

擬似エネルギー最小化に基づく3次エルミート曲線

井上 秀彦[†] 柴田 幸夫^{††} 金谷 健一^{††}

Cubic Hermite Spline with Minimum Pseudo-Energy

Hidehiko INOUE[†], Yukio SHIBATA^{††}, and Kenichi KANATANI^{††}

あらまし CADやグラフィックスにおいてよく用いられる曲線は局所的な滑らかさに基づいて曲線が定められているため、大域的な滑らかさや見た目の自然さが必ずしも保証されていない。本論文では、平面曲線に対して通過点が指定されたときの曲線生成における大域的な滑らかさや見た目の自然さの評価基準として「擬似エネルギー」を導入する。そして、その最小化に基づく3次エルミート曲線の表参照技法を用いた効率的な平面曲線の生成法を提案する。また、曲線を生成すると同時にその長さや囲む面積も効率良く高精度で計算できることを示す。

キーワード スプライン曲線, エルミート曲線, 擬似エネルギー, 最適化, 表参照技法

1. まえがき

CADやグラフィックスにおける曲線生成の手段として、ベジェ曲線やBスプライン曲線がよく用いられる[3],[5],[12],[13]。これらは「制御点」と呼ばれる点をインタラクティブに調整して望ましい形状を作り出すものであるが、寸法に制約の多い場合などでは指定した点を通る曲線を生成することも必要となる。そのような場合に用いられるのが(狭義の)「スプライン曲線」である。これは各区間ごとにパラメータtの多項式で表される曲線を定義し、その係数を区間のつなぎ目なるべく高次の微分可能性が成り立つように定めるものである。しかし、微分可能性は局所的な滑らかさを保証するものであり、必ずしも大域的なうねりやオーバシュートを減らす条件とはならない。しかも、一点の変更が残りのすべての部分に波及するという意味で、局所性がない。また、各点をパラメータtのどういう値に対応させるかという自由度が残る。これを定める方式はいろいろ提案されているが[2],[5]、対応付けの仕方次第で曲線が見た目に自然にも不自然にもなるので、従来はこれを試行錯誤的に調整していた。本論文の目的は、平面曲線に対して局所性を保証

しつつ大域的なうねりやオーバシュートを減らす条件を与えることである。

局所性を保証するには、各点の接線方向とその大きさを局所的に指定してエルミート補間[12]を行えばよい。しかし、各点での接線方向とその大きさをどう指定するかが問題となる。

弾性棒を曲げた形は見た目に自然な曲線となることから、大域的なうねりやオーバシュートを減らすための条件の一つとして、弾性棒によって生じる曲線になるべく近づけることが古くから考えられている。実際、「スプライン」という名称もここから生じた。このようにして得られた曲線は、指定された条件の下でひずみエネルギーが最小であるという性質をもつ。しかし、ひずみエネルギーを最小化するには多くの計算量を要する。そこで、本論文ではひずみエネルギーを近似的に最小化する効率的な計算方法を提案する。このとき、低次の多項式の方が余分なうねりやオーバシュートを含まない[5]ので、本論文では曲線の表現式として3次エルミート曲線を用いる。

2. 曲線の評価基準

図1に示す2点

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

および、両端点での接線ベクトル

[†] 富士重工業株式会社技術管理部第一技術計算課, 太田市
First Engineering Computer Service Sec., Fuji Heavy Industries
Ltd., 10-1 Higashihon-cho, Ota-shi, 373 Japan

^{††} 群馬大学工学部情報工学科, 桐生市
Department of Computer Science, Gunma University, 1-5-1
Tenjin-cho, Kiryu-shi, 376 Japan

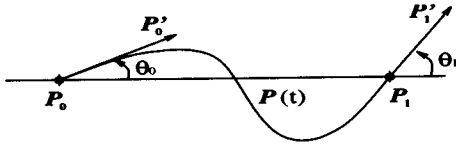


図1 エルミート曲線の境界条件
Fig.1 Boundary condition of a Hermite spline.

$$P'_0 = \begin{pmatrix} r_0 \cos \theta_0 \\ r_0 \sin \theta_0 \end{pmatrix}, \quad P'_1 = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 \\ r_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$r_0, r_1 > 0, \quad -\pi \leq \theta_0, \theta_1 \leq \pi \quad (3)$$

に対する3次のエルミート曲線は

$$P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = b(t)P_1 + c(t)P'_0 + d(t)P'_1 \quad (4)$$

$$b(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad c(t) = t^3 - 2t^2 + t \quad (5)$$

$$d(t) = t^3 - t^2$$

となる[3]。本論文では各区間ごとにうねりやオーバシュートの少ない曲線を用意し、それを拡大縮小、回転、移動して滑らかに接続することにより、任意に与えた点列を通る3次エルミート曲線を生成する。

