3 次元相似変換の最適計算：ガウス・ニュートン法 vs. ガウス・ヘルマート法

本田卓士[†1]　新妻弘崇[†1]　金谷健一[†1]

3 次元データはステレオ視やレンジファインダーなどの 3 次元センサーによって計測されるので不均一な誤差をもつ．本論文ではそのようなデータから 3 次元相似変換（回転，並進，スケール変化）を最適に計算する方法として，従来は異なる手法とみなされていたガウス・ニュートン法とガウス・ヘルマート法が類似の構造をもつことを指摘し，両者を融合した「改良ガウス・ヘルマート法」を提案する．そして，ステレオ視による 3 次元復元シミュレーションを行い，提案法はいずれよりも収束性能がよいことを示す．最後に GPS 測地データを用いて，従来の一様等方誤差モデルでは十分な推定ができないこと，および GPS 測地データには特有の数値計算上の問題があることを指摘する．

Optimal Computation of 3-D Similarity: Gauss-Newton vs. Gauss-Helmert

Takuto Honda,[†1] Hirotaka Niitsuma[†1] and Kenichi Kanatani [†1]

Because 3-D data are acquired using 3-D sensing such as stereo vision and laser range finders, they have inhomogeneous and anisotropic noise. This paper studies optimal computation of the similarity (rotation, translation, and scale change) of such 3-D data. We first point out that the Gauss-Newton and the Gauss-Helmert methods, regarded as different techniques, have similar structures. We then combine them to define what we call the *modified Gauss-Helmert method* and do stereo vision simulation to show that it is superior to either of the two in the convergence performance. Finally, we show an application to real GPS geodetic data and point out that the widely used homogeneous and isotropic noise model is insufficient and that GPS geodetic data are prone to numerical problems.

1. まえがき

誤差のある 3 次元データの相似変換（並進，回転，スケール変化）を計算することはロボット走行や 3 次元物体形状計算などのコンピュータビジョン応用だけでなく，GPS データから地盤の移動を計測する測地学[1),2),4),10)] でも重要なテーマである．しかし，従来の研究のほとんどは各点に一様等方誤差を仮定していた．一方，3 次元データはステレオ視やレンジファインダーなどの何らかのセンサーを用いて計測するので，誤差はセンサーのタイプや位置や向きに依存する不均一な誤差分布を持つ．その場合の最尤推定の意味での最適な回転の計算法は Ohta ら[11)] や原ら[5)] によって定式化されている．原ら[6)] はこれを相似変換の最尤推定に拡張した．これはレーンバーグ・マーカート (LM) 法を用いるものである．LM 法はコンピュータビジョンにおいては最もよく利用される標準的な最適化手法であり，ガウス・ニュートン法に収束を強制するために勾配法を加味したものである[7)]．

一方，測地学においてはガウス・ヘルマート法[9),10)] がよく用いられている．ヘルマート自身も測地学者であり，測地学では相似変換を「ヘルマート変換」と呼ぶこともある．コンピュータビジョンの分野でもガウス・ヘルマート法が応用されている[3),12)]．しかし，従来はガウス・ニュートン法とガウス・ヘルマート法は異なる手法とみなされ，両者の比較研究は見当たらない．本論文では，これらが実は類似の構造をもつことを指摘し，両者を融合した「改良ガウス・ヘルマート法」を提案する．そして，ステレオ視による 3 次元復元シミュレーションを行い，提案法はいずれよりも収束性能がよいことを示す．最後に GPS 測地データを用いて，従来の一様等方誤差モデルでは十分な推定ができないこと，従来ガウス・ヘルマート法の問題と考えられていたことが GPS 測地データに起因することを指摘する．

2. 相似変換の最尤推定

3 次元空間で相似変換する複数の点を測定し，移動前と移動後の測定位置をそれぞれ $\boldsymbol{r}_\alpha$, $\boldsymbol{r}'_\alpha$ とする ($\alpha = 1, ..., N$)．測定は誤差を含むとし，それぞれの共分散行列を $\epsilon^2 V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]$, $\epsilon^2 V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]$ とする．ϵ は誤差の絶対的な大きさを表す定数（「ノイズレベル」）であり，$V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]$, $V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]$ は誤差の分布を表す行列（「正規化共分散行列」）である．相似変換を最適に推定する最尤推定は，よく知られたように「マハラノビス距離」（以下「残差」と呼ぶ）

$$J = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{r}_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha)) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{r}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha)) \quad (1)$$

を最小にするものである（係数の 1/2 は便宜的）．ただし，$\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ は測定値 $\boldsymbol{r}_\alpha$, $\boldsymbol{r}'_\alpha$ の真の値であり，ある回転行列 $\boldsymbol{R}$, 並進ベクトル $\boldsymbol{t}$, スケール変化 s に対して

$$\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha + \boldsymbol{t} \quad (2)$$

となっているとする．ここに $\boldsymbol{S} = s\boldsymbol{R}$ であり,「スケール回転行列」と呼ぶ．これは四元数 $\boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^\top$ によって次のように表すことができる．

†1 岡山大学大学院自然科学研究科
Department of Computer Science, Okayama University, Japan

© 2011 Information Processing Society of Japan

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_3) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_2q_1+q_0q_3) & q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_3q_1-q_0q_2) & 2(q_3q_2+q_0q_1) & q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

四元数 $\boldsymbol{q}$ を単位ベクトルに制限すれば式 (3) は回転行列を表すが，単位ベクトルに制限しなければ $\|\boldsymbol{q}\|^2$ がスケール変化 s を表す．式 (1) に制約条件 (2) に関するラグランジュ乗数ベクトル $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$ を導入し，

$$\tilde{J} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{r}_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha)) + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{r}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha))$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha - \boldsymbol{S}\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha - \boldsymbol{t}) \tag{4}$$

