mail: ddmorris@ri.cmu.edu

2. 誤差の統計モデル

空間中を剛体運動する N 個の特徴点を M 枚の画像に渡って観測するとする。第 α 点の M 枚の画像に渡る画像座標を縦に並べた $2M$ 次元ベクトルを $\boldsymbol{p}_\alpha$ とする。空間のすべての点の 3 次元座標と各画像を撮影したカメラの位置や向きやズーム等の内部パラメータをすべて並べたベクトルを $\boldsymbol{\theta}$ とすると、$\boldsymbol{p}_\alpha$ はパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の関数として $\boldsymbol{p}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha[\boldsymbol{\theta}]$ と書ける。パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の定義域 $\mathcal{T}$ をパラメータ空間と呼ぶ。

誤差がないときの $\boldsymbol{p}_\alpha$ の値を $\bar{\boldsymbol{p}}_\alpha$ とし、$\boldsymbol{p}_\alpha = \bar{\boldsymbol{p}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{p}_\alpha$ と書く。誤差 $\Delta\boldsymbol{p}_\alpha$ は正規分布に従う確率変数とみなす。ただし、画像ごとに独立とは限らず、その分布は一般には各画像で点ごとに、ただし方向ごとに異なるとする。そして $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ の共分散行列を次のように定義する ($E[\,\cdot\,]$ は期待値を表す)。

$$V[\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta] = E[\Delta\boldsymbol{p}_\alpha \Delta\boldsymbol{p}_\beta^\top] \tag{1}$$

これらは定数倍を除いて既知であるとし、次のように既知の正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta]$ と未知のノイズレベル ϵ とに分解する。

$$V[\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta] \tag{2}$$

3. ゲージ変換

$2M \times 2M$ 行列 $\boldsymbol{W}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, ..., N$ を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_{11} & \cdots & \boldsymbol{W}_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{W}_{N1} & \cdots & \boldsymbol{W}_{NN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1] & \cdots & V_0[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_N] \\ \vdots & & \vdots \\ V_0[\boldsymbol{p}_N, \boldsymbol{p}_1] & \cdots & V_0[\boldsymbol{p}_N, \boldsymbol{p}_N] \end{pmatrix}^{-1} \tag{3}$$

と定義すると、最尤推定は次の関数の最小化となる。

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\boldsymbol{p}_\alpha - \mathcal{P}_\alpha[\boldsymbol{\theta}], \boldsymbol{W}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{p}_\beta - \mathcal{P}_\beta[\boldsymbol{\theta}]) \tag{4}$$

ただし、ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書く。

関数 $J(\boldsymbol{\theta})$ を最小にする解は一般に一意的ではない。これには二つの要因がある。

座標変換: 物体座標系は任意であるから、物体座標系に任意に並進、回転を加えたものも解である。

画像投影: 3 次元空間が 2 次元画像に投影されるので、空間的に異なる配置も同じ画像に投影され得る。

パラメータ空間 $\mathcal{T}$ のある変換 g が存在してすべての $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{T}$ に対して

$$J(\boldsymbol{\theta}) = J(g\boldsymbol{\theta}) \tag{5}$$

となるとき、g をゲージ変換と呼ぶ。その全体 $\mathcal{G}$ は群をなす。これをゲージ変換群と呼ぶ。ゲージ変換群 $\mathcal{G}$ の単位元に近い要素を無限小ゲージ変換と呼ぶ。無限小ゲージ変換 $\gamma \in \mathcal{G}$ はパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を次のように変換する。

$$\gamma\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\theta}) + \cdots \tag{6}$$

この $\boldsymbol{D}(\,\cdot\,)$ を γ の無限小生成作用素と呼ぶ。これは線形空間となる (さらに交換子積を定義すると代数となり、リー群 $\mathcal{G}$ のリー代数 $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ と同型となる)。これを $\mathcal{D}_\theta(\mathcal{T})$ と書く。任意の要素 $\boldsymbol{D}(\,\cdot\,) \in \mathcal{D}_\theta(\mathcal{G})$ に対して無限小ゲージ変換 γ が一対一に対応することが証明できる [1]。