従来は、うねりの少ない曲線を生成するために、以下の「ひずみエネルギー」[1],[11]の最小化がよく用いられてきた[4],[6],[9]。

$$E = \int_0^1 \frac{[x''y' - x'y'']^2}{[(x')^2 + (y')^2]^{5/2}} dt \quad (6)$$

両端での接線方向 θ_0, θ_1 が与えられたとき、式(6)は r_0, r_1 の関数となる。従って、式(6)を最小とする r_0, r_1 を計算すればよいように思われる。しかし、最小値が存在しない場合、および極小値は存在するが r_0, r_1 を大きくすると式(6)の値がいくらでも減少する場合がある。これは、式(6)の r_0, r_1 が大きいときひずみエネルギーは $O(1/r_0, 1/r_1)$ であり、 $r_0, r_1 \rightarrow \infty$ で0となるからである。 $r_0 = r_1$ とした場合のそのような曲線の例と対応するひずみエネルギーの対数グラフ(底は10)を図2、図3に示す。図2は極小値も最小値も存在しない場合であり、左が曲線、右がひずみエネルギーの図である。図3に極小値は存在するが最小値は存在しない場合を示す(x, y がパラメータ t の多項式であるとき、 t に関して C^∞ 連続であっても図

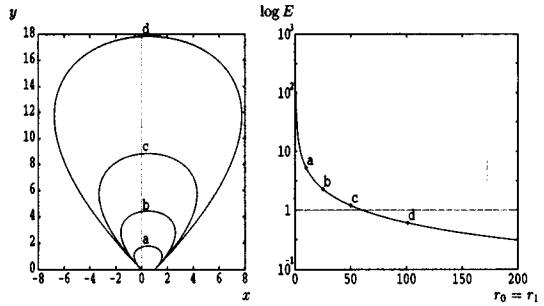


図2 曲線のひずみエネルギー(極小値が存在しない場合)
Fig.2 Strain energy does not take its minimum.

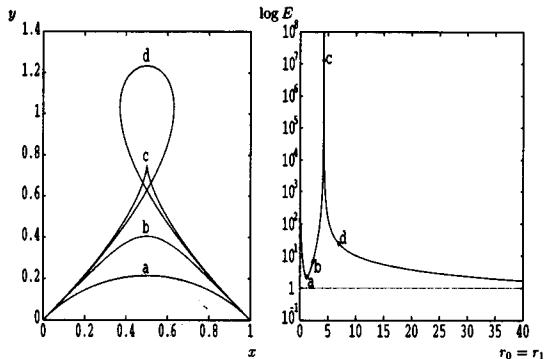


図3 曲線のひずみエネルギー(極小値が存在する場合)
Fig.3 Strain energy is minimal for curve a.

の曲線 c のように角ができる場合があることに注意。このことから、曲線の生成基準として「指定した境界条件を満足する無数の滑らかな曲線の中からひずみエネルギーが最小なものを選ぶ」という基準は合理的でない。

図2、図3からわかるように r_0, r_1 を大きくすると、曲線の長さがいくらでも増加する。このことは、ひずみエネルギーだけでなく、同時にその長さも考慮しなければならないことを示唆する。そこで、本論文では、式(6)に長さの2乗を重みとして付け加えた

$$J = \left(\int_0^1 \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt \right)^2 E \quad (7)$$

を評価基準とする。長さを2乗するのは、曲線の長さは r_0, r_1 が大きいとき $O(r_0, r_1)$ となり、 $r_0, r_1 \rightarrow \infty$ で式(7)は漸近的に r_0, r_1 の正値2次式となるので、必ず最小値が存在するからである。以後、この J を「擬ひずみエネルギー」、あるいは単に「擬エネルギー」と呼ぶ。曲線の曲率が小さいとき、擬エネルギー

ギーは高次の差を除いて通常のひずみエネルギーに一致する。式(7)を最小とする曲線を「擬似スプライン曲線」と呼ぶ。

式(4)を式(7)に代入すると、 J は $\theta_0, \theta_1, r_0, r_1$ の関数となる。これを $J(\theta_0, \theta_1, r_0, r_1)$ と書く。これを数値計算により r_0, r_1 に関して最小化し、得られる関数を $J(\theta_0, \theta_1)$ と書く。すなわち、

$$J(\theta_0, \theta_1) = \min_{r_0, r_1} J(\theta_0, \theta_1, r_0, r_1) \quad (8)$$

とする。その最小値を与える r_0, r_1 も θ_0, θ_1 の関数であるから、これらをそれぞれ $r_0 = r_0(\theta_0, \theta_1), r_1 = r_1(\theta_0, \theta_1)$ と書く。そして、計算を効率化するために、関数 $J(\theta_0, \theta_1), r_0(\theta_0, \theta_1), r_1(\theta_0, \theta_1)$ をあらかじめ表形式で計算し、必要に応じて補間により参照する。