と置く．これを未知数 $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ で微分して 0 と置いた式を解いて最尤推定解が求まる．

3. ガウス・ニュートン法

コンピュータビジョンにおいて最も基本的な最適化手法であるガウス・ニュートン法[7] は次のように定式化される．式 (4) を $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ で微分すると次のようになる．

$$\nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha}\tilde{J} = -V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}_\alpha) + \boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \qquad \nabla_{\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha}\tilde{J} = -V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha) - \boldsymbol{\lambda}_\alpha \tag{5}$$

各式を $\boldsymbol{0}$ と置いて，$\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ について解くと次のようになる．

$$\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha - V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \qquad \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]\boldsymbol{\lambda}_\alpha \tag{6}$$

これを式 (2) に代入すると $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$ が次のように定まる．

$$\boldsymbol{\lambda}_\alpha = -\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \tag{7}$$

ただし，次のように置いた．

$$\boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{S}\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{W}_\alpha = (\boldsymbol{S}V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha])^{-1} \tag{8}$$

式 (7) を式 (6) に代入したものを式 (1) に代入すると残差 J が次のように書ける．

$$J = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]^{-1}V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]^{-1}V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha(\boldsymbol{S}V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha])\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{W}_\alpha^{-1}\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha) \tag{9}$$

式 (3) を q_i, $i = 0, 1, 2, 3$ で微分すると次のようになる．

$$\frac{\partial\boldsymbol{S}}{\partial q_i} = 2\boldsymbol{Q}_i \tag{10}$$

ただし，行列 $\boldsymbol{Q}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ を次のように置いた．

$$\boldsymbol{Q}_0 = \begin{pmatrix} q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_2 & -q_1 & -q_0 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} -q_2 & q_1 & q_0 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_0 & q_3 & -q_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}_3 = \begin{pmatrix} -q_3 & -q_0 & q_1 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

行列 $\boldsymbol{V}_\alpha$ を

$$\boldsymbol{V}_\alpha = \boldsymbol{S}V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha] \tag{12}$$

と置き，$\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{W}_\alpha = \boldsymbol{I}$ の両辺を q_i で微分すると次のようになる．

$$2(\boldsymbol{Q}_iV_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top + \boldsymbol{S}V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{Q}_i^\top)\boldsymbol{W}_\alpha + \boldsymbol{V}_\alpha\frac{\partial\boldsymbol{W}_\alpha}{\partial q_i} = \boldsymbol{O} \tag{13}$$

これから $\partial\boldsymbol{W}_\alpha/\partial q_i$ が次のように得られる．

$$\frac{\partial\boldsymbol{W}_\alpha}{\partial q_i} = \mathcal{S}[\boldsymbol{Q}_iV_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top]\boldsymbol{W}_\alpha \tag{14}$$

ただし $\mathcal{S}[\,\cdot\,]$ は対称化作用素である ($\mathcal{S}[\boldsymbol{A}] = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top)/2$)．以上より式 (9) の q_i に関する微分が次のようになる．

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = -2\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha) - 2\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{Q}_iV_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha) \tag{15}$$

右辺第 2 項に対称化作用素 $\mathcal{S}[\,\cdot\,]$ がないのは，2 次形式では対称部分のみが意味をもつからである[7]．3×4 行列 $\boldsymbol{U}_\alpha$ を

$$\boldsymbol{U}_\alpha = 2\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{r}_\alpha & \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{r}_\alpha & \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{r}_\alpha & \boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{r}_\alpha \end{pmatrix} \tag{16}$$

と定義すると，式 (15) は次にように書き直せる．

© 2011 Information Processing Society of Japan

$$\nabla_{\boldsymbol{q}} J = -\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{U}_\alpha^\top \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha - 2\left(\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{Q}_i V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha) \right) \tag{17}$$

ただし，右辺第 2 項は i を 0, 1, 2, 3 とする 4 個の成分が縦に並んだ 4 次元ベクトルを意味する．一方，式 (9) を $\boldsymbol{t}$ で微分すると次のようになる．

$$\nabla_{\boldsymbol{t}} J = -\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \tag{18}$$

式 (15) を q_j で微分してガウス・ニュートン近似[7]（$\boldsymbol{e}_\alpha$ を含む項を無視）を行うと 2 階微分が次のようになる．

$$\frac{\partial^2 J}{\partial q_i \partial q_j} = 4\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{r}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{Q}_j \boldsymbol{r}_\alpha) \tag{19}$$

式 (18) より $\boldsymbol{t}$ に関する 2 階微分は次のようになる．

$$\nabla_{\boldsymbol{t}}^2 J = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{W}_\alpha \tag{20}$$

式 (18) を q_i について微分してガウス・ニュートン近似を行うと混合 2 階微分が次のようになる．

$$\nabla_{\boldsymbol{t}} \frac{\partial J}{\partial q_i} = 2\sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{r}_\alpha \tag{21}$$

以上より，式 (16) の行列 $\boldsymbol{U}_\alpha$ を用いると，残差 J のヘッセ行列が次のように書ける．

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{U}_\alpha^\top \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{U}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{U}_\alpha^\top \boldsymbol{W}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{U}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{W}_\alpha \end{pmatrix} \tag{22}$$

これからガウス・ニュートン法の手続きが次のように得られる．

（1） $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{t}$ の初期値を与え，$J_0 = \infty$（十分大きい数）と置く．
（2） $\boldsymbol{q}$ の定める式 (3) のスケール回転行列 $\boldsymbol{S}$ を計算する．
（3） 式 (8) のベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ と行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ を計算し，式 (9) の残差 J を計算する．
（4） $J \approx J_0$ なら $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{t}$ を返して終了する．そうでなければ $J_0 \leftarrow J$ とする．
（5） 式 (11) の行列 $\boldsymbol{Q}_i$ を計算し，式 (16) の行列 $\boldsymbol{U}_\alpha$ を計算する．
（6） 次の 7 次元連立 1 次方程式を解く．

$$\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{U}_\alpha^\top \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{U}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{U}_\alpha^\top \boldsymbol{W}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{U}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{W}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \boldsymbol{q} \\ \Delta \boldsymbol{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{U}_\alpha^\top \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{Q}_i V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha) \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \tag{23}$$