4. ゲージ

パラメータ $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}'$ に対して $\boldsymbol{\theta}' = g\boldsymbol{\theta}$ となるゲージ変換 $g \in \mathcal{G}$ が存在するとき、$\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}'$ を幾何学的に同値であると呼び、$\boldsymbol{\theta} \sim \boldsymbol{\theta}'$ と書く。したがって実質的なパラメータ空間は $\mathcal{T}$ ではなく、$\mathcal{T}$ の同値関係に関する商空間 (剰余類) $\mathcal{T}/\mathcal{G}$ である。 パラメータ空間 $\mathcal{T}$ の元で $\boldsymbol{\theta}$ と幾何学的に同値なものの集合を $\mathcal{T}_\theta$ と書く。これは商空間 $\mathcal{T}/\mathcal{G}$ の要素であり、次のように書ける。

$$\mathcal{T}_\theta = \{\boldsymbol{\theta}' \,|\, \boldsymbol{\theta}' \sim \boldsymbol{\theta}\}\Big(= \{g\boldsymbol{\theta} \,|\, g \in \mathcal{G}\}\Big) \tag{7}$$

無限小生成作用素の線形空間 $\mathcal{D}_\theta(\mathcal{T})$ が r 次元であれば $\mathcal{T}_\theta$ は $\mathcal{T}$ の r 次元部分多様体であり、$\boldsymbol{\theta}$ に対する葉と呼ばれる。このような空間は葉層構造と呼ばれる。

各葉の上で値 $\boldsymbol{\theta}$ を一意的に定める自然な方法は r 個の方程式

$$c_1(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad \ldots, \quad c_r(\boldsymbol{\theta}) = 0 \tag{8}$$

を任意に与えることである。これらが以下の条件を満たすときゲージ条件、あるいは単にゲージと呼ぶ。

1. r 個の方程式は互いに代数的に独立であり、$\mathcal{T}$ の余次元 r の部分多様体 $\mathcal{C}$ を定義する。これをゲージ多様体と呼ぶ。
2. 多様体 $\mathcal{C}$ はすべての葉 $\mathcal{T}_\theta$ の各連結成分と一点で横断的に交わる。
3. 任意の $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{T}_\theta$, $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} = \mathcal{C} \cap \mathcal{T}_\theta$ に対して $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} = g\boldsymbol{\theta}$ となるゲージ変換 g が一意的に定まる。

以後、混乱の生じない限り「ゲージ」と「ゲージ多様体」を同じ記号 $\mathcal{C}$ で表す。ゲージを一つ指定すると式 (4) を最小化する解 $\boldsymbol{\theta}$ が葉の連結成分ごとに唯一に定まる。しかし、異なる連結成分に属するものはゲージによっては区別できない。

5. 推定量

我々の目的は与えられたデータ $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ に対して $\boldsymbol{\theta}$ になるべく近い値を与える関数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}(\{\boldsymbol{p}_\alpha\})$ を構成することである。このような写像 $\hat{\boldsymbol{\theta}}\colon\ \mathcal{R}^{2MN} \to \mathcal{T}$ を $\boldsymbol{\theta}$ の推定量と呼ぶ。式 (4) を最小にする解 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ は一つの推定量であり、最尤推定量と呼ぶ。しかし、先に指定したように「真の値」$\boldsymbol{\theta}$ というものは存在しない。存在するのは「真の葉」$\mathcal{T}_\theta$ であり、そのどの要素も互いに幾何学的に同値である。これに一つのゲージ $\mathcal{C}$ を導入して一意的に定めた解を $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ とする。また、ゲージ $\mathcal{C}$ を満たすように定めた推定量を $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ と書く。これはデータに誤差がないとき真の葉上でゲージ $\mathcal{C}$ を満たす値 $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{\theta}} \cap \mathcal{C}$ に一致すると仮定する。

