講座

画像の三次元理解のための最適化計算 [I]
—直線の当てはめ—

Optimization Computation for 3-D Understanding of Images [I]: Line Fitting

菅谷保之　金谷健一

1. はじめに

本講座では画像から抽出した点データからのシーンの三次元理解，すなわち物体の位置や形状を推論する問題で用いられる最適化計算について述べる．今回は最も簡単な例として，与えられた点列に直線を当てはめる問題を取り上げ，用語や考え方に慣れることを目的とする．特に最小二乗法，最ゆう推定，再投影誤差，精度の理論限界などを説明する．これらは次回以降の準備となる．

2. 直線当てはめ

厳密には一直線上にない画像上の画素列（連続している必要はない）(x_α, y_α), $\alpha = 1, ..., N$ に直線を当てはめたい．具体的には，当てはめる直線を $Ax + By + C = 0$ とおいて，

$$Ax_\alpha + By_\alpha + C \approx 0, \qquad \alpha = 1, ..., N \tag{1}$$

となるように A, B, C を定めたい（図 1）．しかし，$\approx$ をどう解釈すればよいであろうか．

目　次

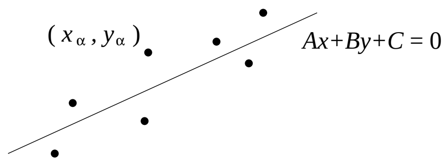

図 1　直線当てはめ　点列 (x_α, y_α) に直線 $Ax + By + C = 0$ を当てはめる．

素朴な方法は最小二乗法 (least squares) であり，次の $J_{\rm LS}$ を最小にするものである．

$$J_{\rm LS} = \sum_{\alpha=1}^{N} (Ax_\alpha + By_\alpha + C)^2 \tag{2}$$

ただし，A, B, C は全体を何倍しても同じ直線を表わすので，何らかのスケールの正規化が必要となる（そうしないと，式 (2) は $A = B = C = 0$ のときに最小になる）．正規化としては，$A^2 + B^2 + C^2 = 1$, $A^2 + B^2 = 1$, $C = 1$ などが考えられる．しかし，解はどういう正規化を行うかに依存する．

正規化は計算の都合で導入するもので，パラメータのとり方によって異なる直線が当てはまるというのは変である．一体，どういう正規化が正しいのであろうか．そもそも式 (2) を最小化することにどういう意味があるのであろうか．

3. 最小二乗法の起源

最小二乗法はガウスによって考案されたものであり，ガウスは期待値 0 の誤差 ϵ の分布密度 $p(\epsilon)$ が普通は次の形をしていることを指摘した（これから正規分布 (normal distribution) あるいはガウス分布 (Gaussian distribution) という名称が生まれた[注1]）（図 2）．

菅谷保之　正員　豊橋技術科学大学情報工学系
E-mail　sugaya@iim.ics.tut.ac.jp
金谷 健一　正員　岡山大学大学院自然科学研究科
E-mail　kanatani@suri.cs.okayama-u.ac.jp
Yasuyuki SUGAYA, Member (Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology, Toyohashi-shi, 441-8580 Japan) and Kenichi KANATANI, Member (Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama-shi, 700-8530 Japan).
電子情報通信学会誌　Vol. 92 No. 3 pp.229–233 2009 年 3 月

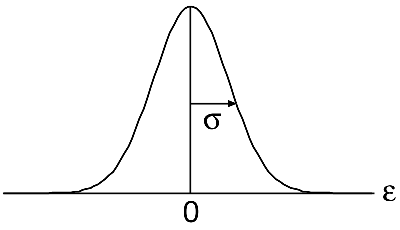

図 2　正規分布

$$p(\epsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\epsilon^2/2\sigma^2} \tag{3}$$

式中の σ^2 は分布の広がりの程度を示す分散 (variance) と呼ばれる定数であり，σ は標準偏差 (standard deviation) と呼ばれる．