（7） $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{t}$ を次のように更新してステップ (2) に戻る．

$$\boldsymbol{q} \leftarrow \boldsymbol{q} + \Delta \boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{t} \leftarrow \boldsymbol{t} + \Delta \boldsymbol{t} \tag{24}$$

式 (23), (24) は式 (9) の**残差 J を現在の値 $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{t}$ の周りでテイラー展開して 2 次関数で近似し，近似した 2 次関数の最小値へ移動し**，これを反復するものである[7]．

4. ガウス・ヘルマート法

測地学でよく用いられるガウス・ヘルマート法[3),9),10),12)] は次のように定式化される．解 $\bar{\boldsymbol{q}}, \bar{\boldsymbol{t}}$ の近似値 $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{t}$ と真のデータ位置 $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ の近似値 $\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}, \boldsymbol{r}'^{(0)}_\alpha$ が与えられているとして，

$$\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} + \Delta\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, \quad \bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = \boldsymbol{r}'^{(0)}_\alpha + \Delta\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha, \quad \bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{q}, \quad \bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t} \tag{25}$$

と置いて，補正量 $\Delta\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, \Delta\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha, \Delta\boldsymbol{q}, \Delta\boldsymbol{t}$ を求める．式 (2) にこれらを代入してをテイラー展開し，補正量の 2 次以上の項を省略すると次のようになる．

$$\boldsymbol{r}'^{(0)}_\alpha + \Delta\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} + \Delta\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha) + \sum_{i=0}^{3} \Delta q_i \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial q_i} \boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} + \boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t} \tag{26}$$

式 (25), (26) を式 (4) に代入すると次のようになる．

$$\begin{aligned} \tilde{J} &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} - \Delta\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} - \Delta\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha)) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{r}'^{(0)}_\alpha - \Delta\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha, V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{r}'^{(0)}_\alpha - \Delta\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha)) \\ &- \sum_{\alpha=1}^{N} \Big(\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \Big(\boldsymbol{r}'^{(0)}_\alpha + \Delta\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} + \Delta\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha) - \sum_{i=0}^{3} \Delta q_i \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial q_i} \boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} - \boldsymbol{t} - \Delta\boldsymbol{t}\Big)\Big) \end{aligned} \tag{27}$$

これを $\Delta\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha, \Delta\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha, \Delta q_i, \Delta\boldsymbol{t}$ で微分して零と置けば次のようになる．

$$-V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} - \Delta\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha) + \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{\lambda}_\alpha = \boldsymbol{0}, \quad -V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]^{-1}(\boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{r}'^{(0)}_\alpha - \Delta\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha) - \boldsymbol{\lambda}_\alpha = \boldsymbol{0},$$

© 2011 Information Processing Society of Japan

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial q_i}\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}) = 0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{\lambda}_\alpha = \boldsymbol{0} \tag{28}$$

第 1，2 式から次式を得る．

$$\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} + \Delta\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha - V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \qquad \boldsymbol{r}'^{(0)}_\alpha + \Delta\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha]\boldsymbol{\lambda}_\alpha \tag{29}$$

これらを式 (26) に代入すると次のようになる

$$2\sum_{i=0}^{3}\Delta q_i\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} + \Delta\boldsymbol{t} - (\boldsymbol{S}V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top + V_0[\boldsymbol{r}'_\alpha])\boldsymbol{\lambda}_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha \tag{30}$$

ただし，$\boldsymbol{e}_\alpha$ は式 (8) の第 1 式のベクトルであり，式 (11) の行列 $\boldsymbol{Q}_i$ と式 (10) の関係を用いた．行列 $\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)}$ を

$$\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)} = 2\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} & \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} & \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} & \boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}\end{pmatrix} \tag{31}$$

と定義すると式 (28) の第 3 式は次のように書ける．

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)\top}\boldsymbol{\lambda}_\alpha = \boldsymbol{0} \tag{32}$$

行列 $\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)}$ と式 (12) の行列 $\boldsymbol{V}_\alpha$ を用いると式 (30) は次のように書ける．

$$\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)}\Delta\boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{t} - \boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{\lambda}_\alpha = \boldsymbol{e}_\alpha \tag{33}$$

式 (30), (32), (33) は $\boldsymbol{\lambda}_1$, ..., $\boldsymbol{\lambda}_N$, $\Delta\boldsymbol{q}$, $\Delta\boldsymbol{t}$ の連立 1 次方程式であり，これを解いて $\bar{\boldsymbol{q}}$, $\bar{\boldsymbol{t}}$, $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ が求まる．これは**線形化した拘束条件 (26) のもとで式 (1) の残差** J **を厳密に最小化する**ものである．しかし，式 (26) は近似である．そこで，得られた解を新しい近似値とし，λ_α を用いて $\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}$ を式 (29) の左辺に置き換え（計算では $\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)\prime}$ は用いない），これを収束するまで反復する．まとめると次の手順となる．