パラメータ空間 $\mathcal{T}$ の点 $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ における接空間を $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T})$ とする。これは n 次元線形空間である。ただし、以後、パラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ の次元を n、線形空間 $\mathcal{D}_\theta(\mathcal{T})$ の次元を r とする。点 $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ におけるゲージ多様体 $\mathcal{C}$ の接空間を $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ とする。これは $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T})$ の $(n-r)$ 次元部分空間である。データの誤差は小さく、推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ の分布は $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ の近傍に集中し、$\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ の ゲージ多様体$\mathcal{C}$ 上の分布は接空間 $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ 上の分布と同一視できると仮定する。このとき推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ の共分散行列が次のように定義できる。

$$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] = E[(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} - \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} - \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C})^\top] \tag{9}$$

これはランク $n-r$ の $n \times n$ 特異行列であり、その値域は接空間 $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ である。したがって、共分散行列を定義するにはパラメータ空間 $\mathcal{T}$ そのものではなくその接空間 $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T})$ に局所座標系を導入すればよい。

6. ゲージ不変量

関数 $I\colon\ \mathcal{T} \to \mathcal{R}$ がゲージ変換群 $\mathcal{G}$ の同一連結成分に属する任意の g, g' に対して

$$I(g\boldsymbol{\theta}) = I(g'\boldsymbol{\theta}) \tag{10}$$

となるとき、I をゲージ不変量と呼ぶ。定義より、I がゲージ不変量である必要十分条件はそれが無限小ゲージ変換に不変なことである。無限小生成作用素の線形空間 $\mathcal{D}_\theta(\mathcal{T})$ のある基底 $\{\boldsymbol{D}_1(\,\cdot\,), \ldots, \boldsymbol{D}_r(\,\cdot\,)\}$ をとると、$\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \boldsymbol{D}_r(\boldsymbol{\theta})$ は $\boldsymbol{\theta}$ に対応する葉 $\mathcal{T}_\theta$ の接空間 $T_\theta(\mathcal{T}_\theta)$ の基底になっている。次の定理を得る ($\perp$ は直交補空間を表す)。

【定理 1】 関数 $I\colon\ \mathcal{T} \to \mathcal{R}$ がゲージ不変量であるための必要十分条件は次の関係が成り立つことである。

$$\nabla_\theta I \in T_\theta(\mathcal{T}_\theta)^\perp \tag{11}$$

パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ の異なるゲージ $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ に関する推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}$ の共分散行列をそれぞれ $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}]$, $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}]$ とする。どちらの共分散行列も同じ不確定さを表しているとき、$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}]$, $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}]$ は幾何学的に同値であるという。

推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}$ の真の値、すなわちデータに誤差のないときの値をそれぞれ $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$, $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}$ とする。もし $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$, $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}$ が互いに幾何学的に同値であれば、$\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} = g\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}$ となるあるゲージ変換 $g \in \mathcal{G}$ が存在する。これはパラメータ空間 $\mathcal{T}$ の変換であり、$\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}$ での接空間 $T_{\theta_{\mathcal{C}'}}(\mathcal{C}')$ から $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ での接空間 $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ への線形写像を引き起こす。これを $\partial\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}/\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}$ と書き、$T_{\theta_{\mathcal{C}'}}(\mathcal{C}')$ から $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ へのヤコビ行列と呼ぶ。このとき $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'} + \Delta\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}$ は $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} = \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} + (\partial\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}/\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'})\Delta\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}$ と幾何学的に同値である。

定理 1により、$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}]$ が $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}]$ と幾何学的に同値である必要十分条件はすべての $\boldsymbol{u} \in T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T}_\theta)^\perp$ に対して

$$(\boldsymbol{u}, \Big(V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] - \frac{\partial\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}}{\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}} V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}] \Big(\frac{\partial\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}}{\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}}\Big)^\top\Big)\boldsymbol{u}) = 0 \tag{12}$$

が成立することである。これは $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T}_\theta)^\perp$ が対称行列 $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] - \Big(\partial\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}/\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}\Big) V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}] \Big(\partial\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}/\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}\Big)^\top$ の零空間であることを意味する。すなわち、この行列の値域は $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T}_\theta)$ であり、非零の固有値に対する固有ベクトルによって張られている。これが成立することを $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] \equiv V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}] \mod \mathcal{T}_\theta$ と約束すれば、次の定理を得る。