3. 擬似スプライン曲線の生成

与えられた $n + 1$ 個の点列 $P_0(x_0, y_0), \dots, P_n(x_n, y_n)$ を図4のように折れ線で結んだときの各線分の長さを l_1, \dots, l_n とし、ベクトル $P_i P_{i+1}$ と x 軸とのなす角度を ϕ_i とする。2点 P_i, P_{i+1} 間の補間曲線の点 P_i における接線ベクトルがベクトル $P_i P_{i+1}$ と角度 α_i をなすとすると、2点 P_i, P_{i+1} 間の補間曲線は次のようにして定まる。まず、前処理で作成した表を補間して

$$\begin{aligned} r_0 &= r_0(\alpha_i, \alpha_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i), \\ r_1 &= r_1(\alpha_i, \alpha_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i) \end{aligned} \quad (9)$$

を計算する。そして、2点 $(0, 0), (1, 0)$ 間での接線ベクトルが

$$\begin{aligned} P'_0 &= \begin{pmatrix} r_0 \cos \alpha_i \\ r_0 \sin \alpha_i \end{pmatrix}, \\ P'_1 &= \begin{pmatrix} r_1 \cos(\alpha_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i) \\ r_1 \sin(\alpha_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

であるエルミート曲線を式(4)により計算し、 l_i 倍に拡大する。得られた曲線を角度 ϕ_i だけ回転し、更に P_i だけ平行移動すると、2点 P_i, P_{i+1} 間を補間する曲線となる。以上をすべての区間に行うことにより、点 P_0, \dots, P_n を補間することができる。残るのは、接線方向 $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ をどう定めるかということである。

曲線の全擬似エネルギーは $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ の関数となるので、 $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ に関する最適化を行えば、擬似エ

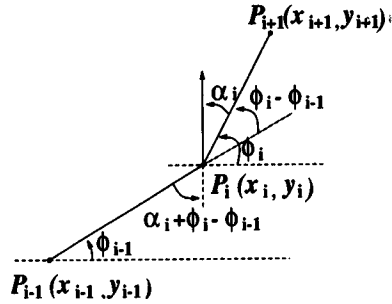


図4 補間点と接線方向の関係
Fig. 4 Interpolation points and tangential directions.

--- 3次スプライン補間により描かれる曲線の1例
— 擬似弾性棒により描かれる曲線

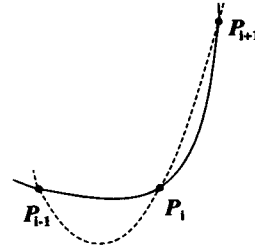


図5 3次スプライン補間と擬似弾性棒による補間
Fig. 5 Interpolation by a cubic spline and a pseudo-elastic curve.

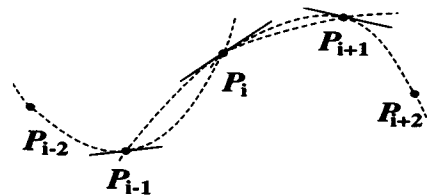


図6 擬似弾性棒による補間
Fig. 6 Interpolation by a pseudo-elastic curve.

ネルギーを最小とする接線方向が計算できる。しかし、そうすると局所性が失われ、一つの点および接線方向の変化が曲線全体に波及する。

伊理・藤野[7]は y が x の1価関数として表せる場合に、連続する3点に2次式をあてはめて中央の点の接線方向を定め、3次のエルミート補間を行う方法を示している。これを x, y が t の関数である場合に拡張すれば、3次のスプライン曲線を部分的にあてはめられる。しかし、「まえがき」でも述べたように各点を t のどういう値に対応させるかという自由度が残る。そこで、本論文では通常のスプライン曲線の代わりに図5に示すように3点 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} を通るよう

に「擬似弾性棒」(擬似エネルギーを最小にするような弾性棒)をあてはめ、点 P_i での接線方向 α_i を定める。これを各点について行い (図 6), 得られた $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ に対して前述の手順で補間する。

図 1 の点 P_0 における接線方向 θ_0 を固定して θ_1 に関して最小化した擬似エネルギーを

$$J(\theta_0) = \min_{\theta_1} J(\theta_0, \theta_1) \quad (11)$$

とする。その最小値を与える θ_1 は θ_0 の関数であるから、これを $\theta_1(\theta_0)$ と書く。これらも表形式にまとめる。すると、図 4 の点 P_i での接線方向を α_i としたときの 2 区間の曲線の擬似エネルギーの和は

$$w = l_{i-1}J(\alpha_i + \phi_i - \phi_{i-1}) + l_iJ(\alpha_i) \quad (12)$$

と書ける。この式の値が最小となるように接線方向 $\alpha_i (i = 1, \dots, n-1)$ を定める。図 4 より α_i は 0 と $\phi_{i-1} - \phi_i$ の区間のみを探索すればよいことがわかる。両端点 P_0, P_n では、点 P_1, P_{n-1} の接線方向を定める擬似弾性棒の点 P_0, P_n での接線方向を用いる。従って、次のように書ける。