一般にパラメータ θ を含んだ関数 $f_\theta(x)$ を考え，x として値 $x_1, ..., x_N$ を与えたとき，誤差がなければ値 $f_\theta(x_1)$, ..., $f_\theta(x_N)$ が観測されるが，現実には各々に誤差 ϵ_1, ..., ϵ_N が加わった値が観察されるとする．

$$y_\alpha = f_\theta(x_\alpha)+\epsilon_\alpha, \qquad \alpha=1,...,N \tag{4}$$

各 ϵ_α は式 (3) に従う独立な確率変数であるとする．各 ϵ_α は独立であるから，ϵ_1, ..., ϵ_N の同時分布密度は式 (3) を掛け合せた $p(\epsilon_1)p(\epsilon_2)\cdots p(\epsilon_N)$ である．式 (4) を $\epsilon_\alpha = y_\alpha - f_\theta(x_\alpha)$ と変形して代入した

$$\prod_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(y_\alpha-f_\theta(x_\alpha))^2/2\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{2^N\pi^N\sigma^{2N}}}e^{-\sum_{\alpha=1}^{N}(y_\alpha-f_\theta(x_\alpha))^2/2\sigma^2} \tag{5}$$

を観測値 y_1, ..., y_N のゆう度 (likelihood) と呼ぶ．パラメータ θ が不明のとき，このゆう度が最大となる値 $\hat{\theta}$ を想定するのが自然である．ゆう度を最大にするので，これを最ゆう推定 (maximum likelihood) と呼び，値 $\hat{\theta}$ を最ゆう推定量 (maximum likelihood estimator) と呼ぶ (1)．ゆう度を最大化する代わりに，その対数の符号を換えたものを最小にしてもよい．また定数項や正の定数倍は最小化に影響しない．したがって，次の関数を最小にすればよい．

$$J=\sum_{\alpha=1}^{N}(y_\alpha-f_\theta(x_\alpha))^2 \tag{6}$$

これが二乗和を最小にするガウスの最小二乗法である．このことから分かるように，最適化を行うには誤差がどういう性質を持つと考えるかを指定しなければならない．これを誤差モデル (noise model) と呼ぶ．最小二乗法は正規分布の誤差モデルを仮定するものである．

4.　直線当てはめの最ゆう推定

前節の考察から，式 (2) の最小二乗法は式 (1) の左辺に期待値 0，分散一定の独立な正規分布誤差が加わっていると仮定することに相当している．これは妥当であろうか．

誤差に関して特別の知識がなければ，各データ点 (x_α, y_α) の x_α，y_α はそれぞれ真の値 $\bar{x}_\alpha$，$\bar{y}_\alpha$ に期待値 0 の一定の分散 σ^2 の誤差 ϵ_α, η_α が独立に加わった

$$x_\alpha=\bar{x}_\alpha+\epsilon_\alpha, \qquad y_\alpha=\bar{y}_\alpha+\eta_\alpha \tag{7}$$

であると考えるのが自然である．そうすると式 (1) の左辺 $Ax_\alpha+By_\alpha+C$ には期待値 0，分散 $(A^2+B^2)\sigma^2$ の誤差が加わる．これは $(Ax_\alpha+By_\alpha+C)/\sqrt{A^2+B^2}$ に期待値 0 の分散 σ^2 の誤差が加わっていると考えることに等しい．したがって，最ゆう推定は一見自然な式 (2) の最小化ではなく，

$$J=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(Ax_\alpha+By_\alpha+C)^2}{A^2+B^2} \tag{8}$$

を最小化しなければならない．これがガウスの思想に合致するものである．注目すべきことは，この形は A, B, C の定数倍に不変であり，どういう正規化を用いても解に影響しないことである．このことからも式 (8) が合理的であることがうなずける．

このように，誤差モデルを考慮しないで形式的に最小二乗法を適用してはならない．とはいえ，形式的な最小二乗法は式が単純で，普通は解も簡単に求まり，画像からの三次元計算では非常によく用いられている．本講座では，このような形式的な最小二乗法によってどれだけ精度が犠牲になっているか，最ゆう推定によってどれだけ精度が向上するかを具体的な問題について示す．同時に，最近は最ゆう推定の計算法が進歩して，非常に簡単な定式化で最適化が実行できることを示す．