(1) $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ の初期値を与え，$\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} = \boldsymbol{r}_\alpha$, $J_0 = \infty$（十分大きい数）と置く．
(2) $\boldsymbol{q}$ の定める式 (3) のスケール回転行列 $\boldsymbol{S}$ を計算する．
(3) 式 (8) のベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ と行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ を計算し，式 (9) の残差 J を計算する．
(4) $J \approx J_0$ なら $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{t}$ を返して終了する．そうでなければ $J_0 \leftarrow J$ とする．
(5) 式 (11) の行列 $\boldsymbol{Q}_i$ を計算し，式 (31) の行列 $\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)}$ を計算する．
(6) 次の $(3N+7)$ 次元連立 1 次方程式を解く．

$$\begin{pmatrix} -\boldsymbol{V}_1 & & & \boldsymbol{U}_1^{(0)} & \boldsymbol{I} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & -\boldsymbol{V}_N & \boldsymbol{U}_N^{(0)} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{U}_1^{(0)\top} & \cdots & \boldsymbol{U}_N^{(0)\top} & & \\ \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{I} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda}_N \\ \Delta\boldsymbol{q} \\ \Delta\boldsymbol{t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_N \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix} \tag{34}$$

(7) $\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ を次のように更新して，ステップ (2) に戻る．

$$\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} \leftarrow \boldsymbol{r}_\alpha - V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \qquad \boldsymbol{q} \leftarrow \boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{t} \leftarrow \boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t} \tag{35}$$

5. ガウス・ヘルマート法の変形

以上からはガウス・ニュートン法とガウス・ヘルマート法が全く異なる手法に見えるが，ガウス・ヘルマート法を変形するとガウス・ニュートン法と類似の構造をもつことを示す．式 (33) より $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$ は次のように表せる．

$$\boldsymbol{\lambda}_\alpha = \boldsymbol{W}_\alpha\left(\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)}\Delta\boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{t} - \boldsymbol{e}_\alpha\right) \tag{36}$$

ただし $\boldsymbol{W}_\alpha$ は式 (8) の第 2 式の行列である．式 (36) を式 (28) の第 1, 2 式に代入すると $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$ が消去され，$\Delta\boldsymbol{q}$, $\Delta\boldsymbol{t}$ のみの連立 1 次方程式となる．これを用いるとガウス・ヘルマート法の手順が次のように変形できる．

(1) $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ の初期値を与え，$\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} = \boldsymbol{r}_\alpha$, $J_0 = \infty$（十分大きい数）と置く．
(2) $\boldsymbol{q}$ の定める式 (3) のスケール回転行列 $\boldsymbol{S}$ を計算する．
(3) 式 (8) のベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ と行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ を計算し，式 (9) の残差 J を計算する．
(4) $J \approx J_0$ なら $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{t}$ を返して終了する．そうでなければ $J_0 \leftarrow J$ とする．
(5) 式 (11) の行列 $\boldsymbol{Q}_i$ を計算し，式 (31) の行列 $\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)}$ を計算する．
(6) 次の 7 次元連立 1 次方程式を解く．

$$\begin{pmatrix}\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)\top}\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)} & \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)\top}\boldsymbol{W}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)} & \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{W}_\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta\boldsymbol{q} \\ \Delta\boldsymbol{t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)\top}\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha\end{pmatrix} \tag{37}$$

(7) λ_α を式 (36) によって計算する．
(8) $\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ を次のように更新して，ステップ (2) に戻る．

$$\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} \leftarrow \boldsymbol{r}_\alpha - V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{\lambda}_\alpha, \qquad \boldsymbol{q} \leftarrow \boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{t} \leftarrow \boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t} \tag{38}$$

このように変形すれば計算機内で使用するメモリ空間が減少するとともに，ガウス・ニュー

© 2011 Information Processing Society of Japan

トン法との類似点と相違点がより明らかになる．式 (23) と式 (37) を比較すると，まず式 (16) の $\boldsymbol{U}_\alpha$ が式 (31) の $\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)}$ に置き換わっていることがわかる．また，式 (23) の右辺は残差 J の $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ に関する勾配であるが[7)]，その第 2 項が式 (37) にはないことが分かる．しかし，ガウス・ヘルマート法の反復が収束して $\Delta\boldsymbol{q} = \Delta\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$ になると式 (36) より $\boldsymbol{\lambda}_\alpha = -\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha$ であり，式 (38) の第 1 式より

$$\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} = \boldsymbol{r}_\alpha + V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \tag{39}$$

となる．これはガウス・ニュートン法の式 (6) に式 (7) を代入したものと同じである．式 (39) を式 (31) に代入すると

$$\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)} = \boldsymbol{U}_\alpha + 2\Big(\boldsymbol{Q}_0V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha\ \boldsymbol{Q}_1V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha\ \boldsymbol{Q}_2V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha\ \boldsymbol{Q}_3V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha\Big) \tag{40}$$

となる．ゆえに

$$\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)\top}\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha = \boldsymbol{U}_\alpha\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha + 2\Big((\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{Q}_iV_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha)\Big) \tag{41}$$

であり，これを代入すると式 (37) の右辺が式 (23) の右辺に一致する．これが反復の終了時点で $\boldsymbol{0}$ になるので，ガウス・ヘルマート法がガウス・ニュートン法と同じ解を計算していることが分かる．式 (23) の左辺の行列は残差 J のヘッセ行列のガウス・ニュートン近似であり[7)]，式 (37) の左辺の行列も J のヘッセ行列のある近似とみなせる．仮にこれを「ガウス・ヘルマート近似」と呼べば，ガウス・ニュートン近似とガウス・ヘルマート近似は $O(\boldsymbol{e}_\alpha)$ の差があるが，ガウス・ニュートン法とガウス・ヘルマート法は同じような構造をしている．

6. 改良ガウス・ヘルマート法

ガウス・ニュートン法の式 (6) は現在の $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ に関する $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ の最尤推定量になっている．一方，ガウス・ヘルマート法の式 (35) の第 1 式は補正量 $\Delta\boldsymbol{q}$, $\Delta\boldsymbol{t}$ による逐次的更新式である．これが前節に示したように，反復とともにガウス・ニュートン法の式 (6) に収束する．これを考慮すれば，逐次的更新式を用いるより，直接に式 (39) によって $\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}$ を更新するほうが近似の精度が高まると期待される．これを整理すると次の改良ガウス・ヘルマート法が得られる．