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \theta_1(\alpha_1 + \phi_1 - \phi_0), \\ \alpha_n &= \phi_{n-1} + \theta_1(\alpha_{n-1}) \end{aligned} \quad (13)$$

4. 補間例

4.1 最適化のための補助データの作成

関数 $J(\theta_0, \theta_1), r_0(\theta_0, \theta_1), r_1(\theta_0, \theta_1)$ の補間は次のように行った。領域 $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ を格子状に分割し、各格子点 $(\Theta_i, \Theta_j) i, j = 1, \dots, m$ に対して J を最小にする r_0, r_1 を数値的に計算する。ここでは $m = 36$ とし、ロンバーグ積分と共役こう配法を用いた [10]。但し $(|\Theta_i|, |\Theta_j|) = (\pi, 0), (0, \pi), (\pi, \pi)$ に対しては、問題の対称性により解が一意的に定まらないので、この場合の r_0, r_1, J は不定とする。また $(\Theta_i, \Theta_j) = (0, 0)$ のとき $J = 0$ となり、 r_0, r_1 は定まらないので不定とする。

このようにすれば、任意に与えた (θ_0, θ_1) に対して $r_0(\theta_0, \theta_1), r_1(\theta_0, \theta_1), J(\theta_0, \theta_1)$ は点 (θ_0, θ_1) の近傍の格子点に対する値を補間して得られるように思われるが、一つ問題が生じる。それは、これらの関数に特異点が存在することである。例えば、図 7 において点 P_0 における接線方向 θ_0 を固定し、点 P_1 における接線方向 θ_1 を 0 から次第に増やしていくと、 J を

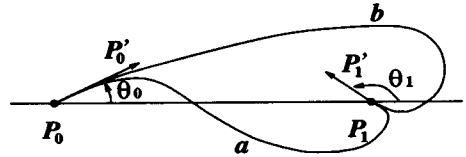


図 7 接続方向と曲線の関係
Fig. 7 Tangential directions and Hermite spline curves.

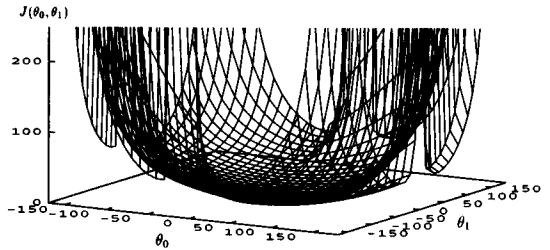


図 8 $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ 上の $J(\theta_0, \theta_1)$ のグラフ
Fig. 8 Function $J(\theta_0, \theta_1)$ over $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$.

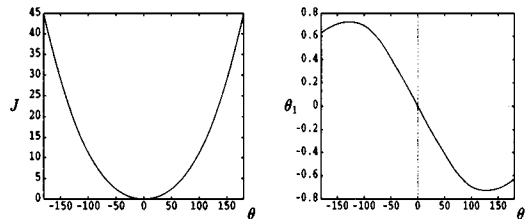


図 9 $(-\pi, \pi)$ 上の $J(\theta)$ と $\theta_1(\theta)$ のグラフ
Fig. 9 Functions $J(\theta)$ and $\theta_1(\theta)$ over $(-\pi, \pi)$.

最小とする曲線ははじめは変曲点をもつ“s”字型曲線 (図の a) となるが、ある角度 θ_1 で変曲点のない“c”字型曲線 (図の b) にジャンプする。

このことから、不連続点を検出するには端点 P_0, P_1 での曲率が同符号になるか異符号になるかを調べればよいことがわかる。そこで、曲線を

$$\begin{aligned} k(0)k(1) \geq 0 \text{ のとき, } & c \text{ 型} \\ k(0)k(1) < 0 \text{ のとき, } & s \text{ 型} \\ \text{値がないとき, } & x \text{ 型} \end{aligned} \quad (14)$$

に分類する。但し、

$$k(t) = x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t) \quad (15)$$

とする。そして、与えられた (θ_0, θ_1) に対して最も近い格子点の型と同じ型の格子点の値のみから補間する。このようにして得られた関数 $J(\theta_0, \theta_1)$ の値を用いて、各 Θ_i に対する $J(\Theta_i, \theta_1)$ を最小にする θ_1 を $i = 1,$

..., m について補間して関数 $J(\theta)$ を定め, それに対する J の値 $J(\Theta_i, a(\Theta_i))$ を $i = 1, \dots, m$ について補間して関数 $\theta_1(\theta)$ を定める. $J(\theta_0, \theta_1)$ のグラフとそれから計算した $J(\theta), \theta_1(\theta)$ のグラフをそれぞれ図 8, 図 9 に示す.

4.2 開曲線の補間例

$n + 1$ 個の点 $P_0(x_0, y_0), P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n)$ が与えられたとき, 以下の 5 通りの方法で補間した結果を示す.

3次スプライン曲線 A: パラメータ t の分点 t_0, t_1, \dots, t_n を等間隔に選んだもの [5].