【定理 2】 異なるゲージのもとに定義された共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}]$, $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}]$ が幾何学的に同値である必要十分条件は次の関係が成り立つことである。

$$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] \equiv V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}] \mod \mathcal{T}_\theta \tag{13}$$

7. 推定量の同値性

パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ のゲージ $\mathcal{C}$ に関する推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ を考える。第 1 近似において偏差 $\Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} - \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ は接空間 $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ と同一視できる。任意のベクトル $\Delta\boldsymbol{\theta} \in T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T})$ に対して第 1 近似において $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} + \Delta\boldsymbol{\theta}$ が $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} = \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} + \Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ と幾何学的に同値である必要十分条件は $\Delta\boldsymbol{\theta} - \Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} \in T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T}_\theta)$ である。 $\{\boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}), \ldots, \boldsymbol{D}_r(\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C})\}$ は接空間 $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T}_\theta)$ の基底であるから、これはある r 個の実数 $x_1, \ldots, x_r$ が存在して $\Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} = \Delta\boldsymbol{\theta} + \sum_{i=1}^r x_i \boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C})$、すなわち

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} = \Delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{U}_{\theta_\mathcal{C}}\boldsymbol{x} \tag{14}$$

と書けることである。ただし $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_r)^\top$ と置き、

$$\boldsymbol{U}_{\theta_\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}) & \cdots & \boldsymbol{D}_r(\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}) \end{pmatrix} \tag{15}$$

と定義した。ゲージ $\mathcal{C}$ が r 個の式 $c_1(\boldsymbol{\theta}) = 0, ..., c_r(\boldsymbol{\theta}) = 0$ で定義されているなら、接空間 $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ は $\{\nabla_\theta c_1|_{\theta_\mathcal{C}}, ... \nabla_\theta c_r|_{\theta_\mathcal{C}}\}$ の張る線形空間の直交補空間である。したがって $(\nabla_\theta c_i|_{\theta_\mathcal{C}}, \Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}) = 0, i = 1, ..., r$ となる。式 (14) より次の関係が成り立つ。

$$\boldsymbol{V}_{\theta_\mathcal{C}}^\top \Delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{V}^\top \boldsymbol{U}_{\theta_\mathcal{C}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

ただし次のように定義した。

$$\boldsymbol{V}_{\theta_\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \nabla_\theta c_1|_{\theta_\mathcal{C}} & \cdots & \nabla_\theta c_r|_{\theta_\mathcal{C}} \end{pmatrix} \tag{17}$$

式 (14), (16) から次式を得る。

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} = \Delta\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{U}_{\theta_\mathcal{C}} (\boldsymbol{V}_{\theta_\mathcal{C}}^\top \boldsymbol{U}_{\theta_\mathcal{C}})^{-1} \boldsymbol{V}_{\theta_\mathcal{C}}^\top \Delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \boldsymbol{\theta} \tag{18}$$

ただし次のように置いた。

$$\boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}_{\theta_\mathcal{C}} (\boldsymbol{V}_{\theta_\mathcal{C}}^\top \boldsymbol{U}_{\theta_\mathcal{C}})^{-1} \boldsymbol{V}_{\theta_\mathcal{C}}^\top \tag{19}$$

これは $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ への $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{T}_\theta)$ に沿う (斜交) 射影行列である。以上より次の定理を得る。

【定理 3】 推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ が第 1 近似において $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} + \Delta\boldsymbol{\theta}$ と幾何学的に同値である必要十分条件は次式が成り立つことである。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} = \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} + \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \Delta\boldsymbol{\theta} \tag{20}$$

8. 共分散行列の変換

$\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ を $\boldsymbol{\theta}$ のゲージ $\mathcal{C}$ に関する推定量とし、その共分散行列を $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}]$ とする。$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}$ を $\boldsymbol{\theta}$ の別のゲージ $\mathcal{C}'$ に関する幾何学的に同値な共分散行列とする。これらは次のよう書ける。

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} = \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} + \Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}, \qquad \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'} = \boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'} + \Delta\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'} \tag{21}$$