(1) $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ の初期値を与え，$J_0 = \infty$（十分大きい数）と置く．

(2) $\boldsymbol{q}$ の定める式 (3) のスケール回転行列 $\boldsymbol{S}$ を計算する．

(3) 式 (8) のベクトル $\boldsymbol{e}_\alpha$ と行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ を計算し，次のように $\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}$ を計算する．

$$\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)} = \boldsymbol{r}_\alpha + V_0[\boldsymbol{r}_\alpha]\boldsymbol{S}^\top\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \tag{42}$$

(4) 式 (9) の残差 J を計算し，$J \approx J_0$ なら $\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{t}$ を返して終了する．そうでなければ $J_0 \leftarrow J$ とする．

(5) 式 (11) の行列 $\boldsymbol{Q}_i$ を計算し，式 (31) の行列 $\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)}$ を計算する．

(6) 次の 7 次元連立 1 次方程式を解く．

$$\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{U}_\alpha^{(0)\top}\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)} & \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{U}_\alpha^{(0)\top}\boldsymbol{W}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{U}_\alpha^{(0)} & \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{W}_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{q} \\ \Delta\boldsymbol{t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{U}_\alpha^{(0)\top}\boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \boldsymbol{W}_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha \end{pmatrix} \tag{43}$$

(7) $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{t}$ を次のように更新して，ステップ (2) に戻る．

$$\boldsymbol{q} \leftarrow \boldsymbol{q} + \Delta\boldsymbol{q}, \qquad \boldsymbol{t} \leftarrow \boldsymbol{t} + \Delta\boldsymbol{t} \tag{44}$$

前節で示したように式 (42) より式 (43) の右辺はガウス・ニュートン法の式 (23) の右辺と同じになる．前節に述べたように, (変形) ガウス・ヘルマート法の式 (37) の右辺も収束時点ではこれと一致するが，上記の改良ガウス・ヘルマート法では初めから右辺がガウス・ニュートン法と一致している．したがって，ガウス・ニュートン法との違いは左辺にヘッセ行列のガウス・ニュートン近似を用いるかガウス・ヘルマート近似を用いるかのみとなる．

7. シミュレーション実験

図 1 左のように曲面を原点を通るある回転軸の周りに回転し，平行移動し，スケールを変える．そしてステレオ視によって各格子点の相似変換前後 3 次元位置を計測する．曲面格子はその中心の格子点が世界座標の原点にあり，2 台のカメラはそれを 10 度で見込む位置に配置している．画像サイズは 500×800 画素，焦点距離は 600 画素を想定している．各格子点を対応点とし，その x, y 座標に期待値 0，標準偏差 σ 画素の正規乱数を加え，それぞれ金谷ら[8)] の方法で各格子点の 3 次元位置を最適に計算する．そして復元位置 $\hat{\boldsymbol{r}}_\alpha$, $\hat{\boldsymbol{r}}'_\alpha$ の正規化共分散行列 $V_0[\hat{\boldsymbol{r}}_\alpha]$, $V_0[\hat{\boldsymbol{r}}'_\alpha]$ を原ら[5)] の方法で予測する．これから，各復元点の誤差は非等方であり，奥行方向にそれと直交する方向の約 5 倍の不確定性があることが確認される[5)]．

表 1 は画像に $\sigma = 1.0$, 2.0, 3.0 の誤差を加えた場合の残差 J の反復による減少の様子を示したものである．恒等変換（$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$, $s = 1$）から開始し，しきい値を用いずに J の減少が停止するまで反復した．変化しない桁に下線を引いている．まず分かることはガウス・ヘルマート法は最初の反復の減少量が非常に大きいことである．それに対してガウス・ニュートン法では J は少しずつしか減少しない．一方，改良ガウス・ヘルマート法は最初の反復の減少量はガウス・ヘルマート法より小さい．これは改良ガウス・ヘルマート法は現在の相似変換に対する $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$ の最尤推定量を計算しており，初期値の恒等変換が解とかけ離れて

© 2011 Information Processing Society of Japan

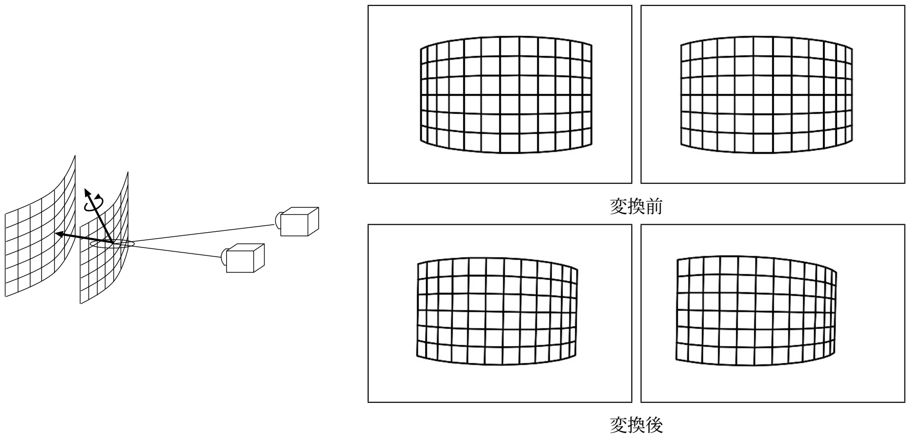

図 1 左：相似変換（回転，並進，スケール変化）する曲面格子ステレオ視による 3 次元計測と誤差楕円体．右：曲面格子の変換前後のステレオ画像のシミュレーション．

いるために式 (42) の $\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}$ が $\bar{\boldsymbol{r}}_\alpha$ の悪い近似になっているためである．一方，ガウス・ヘルマート法では $\boldsymbol{r}_\alpha^{(0)}$ の初期値としてデータ $\boldsymbol{r}_\alpha$ そのものを用いるので近似の精度が高い．**それにもかかわらず**改良ガウス・ヘルマート法が三つの方法の中で最も速く収束し，誤差が大きいほどそれが顕著となる．