5.　最ゆう推定の幾何学的意味

式 (8) は次のように考えることができる．問題は誤差を含んだ点列 (x_α, y_α) から真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ を通る直線 $Ax+By+C=0$ を推定する問題とみなせる．言い換えれば

$$A\bar{x}_\alpha+B\bar{y}_\alpha+C=0, \qquad \alpha=1,...,N \tag{9}$$

(注 1) 統計学者は正規分布，物理学者はガウス分布という用語を好むようである．

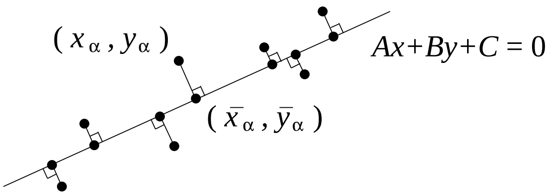

図 3　**最ゆう推定の幾何学的意味**　各点 (x_α, y_α) からの垂直距離の二乗和を最小にする直線 $Ax+By+C=0$ を当てはめる．

となる $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, A, B, C を求めよという問題になる．これは厳密な等式であり，式 (1) の意味不明な $\approx$ が姿を消していることに注意．

このような $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, A, B, C は無数に存在するから，その中で最もゆうらしいものを求めたい．データ (x_α, y_α), $\alpha = 1, ..., N$ が観測されるゆう度は 3 節で述べたように，式 (7) を $\epsilon_\alpha = x_\alpha - \bar{x}_\alpha$, $\eta_\alpha = y_\alpha - \bar{y}_\alpha$ と変形して式 (3) の分布密度の積に代入した次式である．

$$\frac{1}{\sqrt{2^{2N}\pi\sigma^{4N}}}\prod_{\alpha=1}^{N} e^{-(x_\alpha-\bar{x}_\alpha)^2/2\sigma^2} e^{-(y_\alpha-\bar{y}_\alpha)^2/2\sigma^2} \tag{10}$$

最ゆう推定は解の候補の中からこれを最大にするもの，あるいはその対数の符号を変えてものを最小にするものを選ぶことである．最小化に影響しない定数項や定数倍を除けば，問題は

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N}\Big((x_\alpha - \bar{x}_\alpha)^2 + (y_\alpha - \bar{y}_\alpha)^2\Big) \tag{11}$$

を式 (9) のもとで最小化する $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, A, B, C を求めよということになる．式 (11) は再投影誤差 (reprojection error) と呼ばれている (注 2)．

式 (9) のもとで式 (11) を最小にすることは，各点 (x_α, y_α) から式 (9) の直線上の点 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ までの距離の二乗和を最小にすることである．そして，式 (11) の最小値は各点 (x_α, y_α) から直線 $Ax+By+C=0$ に下した垂線の二乗和である．点 (x_α, y_α) と直線 $Ax+By+C=0$ との垂直距離は $|Ax_\alpha + By_\alpha + C|/\sqrt{A^2+B^2}$ である [3]．したがって，式 (8) は各点から当てはめた直線までの距離の二乗和であり，最ゆう推定はこれを最小にするように当てはめるという自然な意味をもっている（図 3）．

(注 2) この用語は画像からの三次元形状復元問題から生じた [2]．物体が投影された画像から三次元形状を推定し，それを画像に再び投影して，データが観測されるべき位置を予想したときの，その観測位置とのずれという意味である．

(注 3) ベクトルのある成分が極端に大きく，ある成分が極端に小さいと，有限長計算ではけた落ち (cancellation) と呼ぶ現象が起きて精度が低下する．ただし，これは一般論であり，画像サイズが 1000×1000 画素以下であれば，$f_0 = 1$ としても実際には問題にならない．むしろ，成分の次元をそろえるという観点が重要である．異なる次元を持つ物理量から成るベクトルは，それを変換すると論理的な矛盾が生じる．2cm+3kg = 5 (?)

6.　同次座標による表現

次回以降に述べるような多くの問題では，最ゆう推定の精度は最小二乗法よりもはるかに高い．しかし，直線当てはめに限っては両者は実質的な差がない．なぜなら，式 (8) の最小化は正規化によらないから $A^2+B^2=1$ としてもよい．この正規化のもとでは最ゆう推定は式 (2) を最小にする最小二乗法と同じになる．そして，簡単な計算で解が求まる [1]．

しかし，次回以降の準備として，式 (8) を最小化する一般的な手続きを示す．まず点 (x_α, y_α), $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ を次のベクトルで表す．

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \begin{pmatrix} x_\alpha/f_0 \\ y_\alpha/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha/f_0 \\ \bar{y}_\alpha/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