推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ は $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'} + \left(\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}/\partial\boldsymbol{\theta}'_\mathcal{C}\right)\Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ と幾何学的に同値であるから、定理 3より $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ が $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}$ と幾何学的に同値になる必要十分条件は $\Delta\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'} = \boldsymbol{Q}_{\theta_{\mathcal{C}'}}^{\mathcal{C}'}(\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}/\partial\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C})\Delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ となることである。したがって、ゲージを変えたときの共分散行列の変換則が次のように得られる。

【定理 4】 ゲージ $\mathcal{C}$ に関する推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ の共分散行列を $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}]$ とすると、それと幾何学的に同値でゲージ $\mathcal{C}'$ に関する推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}$ の共分散行列は次のようになる。

$$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}'}] = \boldsymbol{Q}_{\theta_{\mathcal{C}'}}^{\mathcal{C}'} \frac{\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}}{\partial\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}} V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] \left(\frac{\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}'}}{\partial\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}}\right)^\top \boldsymbol{Q}_{\theta_{\mathcal{C}'}}^{\mathcal{C}'\top} \tag{22}$$

9. 不偏推定量

パラメータが $\boldsymbol{\theta}$ のもとでのデータ $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ の確率密度を $p(\{\boldsymbol{p}_\alpha\}; \boldsymbol{\theta})$ とする。そのスコア関数を次のように定義する。

$$\boldsymbol{l}_\theta = \nabla_\theta \log p \tag{23}$$

フィッシャー情報行列は次のように定義される。

$$\boldsymbol{J}_\theta = E[\boldsymbol{l}_\theta \boldsymbol{l}_\theta^\top] \tag{24}$$

これは半正値対称行列である。確率密度 $p(\{\boldsymbol{p}_\alpha\}; \boldsymbol{\theta})$ はゲージ不変量であるから、$\log p$ もゲージ不変量である。定理 1より $\nabla_\theta \log p \in T_\theta(\mathcal{T}_\theta)^\perp$ であり、したがって $\boldsymbol{l}_\theta \in T_\theta(\mathcal{T}_\theta)^\perp$ である。ゆえにフィッシャー情報行列 $\boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}}$ の値域は $T_\theta(\mathcal{T}_\theta)^\perp$ であり、零空間は $T_\theta(\mathcal{T}_\theta)$ である。

これまでゲージ $\mathcal{C}$ のもとで推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ は誤差がなければ “真の値” $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} \in \mathcal{T}_{\boldsymbol{\theta}} \cap \mathcal{C}$ をとると仮定してきた。これは推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ が “不偏” であることを暗黙に仮定しているのと同じである。形式的に述べると、ゲージ $\mathcal{C}$ のもとで $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ が不偏推定量であるとは次の条件が成り立つことである。

$$E[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} - \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}] = \boldsymbol{0} \tag{25}$$

ただし、偏差 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} - \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ は十分小さく、接空間 $T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ の元と同一視している。式 (25) は任意の $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ で成り立たなければならない。特に式 (25) は任意の摂動 $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} \to \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} + \delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$, $\delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} \in T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ に対して不変でなければならない。したがって、これに対する式 (25) 第 1 変分は 0 となる。これから

$$\Big(E[(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} - \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C})\boldsymbol{l}_{\theta_\mathcal{C}}^\top] - \boldsymbol{I}\Big)\delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} = \boldsymbol{0} \tag{26}$$

が任意の $\delta\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} \in T_{\theta_\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ で成立することがわかる。これは次式と同値である。

$$E[(\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} - \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C})\boldsymbol{l}_{\theta_\mathcal{C}}^\top] = \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \tag{27}$$

10. クラメル・ラオの不等式

恒等式 (27) から次式を得る。

$$E[\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} - \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} \\ \boldsymbol{l}_{\theta_\mathcal{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} - \boldsymbol{\theta}_\mathcal{C} \\ \boldsymbol{l}_{\theta_\mathcal{C}} \end{pmatrix}^\top] = \begin{pmatrix} V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] & \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \\ \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top} & \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top} \boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}} \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \end{pmatrix} \tag{28}$$