図 2(a) は σ を 0 から 3 まで連続的に変えながら，各 σ で異なる誤差を独立に 1000 回発生させて実行した場合の平均反復回数である．これから，ガウス・ニュートン法よりもガウス・ヘルマート法のほうが速く収束し，ほとんどの場合に改良ガウス・ヘルマート法の収束がさらに速いことが分かる．比較のために一様等方誤差モデルによる解を初期値とした場合を図 2(b) に示す．誤差が各点で一様等方分布をしているとすれば（すなわち $V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] = V_0[\boldsymbol{r}_\alpha] = \boldsymbol{I}$ なら），よく知られているように $\{\boldsymbol{r}_\alpha\}$ と $\{\boldsymbol{r}'_\alpha\}$ の重心をそれぞれ $\boldsymbol{r}_c$, $\boldsymbol{r}'_c$ とし，重心からの差を $\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_c$, $\tilde{\boldsymbol{r}}'_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha - \boldsymbol{r}'_c$ とすると，スケール変化は

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{\alpha=1}^{N} \|\tilde{\boldsymbol{r}}'_\alpha\|^2}{\sum_{\alpha=1}^{N} \|\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha\|^2}} \tag{45}$$

と推定され，回転 $\boldsymbol{R}$ は $\{\tilde{\boldsymbol{r}}_\alpha\}$, $\{\tilde{\boldsymbol{r}}'_\alpha\}$ から特異値分解による方法[5] で計算できる．並進は $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}'_c - s\boldsymbol{R}\boldsymbol{r}_c$ となる．図 2(b) から分かるように，初期値の精度が高いときは誤差が少ないとガウス・ニュートン法のほうがガウス・ヘルマート法より速く収束するが，誤差が大きくなるにつれてガウス・ヘルマート法のほうが効率的となる．しかし，改良ガウス・ヘルマー

表 1 ステレオ画像に加えた $\sigma = 1.0, 2.0, 3.0$ の誤差に対する残差 J の減少．ガウス・ニュートン法（GN），ガウス・ヘルマート法（GH），改良ガウス・ヘルマート法（改良 GH）を比較．下線は変化しない桁．

$\sigma = 1.0$

	GN	GH	改良 GH
0	23368.98044646554	23368.98044646554	23368.98044646554
1	5923.560464358145	151.2986897231218	1285.065292480236
2	260.2294019664706	138.7852882171576	157.4589569299990
3	138.6397722443412	138.4925647492029	138.5000828752851
4	138.4925871308799	138.4925039364953	138.4925004345684
5	138.4924995387721	138.4924994558186	138.4924994516441
6	138.4924994515073	138.4924994515843	138.4924994514191
7	138.4924994514190	138.4924994514190	138.4924994514189
8	138.4924994514186	138.4924994514186	138.4924994514183

$\sigma = 2.0$

	GN	GH	改良 GH
0	23705.92405252490	23705.92405252490	23705.92405252490
1	6631.055953257285	594.2288594040884	1561.554831323493
2	736.3892569773028	558.1047339694743	558.6320435827311
3	553.9802729910044	553.1013519598023	553.0948890717049
4	553.1072304698275	553.0944258828818	553.0931283140471
5	553.0934173237943	553.0931334967796	553.0931253383568
6	553.9031314363093	553.0931261287393	553.0931253320340
7	553.9031254597525	553.0931253408035	553.0931253320183
8	553.9031253346927	553.0931253326902	
9	553.9031253320766	553.0931253320288	
10	553.9031253320209	553.0931253320218	
11	553.9031253320202	553.0931253320192	

$\sigma = 3.0$

	GN	GH	改良 GH
0	24182.94641626991	24182.94641626991	24182.94641626991
1	7749.683523117275	1385.515352477767	2074.419348255112
2	1602.792794683083	1264.397843471071	1237.583977963944
3	1243.659456346911	1237.444020868650	1237.288888227983
4	1237.725240249172	1237.323793869136	1237.288729761082
5	1237.327534736445	1237.289379736924	1237.288728527720
6	1237.292254473387	1237.288833051470	1237.288728517618
7	1237.289050047267	1237.288731797017	1237.288728517540
8	1237.288757863381	1237.288728948894	1237.288728517537
9	1237.288731196586	1237.288728533946	1237.288728517535
10	1237.288728762133	1237.288728519425	
11	1237.288728539869	1237.288728517618	
12	1237.288728519574	1237.288728517545	
13	1237.288728517725	1237.288728517538	
14	1237.288728517554		
15	1237.288728517537		

© 2011 Information Processing Society of Japan

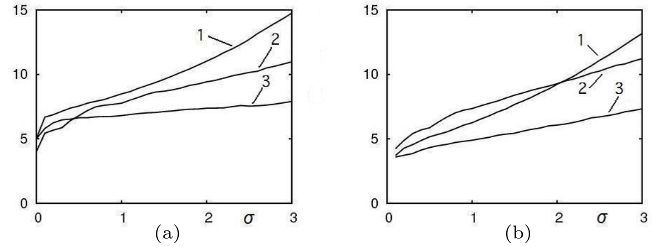

図 2 ステレオ画像に加えた誤差の標準偏差 σ に対する平均反復回数．1. ガウス・ニュートン法，2. ガウス・ヘルマート法，3. 改良ガウス・ヘルマート法．(a) 初期値は恒等変換．(b) 初期値は一様等方誤差モデル．