ここに f_0 は固定した基準長である．これを入れる理由は，f_0 を画像サイズ程度にとれば，ベクトルの成分が 1 のオーダーにそろい，数値計算の精度が（原理的に）上がること，及び，成分が無次元量となるという理論上の要請である (注 3)．

式 (12) は射影幾何学の用語を用いると [3]，点の位置を同次座標 (homogeneous coordinates) で表すことに相当している．これを用いると，式 (9) は次のように書ける．

$$(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha) = 0, \qquad \boldsymbol{u} \equiv \begin{pmatrix} A \\ B \\ C/f_0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

本講座では以下，ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書く．ベクトル $\boldsymbol{u}$ は直線 $Ax+By+C=0$ の同次座標でもある [3]．再投影誤差を次のように定義する．

$$E = \sum_{\alpha=1}^{N} \|\boldsymbol{x}_\alpha - \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\|^2 \tag{14}$$

これは式 (11) の J（次元は長さの二乗）を f_0^2 で割ったものになっている．最ゆう推定は式 (13) のもとで式 (14) を最小化することである．制約付き最小化はラグランジュの未定乗数を用いて制約を消去することができる [1]）．その結果，問題は次式の最小化となる（導出省略）．

$$E = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{u})}, \quad V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

式 (12) の $\boldsymbol{x}_\alpha$ の定義と式 (13) の $\boldsymbol{u}$ の定義と上式の $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ の定義を代入すると，上式の E は式 (8) の J を f_0^2 で割ったものになっていることが確認できる．なぜ，わざわざこのような回りくどい式 (特に奇妙な記号 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$) を用いるのかは後の応用で明らかになる．

7. 最ゆう推定解の計算

式 (14) の形の式を最小化する計算法として，Chojnacki ら [(4)] が考案した FNS(Fundamental Numerical Scheme) 法を紹介する．式 (14) を $\boldsymbol{u}$ で微分すると次のようになる [(注 4)]．

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} E &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\alpha)\boldsymbol{x}_\alpha}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{u})} - \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{u}}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{u})^2} \\ &= 2(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{L})\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{16}$$

ただし，次のように置いた．

$$\boldsymbol{M} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha^\top}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{u})}, \quad \boldsymbol{L} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{u})^2} \tag{17}$$

式 (14) を最小化するには式 (16) を $\boldsymbol{0}$ とする $\boldsymbol{u}$ を求めればよい．$\boldsymbol{u}$ を正規化としては $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ を採用する (解に影響しない)．Chojnacki ら [(4)] は次の手順を示した．

1. $\boldsymbol{u}$（単位ベクトル）に適当な初期値を与える．
2. 次の固有値問題を解き，最小固有値 λ に対する単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}'$ を求める．

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{u}' = \lambda \boldsymbol{u}', \qquad \boldsymbol{X} \equiv \boldsymbol{M} - \boldsymbol{L} \tag{18}$$

3. 符号を除いて $\boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{u}'$ なら $\boldsymbol{u}'$ を返して終了．そうでなければ $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{u}'$ としてステップ 2 に戻る．

この FNS 法は元来は式 (15) の $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$ が $\boldsymbol{x}_\alpha$ に依存する複雑な形をしている場合 [(注 5)] を想定したものであり，式 (15) の形では上記の反復は 1 回で終了してしまう．しかし，次回以降に述べる応用では重要な役割を果たす．

8. 精度の理論限界

推定問題においては，何らかの推定値さえ得られればよいというのではなく，その推定値にどれだけの信頼性があるかを評価することも重要である．直線当てはめでも，当てはめる直線自体の計算（最小二乗法で計算してもよい）よりもその信頼性評価の方がはるかに重要である．

当てはめた直線の信頼性が評価できれば，例えば画像上の複数のエッジに直線を当てはめ，その交点から消失点を計算し，それを用いてシーンの三次元形状を計算するような応用では，得られた三次元形状の信頼性が評価できる [(6)]．そのためには，前節の一般的な定式化が本質的な役割を果たす．