これは定義より半正値対称行列である。したがって、次の行列も半正値対称行列である。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} & -\boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}}^- \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] & \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \\ \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top} & \boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}}^- \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top} & \boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}}^- \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] - \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}}^- \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}}^- \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top} \end{pmatrix} \tag{29}$$

ここに “$-$” は (ムーア・ペンローズの) 一般逆行列である。これが半正値対称行列であるから $\boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}}^- \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top}$ も半正値である。したがって次の定理を得る。

【定理 5】 ゲージ $\mathcal{C}$ のもとでの推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ は次の不等式を満たす。

$$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}] \succ \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^\mathcal{C} \left(\boldsymbol{J}_{\theta_\mathcal{C}}\right)^- \boldsymbol{Q}_{\theta_\mathcal{C}}^{\mathcal{C}\top} \tag{30}$$

ここに対称行列 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の不等式 $\boldsymbol{A} \succ \boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ が半正値対称行列であることを意味する。式 (30) はクラメル・ラオの不等式 [3, 5] の不定性のある系への拡張となっている。式 (30) の右辺をゲージ $\mathcal{C}$ のもとでのクラメル・ラオの下界と呼ぶ。

11. 自由ゲージ法

ゲージ $\mathcal{C}$ のもとでの真の値 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ の近傍で関数 J をテイラー展開すると次のようになる。

$$J(\bar{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C} + \Delta\boldsymbol{\theta}) = \bar{J} + (\nabla_\theta \bar{J}, \Delta\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{\theta}, \nabla_\theta^2 \bar{J} \Delta\boldsymbol{\theta}) + \cdots \tag{31}$$

$\bar{J}$, $\nabla_\theta \bar{J}$, $\nabla_\theta^2 \bar{J}$ の J の上のバーは $\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ での値を意味する。$O(\epsilon^3)$ 以上の項を無視し、式 (31) を $\Delta\boldsymbol{\theta}$ で微分して $\boldsymbol{0}$ と置き、真の値 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_\mathcal{C}$ の代わりにその近似値 $\boldsymbol{\theta}_\mathcal{C}$ を代入すると次のようになる。

$$\nabla_\theta J + \nabla_\theta^2 J \Delta\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0} \tag{32}$$

$\nabla_\theta^2 J$ のランクは r であるから無数の解が存在する。それらの中から任意の一つ、例えばノルム $\|\Delta\boldsymbol{\theta}\|$ が最小のものを選ぶとする。

これは次のように、逆行列の代わりに (ムーア・ペンローズの) 一般逆行列を用いることに相当している。

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = -\Big(\nabla_{\theta}^{2} J\Big)^{-}_{n-r} \nabla_{\theta} J \tag{33}$$

添え字 "$n-r$" は小さい r 個の固有値を 0 に置き換えることを意味する [3]。ゲージ $\mathcal{C}$ を課すためには定理 3より $\Delta\boldsymbol{\theta}$ を $\boldsymbol{Q}_{\theta}^{\mathcal{C}}\Delta\boldsymbol{\theta}$ に置き換えればよい。しかし、これを反復の各ステップごとにする必要はなく、上式による更新を収束するまで反復し、収束した解をゲージ $\mathcal{C}$ が満たされるように変換すればよい。これは Triggs [11] により提唱されたものであり、自由ゲージ法と呼ぶ。

12. 共分散行列の標準形

これまでは $\boldsymbol{\theta}$ の推定量の共分散行列は特定のゲージによって定義した。しかしゲージに依存しない表現も可能である。これを共分散行列の標準形と呼ぶ。これは真の値からなる葉 $\mathcal{T}_{\theta}$ のすべての点で定義される。これを次のように定義する。ゲージ多様体 $\mathcal{C}^{*}$ を $\boldsymbol{\theta}$ での接空間 $T_{\theta}(\mathcal{C}^{*})$ が $\boldsymbol{\theta}$ での葉 $T_{\theta}(\mathcal{T}_{\theta})$ への接空間 $T_{\theta}(\mathcal{T}_{\theta})$ の直交補空間となるように定義する。共分散行列の標準形はこのゲージ $\mathcal{C}^{*}$ のもとでの推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}^{*}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}^{*}}]$ であると定義し、$V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]$ と書く。