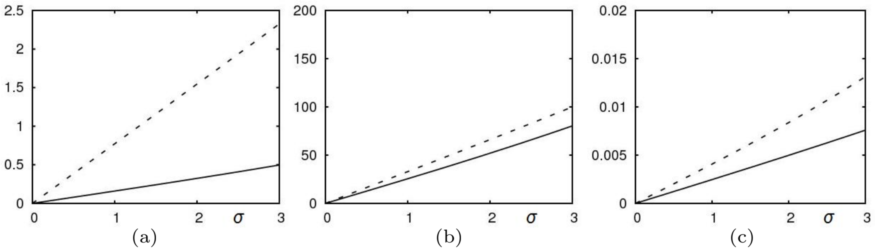

図 3 ステレオ画像に加えた誤差の標準偏差 σ に対する (a) 回転，(b) 並進，(c) スケール変化の RMS 誤差．点線は一様等方誤差モデル．

ト法は常に最も収束が速い．

次に解の精度を比較する．得られた回転行列，並進，スケール変化を $\hat{\boldsymbol{R}}$, $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{s}$ とし，それらの真値を $\bar{\boldsymbol{R}}$, $\bar{\boldsymbol{t}}$, $\bar{s}$ とするとき，回転の誤差は相対回転 $\hat{\boldsymbol{R}}\bar{\boldsymbol{R}}^{-1}$ の回転角を $\delta\Omega$（°）で評価し，並進，スケール変化の誤差をそれぞれ $\delta\boldsymbol{t} = \hat{\boldsymbol{t}} - \bar{\boldsymbol{t}}$, $\delta s = \hat{s} - \bar{s}$ で評価する．これを σ を固定して異なる誤差に対して 1000 回試行し，次の RMS 誤差を評価した．

$$E_{\boldsymbol{R}} = \sqrt{\frac{1}{1000}\sum_{a=1}^{1000}(\delta\Omega^{(a)})^2}, \quad E_{\boldsymbol{t}} = \sqrt{\frac{1}{1000}\sum_{a=1}^{1000}\|\delta\boldsymbol{t}^{(a)}\|^2}, \quad E_s = \sqrt{\frac{1}{1000}\sum_{a=1}^{1000}(\delta s^{(a)})^2} \tag{46}$$

図 3 は横軸を σ にとって RMS 誤差 $E_{\boldsymbol{R}}$, $E_{\boldsymbol{t}}$, E_s をプロットしたものである．ガウス・ニュートン法，ガウス・ヘルマート法，改良ガウス・ヘルマート法にはグラフで識別できる差はないので，比較として一様等方誤差モデルの解と比較した．これから 3 次元相似変換の計算には各点の誤差の共分散行列を考慮しなければ正しい推定ができないことが分かる．特に回転の推定に差が大きく現れている．

8. 実データ実験

トルコは地震多発国であり，地盤の変形を GPS データでモニターしている．**表 2** はイスタンブール近郊の GPS 測量した地点のうち，地盤が不安定な地域の 5 地点を選び，その X, Y, Z 座標（単位は m）を示したものであり，1997 年 10 月および 1998 年 3 月の測定結果である[1]．それぞれ，地盤が安定している地域に参照点を設定し，その測定値を絶対位置の補正を行っている．統計的手法によって推定した各地点の測定値の共分散行列は 1997 年データでは順に

$$\begin{pmatrix} 34 & 10 & 17 \\ 10 & 12 & 7 \\ 17 & 7 & 33 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 234 & 83 & 136 \\ 83 & 97 & 58 \\ 136 & 58 & 245 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 24 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 6 \\ 12 & 6 & 25 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 63 & 25 & 36 \\ 25 & 28 & 16 \\ 36 & 16 & 53 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 22 & 8 & 12 \\ 8 & 9 & 5 \\ 12 & 5 & 23 \end{pmatrix}$$

に 10^{-8} を掛けたものであり，1998 年データでは順に

$$\begin{pmatrix} 51 & 18 & 23 \\ 18 & 18 & 13 \\ 23 & 13 & 30 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 323 & 140 & 159 \\ 140 & 148 & 100 \\ 159 & 100 & 218 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 41 & 14 & 19 \\ 14 & 16 & 11 \\ 19 & 11 & 28 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 141 & 47 & 70 \\ 47 & 49 & 38 \\ 70 & 38 & 96 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 59 & 20 & 29 \\ 20 & 24 & 16 \\ 29 & 16 & 43 \end{pmatrix}$$

に 10^{-8} を掛けたものである．**表 3** は前述の三つの方法で恒等変換を初期値とした残差の変化であり（下線は変化しない桁），8, 9 桁目以降が不規則に変動している．この現象は測地学でも知られていて，ガウス・ヘルマート法の欠点とみなされることもあった．しかし，これはどの方法でも共通であり，その原因は表 2 のデータが桁数は多いがどの地点も冒頭の 4, 5 桁は同じであり，しかも 1997 年と 1998 年で変化が生じるのは最後の 2, 3 桁のみであるためであると考えられる．このような場合に数値解析でよく知られているように有限長計算による誤差が増幅されやすい．表 3 は倍精度計算であるが，どの方法も 2 回の反復で実質的に収束し，8, 9 桁目以降は倍精度計算の精度の限界とみなせる．

これに伴って並進，回転，スケール変化も意味のあるのは有効数字 6, 7 桁であり，その限界精度の値を**表 4** に示す．これに比較すると，通常用いられる一様等方誤差モデルの解とは 1 桁かそれ以下しか一致していない．これからも本論文の方法を用いなけれが精密な