直線を表す式 (13) の $\boldsymbol{u}$ は単位ベクトルであるから，その微小変化は $\boldsymbol{u}$ に直交する方向に生じる．そこで，その計算値を $\hat{\boldsymbol{u}}$ の誤差 $\Delta\boldsymbol{u}$ を，$\hat{\boldsymbol{u}}$ の $\boldsymbol{u}$ に直交する方向の大きさで測る（図 4）．幾何学的には $\Delta\boldsymbol{u}$ は $\hat{\boldsymbol{u}}$ を $\boldsymbol{u}$ に垂直な平面に射影したものであり，次のように表せる．

$$\Delta\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} - (\hat{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}\hat{\boldsymbol{u}}, \quad \boldsymbol{P}_{\mathbf{u}} \equiv \boldsymbol{I} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^\top \tag{19}$$

行列 $\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}$ は単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ に垂直な平面上へ写像する射影行列 (projection matrix) である [(3)]．そこで計算の信頼性を次の共分散行列 (covariance matrix) で評価する．

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] = E[\Delta\boldsymbol{u}\Delta\boldsymbol{u}^\top] = E[(\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}\hat{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}\hat{\boldsymbol{u}})^\top] \tag{20}$$

ここに $E[\,\cdot\,]$ は誤差分布に関する期待値を表す．上式のトレース [bpx(注 6)] の平方根

$$D = \sqrt{V[\hat{\boldsymbol{u}}]} = \sqrt{E[\|\Delta\boldsymbol{u}\|^2]} = \sqrt{E[\|\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}}\hat{\boldsymbol{u}}\|^2]} \tag{21}$$

を RMS 誤差（または平方平均二乗誤差）(root-mean-square error) と呼ぶ．誤差を二乗 (square) して平均 (mean) し，平方根 (root) をとるという意味である．

このとき，どのような推定方法で $\hat{\boldsymbol{u}}$ を計算しても，データに誤差がある限り，$V[\hat{\boldsymbol{u}}]$ がある値より小さくならない，すなわち精度には超えることができない理論限

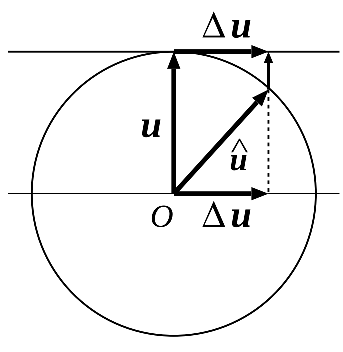

図 4　推定値の精度の評価　$\boldsymbol{u}$ の計算値 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の誤差を $\boldsymbol{u}$ に垂直な平面に射影した $\Delta\boldsymbol{u}$ で測る．

(注 4) 記号 $\nabla_{\mathbf{u}} E$ は $\partial E/\partial u_1$, $\partial E/\partial u_2$, $\partial E/\partial u_3$ を成分とするベクトルを表す．記号 ∇ はナブラ (nabla) と読む．

(注 5) 画像上の誤差の出方に方向の偏りがあり，それが各点ごとに異なる場合などにそのようなことが生じる [(5)]．

(注 6) ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$ に対して $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top$ は，その (ij) 要素が $a_i a_j$ の行列である．そして，そのトレースが $\|\boldsymbol{a}\|^2$ となる．

(a)　　　　　　　　(b)

図 5　実画像への直線当てはめと信頼性評価（文献 (8) より）
(a) 図 (b) の左下の一部の拡大図．ここに示された 9 画素に直線を当てはめる．(b) 当てはめた直線の信頼性の表示．

界が存在する．式で書くと，かなり一般的な条件 (注 7) のもとで次のようになる [7]．

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] \succ \sigma^2 \bar{\boldsymbol{M}}_2^- \tag{22}$$

ここに記号 $\succ$ は左辺引く右辺が半正値対称行列 (注 8) であることを表し，σ^2 は各データ点の座標に加わる誤差の分散である．そして $\bar{\boldsymbol{M}}$ は式 (17) の $\boldsymbol{M}$ において，データ $\boldsymbol{x}_\alpha$ を $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ に置き換えたものである．また $(\cdot)_2^-$ はランク 2 の（ムーア・ペンローズ (Moore-Penrose) の）一般逆行列 (注 9)(generalized inverse, pseudo-invese) を表す．式 (22) の右辺は KCR 下界 (Kanatani-Cramer-Rao lower bound) と呼ばれている．注目すべきことは，最ゆう推定を行えば，式 (22) の KCR 下界が $O(\sigma^4)$ を除いて等号で成立することである．最ゆう推定はこの意味で最適な推定方式である．