点 $\boldsymbol{\theta}$ を通る任意のゲージ多様体 $\mathcal{C}$ によって定義された推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}$ の共分散行列を $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}]$ とする。定理 4によると標準形は次のように与えられる。

$$V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = \boldsymbol{P}_{\theta} V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}] \boldsymbol{P}_{\theta}^{\top} \tag{34}$$

ただし $\boldsymbol{P}_{\theta}$ は $T_{\theta}(\mathcal{T}_{\theta})^{\perp}$ への (直交) 射影行列であり、次のように与えられる。

$$\boldsymbol{P}_{\theta} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{U}_{\theta}(\boldsymbol{U}_{\theta}^{\top}\boldsymbol{U}_{\theta})^{-1}\boldsymbol{U}_{\theta}^{\top} \tag{35}$$

ここに $\boldsymbol{U}_{\theta}$ は $\boldsymbol{D}_{1}(\boldsymbol{\theta})$,..., $\boldsymbol{D}_{r}(\boldsymbol{\theta})$ を列とする $n \times n$ 行列である (式 (15) 参照)。逆に標準形 $V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]$ が与えられたとき $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}]$ は次のように与えられる。

$$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}] = \boldsymbol{Q}_{\theta}^{\mathcal{C}} V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] \boldsymbol{Q}_{\theta}^{\mathcal{C}\top} \tag{36}$$

一般に次のことが結論される。

【定理 6】 ゲージ $\mathcal{C}$ のもとでの推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}$ の共分散行列を $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}]$ とすると、真の値の葉 $\mathcal{T}_{\theta}$ 上に任意の点 $\boldsymbol{\theta}$ における共分散行列の標準形は次のように与えられる。

$$V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = \boldsymbol{P}_{\theta} \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}}} V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}] \Big(\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}}}\Big)^{\top} \boldsymbol{P}_{\theta}^{\top} \tag{37}$$

ただし $\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}} = \mathcal{T}_{\boldsymbol{\theta}} \cap \mathcal{C}$ である。逆に $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{T}_{\theta}$ での標準形 $V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]$ が与えられたとき、ゲージ $\mathcal{C}$ のもとでの共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}]$ は次のように与えられる。

$$V[\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathcal{C}}] = \boldsymbol{Q}_{\theta_{\mathcal{C}}}^{\mathcal{C}} \frac{\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}}}{\partial\boldsymbol{\theta}} V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] \Big(\frac{\partial\boldsymbol{\theta}_{\mathcal{C}}}{\partial\boldsymbol{\theta}}\Big)^{\top} \boldsymbol{Q}_{\theta_{\mathcal{C}}}^{\mathcal{C}\top} \tag{38}$$

式 (30) のクラメル・ラオの下界は与えられたゲージ $\mathcal{C}$ に対し、真の値の葉の任意の点で定義されている。式 (30) が点 $\boldsymbol{\theta}$ で成り立つとすると、$T_{\theta}(\mathcal{C}^{*}) = T_{\theta}(\mathcal{T}_{\theta})^{\perp}$ となるゲージ多様体 $\mathcal{C}^{*}$ については式 (30) の形で $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の共分散行列の標準形の下界が与えられる。しかし、$T_{\theta}(\mathcal{C}^{*}) = T_{\theta}(\mathcal{T}_{\theta})^{\perp}$ であれば $\boldsymbol{Q}_{\theta_{\mathcal{C}^{*}}}^{\mathcal{C}^{*}} = \boldsymbol{P}_{\theta}$ となる。一方、フィッシャー情報行列 $\boldsymbol{J}_{\theta}$ の値域は $T_{\theta}(\mathcal{T}_{\theta})^{\perp}$ である。したがって、次のクラメル・ラオの不等式が次のように書ける。

【定理 7】 推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の共分散行列の標準形 $V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}]$ は次の不等式を満たす。

$$V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] \succ \Big(\boldsymbol{J}_{\theta}\Big)^{-}_{n-r} \tag{39}$$