表 2 イスタンブール近郊の 5 地点の 1997 年 10 月と 1998 年 3 月に測定した 3 次元位置[1]．

1997 年 10 月			1998 年 3 月		
X	Y	Z	X	Y	Z
4233187.8344	2308228.6785	4161469.1229	4233187.8612	2308228.7042	4161469.1383
4233190.6059	2308518.3249	4161336.2582	4233190.6124	2308518.3166	4161336.2682
4233429.1004	2307875.2240	4161292.4034	4233429.1008	2307875.2239	4161292.4029
4233259.8205	2307712.3025	4161553.4880	4233259.8309	2307712.2990	4161553.5007
4233770.4580	2308340.5240	4160740.3286	4233770.4534	2308340.5219	4160740.3181

© 2011 Information Processing Society of Japan

表 3 表 2 のデータに対するガウス・ニュートン法（GN），ガウス・ヘルマート法（GH），改良ガウス・ヘルマート法（改良 GH）の残差 J ($\times 10^{-6}$) の変化．初期値は恒等変換．下線は変化しない桁．

	GN	GH	改良 GH
0	13.90466081612066	13.90466081612066	13.90466081612066
1	6.891471483617726	6.891561230647212	6.891490551983246
2	6.409224270624541	6.409224054092592	6.409224341043299
3	6.409224500361636	6.409224582261247	6.409224199848933
4	6.409224272986374	6.409224257902020	6.409224110716818
5	6.409224117901836	6.409224682772476	6.409224152869662
6	6.409224095494097	6.409224242530478	6.409224325787738
7	6.409224093119093	6.409223929884663	6.409224417144383
8	6.409224304185821	6.409223999141919	6.409224110716818
9	6.409223917076926	6.409224189433356	6.409224080748898
10	6.409224111129707	6.409224068655141	6.409224155956410

表 4 表 2 のデータから計算した地盤の並進 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3)^\top$（単位は m），スケール変化 s，回転軸 $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, l_3)^\top$（単位ベクトル），および回転角 Ω（単位は度）．最適推定は意味のある限界精度の値を示す．

	一様等方誤差モデル	最適推定
t_1	-199.8604	-274.6708
t_2	42.52530	100.2332
t_3	143.6579	140.7879
s	1.000004	1.000009
l_1	-0.04950650	-0.008546834
l_2	0.9328528	0.8213706
l_3	-0.3568400	-0.5703308
Ω	0.002242810	0.002887644
J	9.242858×10^{-6}	6.409224×10^{-6}

推定ができないことがわかる．

9. まとめ

3 次元データはステレオ視やレンジファインダーなどの 3 次元センサーによって計測されるので不均一な誤差をもつ．本論文ではそのようなデータから 3 次元相似変換を最適に計算する方法として，従来は異なる手法とみなされていたガウス・ニュートン法とガウス・ヘルマート法を比較した．そして，両者が実は類似の構造をもつことを指摘し，両者を融合した「改良ガウス・ヘルマート法」を提案した．次に，ステレオ視による 3 次元復元シミュレーションを行い，データの誤差が少なく，よい初期値が得られる場合はガウス・ニュートン法とガウス・ヘルマート法はあまり差がないが，提案法は誤差や初期値にかかわらずいずれよりも収束性能が優れていることを示した．最後に GPS 測地データを用いて，従来の一様等方誤差モデルでは十分な推定ができないこと，従来ガウス・ヘルマート法の問題と考えられていたことが GPS 測地データに起因することを指摘した．

謝辞: 本研究に関する有益なご意見を頂き，GPS 地測データを提供して頂いたトルコ Istanbul 工科大学の Orhan Akyilmaz 准教授，および実験に参加して頂いた三洋電機の原裕貴氏に感謝します．本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C 21500172) の助成によった．

参考文献

1) M. Acar, M. T. Özlüdemir, O. Akyilmaz, R. N. Celik and T. Ayan, Deformation analysis with Total Least Squares, Nat. Hazards Earth Syst. Sci., **6**-4 (2006-6), 663–669.
2) Y. A. Felus and R. C. Burch, On symmetrical three-dimensional datum conversion, *GPS Solutions* **13**-1 (2009-1), 65–74.
3) W. Förstner, On weighting and choosing constraints for optimally reconstructing the geometry of image triplets, *Proc. 6th Euro. Conf. Comput. Vision*, June/July 2000, Dublin, Ireland, Vol. 2, pp. 669–701.
4) E. W. Grafarend and J. L. Awange, Nonlinear analysis of the three-dimensional datum transformation [conformal group $C_7(3)$], *J. Geodesy*, **77**-1/2 (2003-5), 66–76.
5) 原裕貴, 新妻弘崇, 金谷健一, 不均一な誤差分布をもつ空間データからの 3 次元回転の最適計算, 情報処理学会研究報告, 2010-CVIM-175-23 (2011-1), 1–8.
6) 原裕貴, 新妻弘崇, 金谷健一, 不均一な誤差分布をもつ空間データからの 3 次元相似変換の最適計算, 情報処理学会研究報告, 2011-CVIM-176-15 (2011-3), 1–8.
7) 金谷健一,「これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—」, 共立出版, 2005.
8) 金谷健一, 菅谷保之, 新妻弘崇, 2 画像からの三角測量: Hartley-Sturm vs. 最適補正, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-54 (2008-3), 335–342.
9) E. M. Mikhail and F. Ackermann, *Observations and Least Squares*, University Press of America, Lanham, MD., U.S.A., 1976.
10) F. Neitzel, Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformations, *J. Geodesy*, **84**-12 (2010-12), 751–762.
11) N. Ohta and K. Kanatani, Optimal estimation of three-dimensional rotation and reliability evaluation, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, *E81-D*-11 (1998-11), 1247–1252.
12) C. Perwass, C. Gebken and G. Sommer, Geometry and kinematics with undertain data, *Proc. 9th Euro. Conf. Comput. Vision*, May 2006, Graz, Austria, Vol. 1, pp. 225–237.

© 2011 Information Processing Society of Japan