3次スプライン曲線 B: パラメータ t の分点 t_0, t_1, \dots, t_n の間隔を各点間の距離に比例するように選んだもの [5].

エルミート曲線 A: P_0 および P_n での接線方向を隣接点を結ぶ弦方向にとり, $P_i (i = 1, 2, \dots, n - 1)$

表1 Newbery-Garrett [9]のデータ
Table 1 Data for the curve of Newbery-Garrett [9].

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0.0	0.3	1.5	2.3	2.5	3.0	5.0
y_i	5.0	2.5	1.5	1.25	2.5	3.5	3.75
i	7	8	9	10	11	12	
x_i	5.5	5.75	7.0	8.0	9.0	10.0	
y_i	3.3	1.0	1.0	0.75	3.5	3.75	

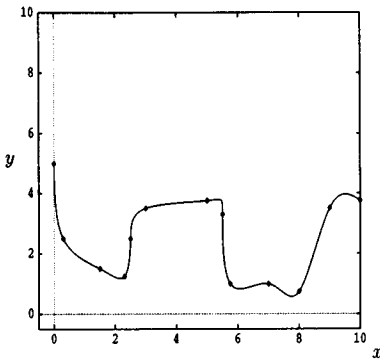


図10 3次スプライン曲線 A
Fig.10 Spline curve A.

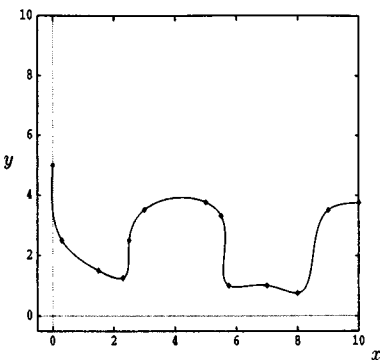


図11 3次スプライン曲線 B
Fig.11 Spline curve B.

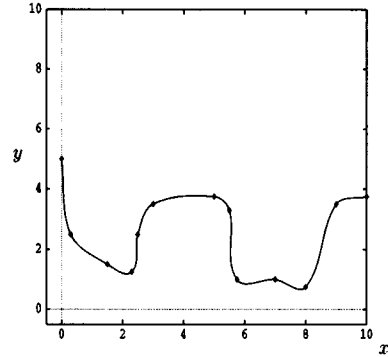


図12 エルミート曲線 A
Fig.12 Hermite curve A.

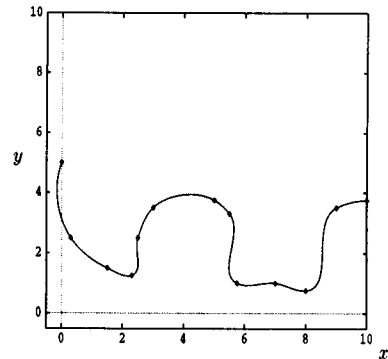


図13 エルミート曲線 B
Fig.13 Hermite curve B.

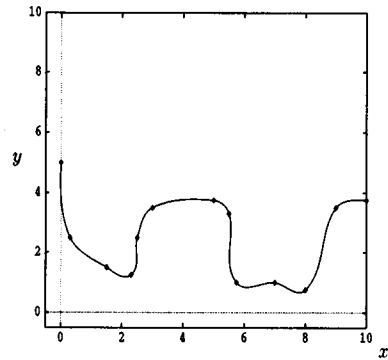


図14 擬似スプライン曲線
Fig.14 Curve generated by our method.

表2 スパイク型のデータ
Table 2 Data for a spike-shaped curve.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-4.0	-3.0	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	0.0	0.0	0.0	0.0	a	0.0	0.0	0.0	0.0

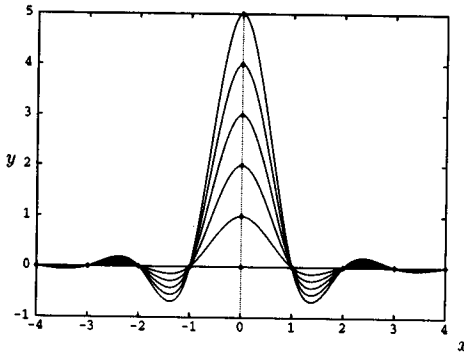


図15 3次スプライン曲線 A
Fig.15 Spline curve A.

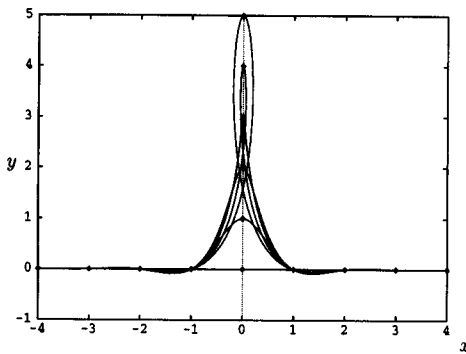


図16 3次スプライン曲線 B
Fig.16 Spline curve B.