式 (22) の両辺のトレースをとると $\bar{\boldsymbol{M}}_2^-$ の定義より，RMS 誤差 D の下界が次のように得られる．

$$D \geq \sigma\sqrt{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \tag{23}$$

ただし，λ_1, λ_2 は $\bar{\boldsymbol{M}}$ の最大及び 2 番目に大きい固有値である．最ゆう推定では $O(\sigma^4)$ を除いてこれが等号で成立する．この意味で最ゆう推定の RMS 誤差をこれ以上減少させることは事実上不可能である．

このことから KCR 下界を用いて当てはめた直線の信頼性が評価できる．図 5(a) は図 5(b) の左下の白枠付近の拡大図である．この枠内から直線を検出して得られる 9 画素（図 5(a) の白枠内の白で塗った画素）に直線を当てはめると，図 5(b) 中に示す白い実線が得られる．両側の白い点線はその標準偏差に相当する不確定幅を表示したものである [8]．

(注 7) 詳しくは，推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の期待値が真値 $\boldsymbol{u}$ に一致すること，すなわち $\hat{\boldsymbol{u}}$ が不偏推定量 (unbiased estimator) であることである．また，不偏推定量でなくても，式 (22) が $O(\sigma^4)$ の項を除いて成立することが知られている．

(注 8) 固有値がすべて非負の対称行列．$\boldsymbol{A}$ が半正値対称行列なら任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}) \geq 0$ となる [1]．

(注 9) $n \times n$ 対称行列 $\boldsymbol{A}$ のランク r $(< n)$ の一般逆行列 $\boldsymbol{A}_r^-$ とは，$\boldsymbol{A}$ の固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$，対応する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とするとき，$\boldsymbol{A}_r^- = \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_1^\top/\lambda_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_r\boldsymbol{v}_r^\top/\lambda_r$ である．ただし，$\lambda_r > 0$ とする（その場合のみ定義される）．

9.　む　す　び

今回は準備として，与えられた点列に直線を当てはめる問題を取り上げ，画像から抽出した点データから物体の位置や形状を推論する問題における最適化に関する用語や考え方，特に最小二乗法，最ゆう推定，再投影誤差，精度の理論限界などを説明し，最ゆう推定の計算法を述べた．このような解析は金谷によって 10 年以上前に発表されたが [6]~[8]，当時はほとんど注目されなかった．しかし，最近になってようやく次第に世界中の研究者から着目されるようになった．次回以降ではその具体的な応用を述べるとともに，最近の新しい研究成果も紹介する．

文　　献

(1) 金谷健一，これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—，共立出版，2005.
(2) R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
(3) 金谷健一，形状ＣＡＤと図形の数学，共立出版，1998.
(4) W. Chojnacki, M.J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, “On the fitting of surfaces to data with covariances,” IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol.22, no.11, pp.1294–1303, Nov. 2000.
(5) 金谷健一，空間データの数理—３次元コンピューティングに向けて—，朝倉書店，1995.
(6) 金谷健一，画像の 3 次元解釈の統計的信頼性，情処学論，vol.34, no.10, pp.2062–2070, Oct. 1993.
(7) 金谷健一，当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界，情処学論，vol.36, no.8, pp.1865–1873, Aug. 1995.
(8) Y. Kanazawa and K. Kanatani, “Optimal line fitting and reliability evaluation,” IEICE Trans. Inf. & Syst., vol.E79-D, no.9, pp. 1317–1322, Sept. 1996.

（平成 20 年 9 月 29 日受付　平成 20 年 10 月 27 日最終受付）

すがや　やすゆき
菅谷　保之（正員）
平 8 筑波大・第三学群・情報学類卒．平 13 同大学院博士課程了．博士（工学）．岡山大・工・助手を経て，現在，豊橋技科大・情報工学系・講師．画像処理，コンピュータビジョンの研究に従事．

かなたに けんいち
金谷　健一（正員）
昭 47 東大・工・計数（数理工学）卒．昭 54 同大学院博士課程了．工博．群馬大・工・情報・教授を経て，現在，岡山大大学院自然科学研究科教授．IEEE フェロー．コンピュータビジョンの数理解析に従事．