最尤推定は第一近似においてクラメル・ラオの下界を満たすから [3]、フィッシャー情報行列 $\boldsymbol{J}_{\theta}$ を推定値 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ において評価すればクラメル・ラオの下界が近似的に評価できる。$O(\epsilon^{3})$ の項を無視すればフィッシャー情報行列 $\boldsymbol{J}_{\theta}$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{J}_{\theta}|_{\hat{\theta}} = \frac{1}{2}\nabla_{\theta}^{2} J|_{\hat{\theta}} \tag{40}$$

したがって、自由ゲージ法を用いれば最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ が得られるだけでなく、その共分散行列がそのまま標準形であり、次のように評価できる。

$$V^{*}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = -2\Big(\nabla_{\theta}^{2} J|_{\hat{\theta}}\Big)^{-}_{n-r} \tag{41}$$

自由ゲージ法はゲージ多様体 $\mathcal{C}$ が各葉 $\mathcal{T}_{\theta}$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{T}$ に "平行" に近いときに有利である。なぜなら解をゲージ多様体 $\mathcal{C}$ 上に拘束すると、反復の過程で解が真の葉 $\mathcal{T}_{\hat{\theta}}$ に到達するまでに長い軌跡をたどらなければならないからである。これに対して自由ゲージ法では個々の葉 $\mathcal{T}_{\theta}$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{T}$ に "直交" する軌跡を描いて最短経路で真の葉に到達できる [6, 7]。

13. まとめ

本論文では、画像系列からの 3 次元復元における解の不定性と不確定性を記述する一貫した理論体系を述べた。まず解の不定性を記述するためにリー群論を用いて「ゲージ」と「ゲージ変換」を導入した。次に不定性を持つ解の不確定性の記述方法を考察し、共分散行列の「ゲージ変換則」を導くとともに、「ゲージ不変量」の性質を解析した。また、クラメル・ラオの下界を不定性のある問題に拡張した。最後に「自由ゲージ法」の利点を述べ、特定のゲージによらない共分散行列の「標準形」を定義した。

謝辞。本研究に関する有益な意見を頂いたフランス INRIA 研究所の Bill Triggs 氏、および英国サリー大学の Philip McLauchlan 氏に感謝します。また本研究を支援して下さった米国カーネギーメロン大学の金出武雄教授にも感謝します。本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究 C (2) (No. 11680377) によった。

参考文献

[1] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, 1990.

[2] 金谷健一, 「空間データの数理 — 3 次元コンピューティングに向けて —」, 朝倉書店, 1995.

[3] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[4] K. Kanatani, Statistical optimization and geometric inference in computer vision, *Phi. Trans. R. Soc. Lond.*, A**356**-1740 (1998), 1303–1320.

[5] K. Kanatani, Cramer-Rao lower bounds for curve fitting, *Graphical Models Image Process.* **60**-2 (1998), 93–99.

[6] P. F. McLauchlan, Gauge invariance in projective 3D reconstruction, *IEEE Workshop on Multi-View Modeling and Analysis of Visual Scenes*, June 1999, Fort Collins, CO, U.S.A..

[7] P. F. McLauchlan, Coordinate-frame independence in optimization algorithms for 3D vision, *IEEE Workshop on Vision Algorithms: Theory and Practice*, September 1999, Corfu, Greece.

[8] D. D. Morris, K. Kanatani and T. Kanade, Uncertainty modeling for optimal structure from motion, *IEEE Workshop on Vision Algorithms: Theory and Practice*, September 1999, Corfu, Greece.

[9] 佐藤淳, 「コンピュータビジョン — 視覚の幾何学—」, コロナ社, 1999.

[10] R. Szeliski and S. B. Kang, Shape ambiguities in structure from motion, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19**-5 (1997), pp. 506–512.

[11] B. Triggs, Optimal estimation of matching constraint, in R. Koch and L. Van Gool (eds.), *3D Structure from Multiple Images of Large-Scale Environments*, Lecture Notes in Computer Science, 1506, Springer, 1998, pp. 63–77.

[12] J. Weng, N. Ahuja and T. S. Huang, Optimal motion and structure estimation, *3D IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **15**-9 (1993), 864–884.

[13] 徐剛, 辻三郎, 「3 次元ビジョン」, 共立出版, 1998.