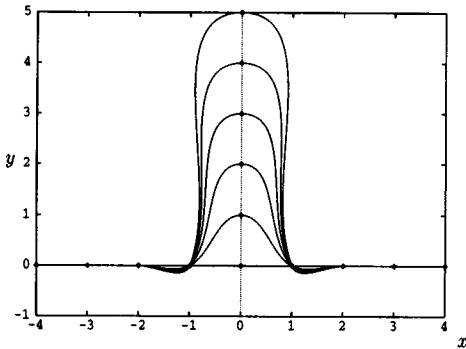


図17 エルミート曲線 A
Fig.17 Hermite curve A.

では、曲線の接線方向を2点 P_{i-1}, P_{i+1} を結ぶ線分に平行にとる [12]. 接線の大きさは、2点間の距離に等しくとる。

エルミート曲線 $B: P_0, P_n$ での接線方向を、それぞれ P_i, P_{i+1}, P_{i+2} ($i = 0, n-2$) を通る円弧の P_0 および P_n における接線方向から定め、 P_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) での曲線の接線方向を P_{i-1}, P_i, P_{i+1} を通る円弧の P_i での接線方向から定める。接線の大きさは、2点間の距離に等しくとる。

擬似スプライン曲線：本論文で提案した曲線。

表1のデータ [9] に対する曲線を図10~14に、表2のデータに対する曲線を図15~19に示す。但し、 $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ とする。表3のデータに対する曲線を図20~24に示す。

最適化を行った場合と行わない場合のエルミート曲線を比べると、表1、表2のデータに対しては、両端を除く区間においてほぼ同じような曲線となっている。一方、表3のデータにおいては、最適化することによ

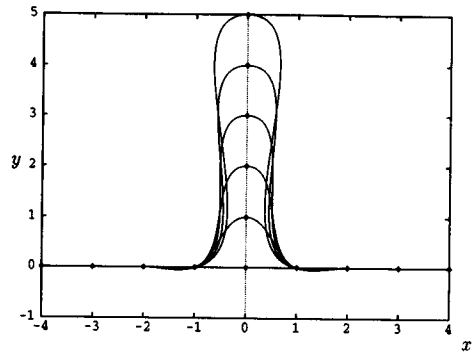


図18 エルミート曲線 B
Fig.18 Hermite curve B.

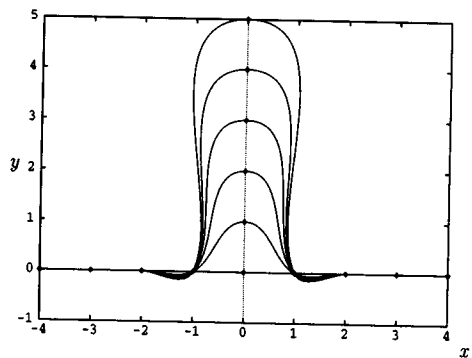


図19 擬似スプライン曲線
Fig.19 Curve generated by our method.

表3 結び目型のデータ
Table 3 Data for a knot-shaped curve.

i	0	1	2	3
x_i	0.0	2.0	1.0	3.0
y_i	0.0	-0.1	-0.1	0.0

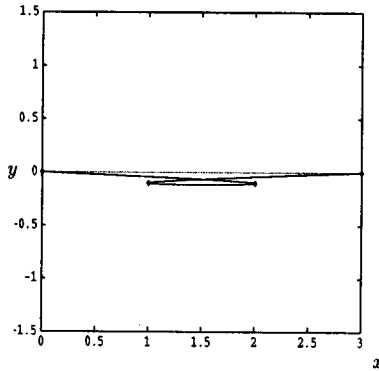


図20 3次スプライン曲線 A
Fig.20 Spline curve A.

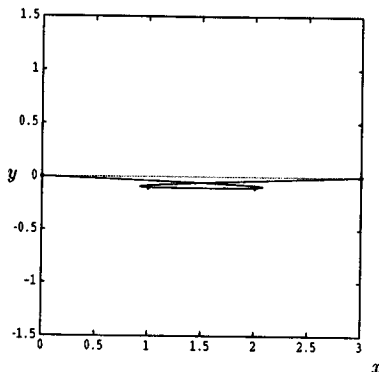


図21 3次スプライン曲線 B
Fig.21 Spline curve B.

り最適化しない場合に角がなくなり、見た目に自然な曲線となる。

本論文で述べた擬似スプライン曲線では接線ベクトルの最適化を行っているが、その最適化に反復法を用いると計算量が増加して実用的でない。しかし、必ずしも厳密な最適解を計算する必要はなく、近似的な最適解が計算できればよいので、探索区間の内部に3点を取り、2次補間法[8]を行えば十分な精度の解が得られる。Sun SPARC station 10上で最適化しない場合、厳密な最適化を行った場合、近似的な最適化を行った場合の計算時間(秒)を表4に示す。但し、表に示した時間は前処理(補助データの読み込み)の時間を除いた計算時間である。

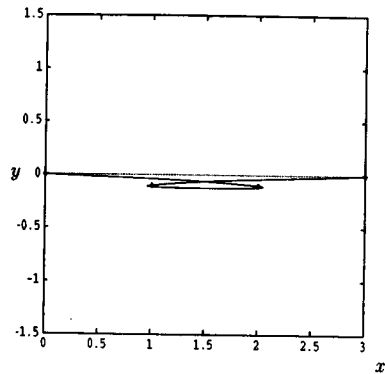


図22 エルミート曲線 A
Fig.22 Hermite curve A.

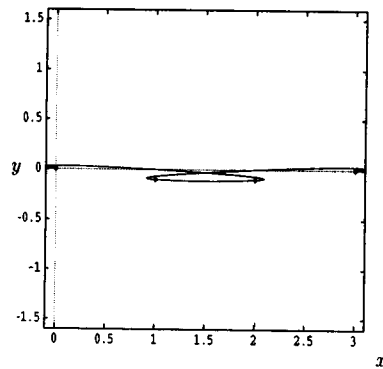


図23 エルミート曲線 B
Fig.23 Hermite curve B.

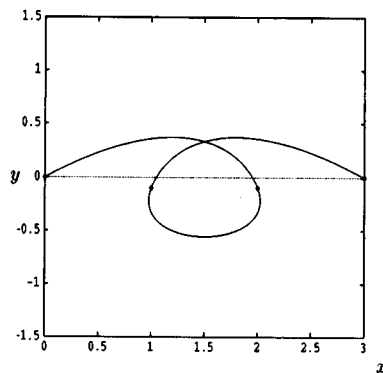


図24 擬似スプライン曲線
Fig.24 Curve generated by our method.

この結果、本論文で述べた曲線は局所性を保ち、各点へのパラメータ t の対応付けの仕方に関係なく大域的なうねりやオーバシュートの少ない見た目に自然な曲線となり、従来の曲線の計算時間と同等の計算時間で生成できる。

表4 計算時間の比較 (秒)

Table 4 Comparison of computation time (seconds).

	表1	表2	表3
最適化しない場合	0.6	1.9	0.1
厳密な最適化を行った場合	0.7	2.1	0.2
近似的な最適化を行った場合	0.6	1.9	0.1

以上は開曲線の場合であるが、閉曲線の場合も同様に生成できる。

5. 曲線の長さとおそれて囲まれる面積

5.1 擬似スプライン曲線の長さ

式(4)の曲線の長さを $L(\theta_0, \theta_1)$ と定義する。すると、 $n+1$ 個の点 (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ を補間する擬似スプライン曲線の長さは、開曲線の場合

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} l_i L(\theta_i, \theta_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i) \quad (16)$$

となり、閉曲線の場合は

$$L_n + l_n L(\theta_n, \theta_0 + \phi_0 - \phi_n) \quad (17)$$

となる。従って、関数 $L(\theta_0, \theta_1)$ をあらかじめ表形式で計算しておき、その値を補間すれば、擬似スプライン曲線の長さを計算することができる。例として、単位円周上に等間隔にとった n 個の点

$$\left(\cos \frac{2\pi k}{n}, \sin \frac{2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (18)$$

に対して、擬似スプライン曲線により補間した曲線の長さとお各点を折れ線で結んだ多角形の周長を比較した結果を表5に示す。表中の「等価な点数」は、真の長さを \bar{L} 、式(17)により計算した長さを L 、折れ線の周長を L_n としたとき、 $|\bar{L} - L| > |\bar{L} - L_n|$ となる最小の n の値である。

5.2 擬似スプライン曲線で囲まれる面積

式(4)の曲線と x 軸で囲まれる部分の面積を $S(\theta_0, \theta_1)$ と定義する。但し x 軸の下側の部分は負の面積とみなす。すると、 $n+1$ 個の点 (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ を通る擬似スプライン曲線と両端を結んだ直線で囲まれる部分の面積は、

$$|S_0 - \sum_{i=0}^{n-1} l_i^2 S(\theta_i, \theta_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i)| \quad (19)$$

となり、閉曲線によって囲まれる部分の面積は、

$$|S_0 - \sum_{i=0}^{n-1} l_i^2 S(\theta_i, \theta_{i+1} + \phi_{i+1} - \phi_i)|$$

表5 単位円周上の点に対するスプライン閉曲線の長さ (真の値 6.283185307)

Table 5 Length of the spline curve for points on a unit circle (true value: 6.283185307).

点数	長さ	等価な点数
3	6.18957607	11
4	6.26067766	22
5	6.27774034	44
6	6.27785088	45
7	6.28605010	61
8	6.28591825	62
9	6.28219908	103
10	6.28757066	49

表6 単位円周上の点に対するスプライン閉曲線により囲まれる面積 (真の値 3.141592654)

Table 6 Area enclosed by the spline curve for points on a unit circle (true value: 3.141592654).

点数	面積	等価な点数
3	3.04563765	15
4	3.11345972	28
5	3.13063511	44
6	3.13614662	62
7	3.13830387	80
8	3.13961368	103
9	3.14053616	141
10	3.14105203	196

$$-l_n^2 S(\theta_n, \theta_0 + \phi_0 - \phi_n) \quad (20)$$

となる。但し、 S_0 は補間点を結ぶ折れ線と両端点を結んだ直線で囲まれる部分の面積

$$S_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) + \frac{1}{2} (x_n y_0 - y_n x_0) \quad (21)$$

である。従って、関数 $S(\theta_0, \theta_1)$ をあらかじめ表形式で計算しておき、その値を補間すれば、囲まれる部分の面積を計算することができる。例として、式(18)のように単位円周上に等間隔にとった n 個の点に対して、擬似スプライン曲線により囲まれた部分の面積とお各点を折れ線で結んだ多角形の面積を比較した結果を表6に示す。表中の「等価な点数」の意味は、長さの場合と同様である。

6. む す び

本論文では、「擬似エネルギー」を定義し、その最小化に基づいたエルミート曲線の接線ベクトルの最適化の方式を示した。このとき、前処理によって作成したデータをもとにして接線ベクトルの最適化を行っているため、複雑な計算を行う必要がない。また、「ひずみ

エネルギー」や「長さ」のような物理的、幾何学的な量に基づいているので、見た目に自然な曲線を簡単に生成できる。更に、曲線の長さや曲線によって囲まれる部分の面積もあらかじめ計算してデータ化してあるので、曲線を生成すると同時にその長さや囲む面積を効率的に高精度で計算できる。本論文で提案した方式は、CADやグラフィックスで実用的な意義が大きいと思われる。

本論文では平面曲線のみを扱ったが、空間曲線の場合も同様に定義できる。その場合は、擬似ひずみエネルギーが3変数となるため、3次元区間 $[0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ を正方格子に分割し、各格子点で最適化計算を行い、各格子点上で定義された擬似エネルギーの3次元配列を用意すればよい。

文 献

- [1] 安達忠治, “ベクトル解析,” 培風館, 1986.
 - [2] W. Böhm, G. Farin, and J. Kahmann, “A survey of curve and surface methods in CAGD,” *Computer Aided Geometric Design*, vol.1, pp.1-60, 1984.
 - [3] G. Farin, “Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design,” 2nd ed., Academic Press, 1990.
 - [4] B.K. Horn, “The curve of least energy,” *ACM Trans. Math. Software*, vol.9, no.4, pp.441-460, 1983.
 - [5] J. Hoschek and D. Lasser, “Fundamentals of Computer Aided Geometric Design,” A.K. Paters, 1993.
 - [6] H. Inoue, Y. Shibata, and H. Miyazaki, “Generation of interpolation curves with the least energy using dynamic programming,” *Compt. Math. Appl.*, vol.25, no.6, pp.25-34, 1993.
 - [7] 伊理正夫, 藤野和建, “数値計算の常識,” 共立出版, 1987.
 - [8] 今野 浩, 山下 浩, “非線形計画法,” 日科技連, 1978.
 - [9] A.C.R. Newbery and T.S. Garrett, “Interpolation with minimized curvature,” *Compt. Math. Appl.*, vol.22, no.1, pp.37-43, 1991.
 - [10] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling, “Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing,” Cambridge University Press, 1986.
 - [11] A.S. Saada, “Elasticity: Theory and Applications,” Pergamon Press, 1986.
 - [12] 杉原厚吉, “グラフィックスの数理,” 共立出版, 1995.
 - [13] 山口富士夫, “形状処理工学 I, II,” 日刊工業新聞社, 1982.
- (平成7年11月1日受付, 8年8月13日再受付)



井上 秀彦

1986 群馬大・工卒, 1988 同大大学院工学研究科情報工学専攻修士課程了。同年富士重工業(株)入社。1996 群馬大学大学院博士後期課程単位取得退学。現在, 富士重工業(株)にてCADシステムの構築, 開発に従事。日本シミュレーション学会, 情報処理学会, IEEE 各会員。



柴田 幸夫 (正員)

1968 早大・理工卒, 1970 同大大学院修士課程了, 1973 同大大学院博士課程了。工博。1973 群馬大学工学部勤務。現在, 同大工学部情報工学科教授。ドブルーイングラフの拡張とその解析, グラフの同型因子分解, システムの故障診断等の研究に従事。情報処理学会, IEEE, AMS 各会員。



金谷 健一 (正員)

1972 東大・工・計数工学(数理工学)卒。1979 同大大学院博士課程了。工博。現在, 群馬大学工学部情報工学科教授。著書“Group-Theoretical Methods in Image Understanding”(Springer, 1990), “Geometric Computation for Machine Vision”(Oxford Univ. Press, 1993), “Statistical Optimization for Geometric Computation”(Elsevier Science, 1996)他。