

幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の統一的計算法

金谷 健一^{†1} 菅谷 保之^{†2}

本論文では幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の計算法を統一的に示す。従来はデータを計算に都合のよい形に変換した空間において正規分布に従うノイズが仮定されていたが、本論文では元のデータ空間での正規分布ノイズを仮定する。そして、その最尤推定の計算を従来の方法の反復に帰着させる統一的な手法を提案する。例としてこれを楕円の当てはめと基礎行列の計算に適用する。さらに、この方法が最適補正にも応用可能であり、楕円への垂線やステレオ画像からの三角測量の計算法が得られることを示す。過去にはこれらは個別に研究されていたが、本論文によってこれらが統一的に導かれることが示される。

Unified Computation of Strict Maximum Likelihood for Geometric Fitting

KENICHI KANATANI^{†1} and YASUYUKI SUGAYA^{†2}

A new numerical scheme is presented for strictly computing maximum likelihood (ML) of geometric fitting problems. While conventional methods first transform the data into a computationally convenient form and then assume Gaussian noise in the transformed space, our method assumes Gaussian noise in the original data space. It is shown that the strict ML solution can be computed by iteratively using conventional methods. Then, our method is applied to ellipse fitting and fundamental matrix computation. Our method also encompasses optimal correction, computing, e.g., perpendiculars to an ellipse and triangulating stereo images. In the past, such applications have been studied individually. Our method generalizes them from a unified point of view.

^{†1} 岡山大学大学院自然科学研究科

Department of Computer Science, Okayama University

^{†2} 豊橋技術科学大学情報工学系

Department of Information and Computer Sciences, Toyohashi University of Technology

1. まえがき

本論文では「幾何学的当てはめ⁹⁾」と呼ばれるコンピュータビジョンによく現れる計算の厳密な最尤推定の計算法を統一的に示す。「厳密な」というのは、従来はデータを計算に都合の良い形に変換した空間において正規分布に従うノイズが仮定されていたが^{(11),(19),(22)}、本論文では元のデータ空間での正規分布ノイズを仮定するという意味である。「統一的に」というのは、過去に個々の問題ごとに得られていた結果が本論文の一般論の特別な場合として得られるという意味である。例として、本論文の一般論から楕円の当てはめの中川ら¹⁸⁾の方法や基礎行列の計算の金谷ら¹⁴⁾の方法が得られることを示す。

さらに、本論文の一般論は「最適補正⁹⁾」と呼ばれる問題をも包括している。最適補正の応用としては、楕円への垂線やステレオ画像からの三角測量の計算法が菅谷ら²⁰⁾や金谷ら¹⁵⁾によって個別に研究されているが、これらも本論文の一般論から導かれることを示す。以下、まず2, 3, 4章で従来の定式化を整理する。5章からが本論文の新提案である。

2. 幾何学的当てはめ

「幾何学的当てはめ」とは誤差のあるベクトルデータ x_α , $\alpha = 1, \dots, N$ にパラメータ u を含む拘束条件

$$F(x; u) = 0 \quad (1)$$

を当てはめる問題である⁹⁾。具体的には

$$F(x_\alpha; u) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (2)$$

となる u を求めることである。コンピュータビジョンの多くの問題は、このようにして求めた u から画像中の物体の位置や形状や運動を推定するという定式化がなされている。

式(1)中の $F(x; u)$ は一般に x の複雑な非線形関数であるが、未知パラメータ u に関しては線形であったり、パラメータをつけ直して線形に表せたりすることが多い。そのような場合は式(1)が次の形に表せる。

$$(\xi(x), u) = 0 \quad (3)$$

ただし、以下ベクトル a, b の内積を (a, b) と書く。ベクトル $\xi(x)$ の各要素 $\xi_i(x)$ はパラメータ u_i のかかっている x の(非線形)項をまとめたものである。式(1)にパラメータのかかっていない x の項が足されている場合も、形式的に未知数がかかっていると見なし、それを u の最終成分 u_n とする。得られる解では $u_n = 1$ となるべきであるが、式(3)から u には定数倍の不定性があるので、必ずしも u の最終成分を1とする必要はなく、任

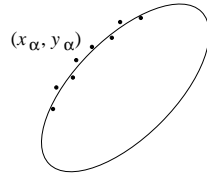


図 1 点列に楕円を当てはめる
Fig. 1 Fitting an ellipse to a sequence of points.

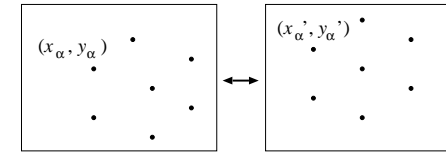


図 2 2 画像の対応点から基礎行列を計算する
Fig. 2 Computing the fundamental matrix from corresponding points in two images.

意に正規化してよい (たとえば $\|u\| = 1$) .

例 1 (楕円の当てはめ) 与えられた点 (x_α, y_α) , $\alpha = 1, \dots, N$ に楕円

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \quad (4)$$

を当てはめる問題を考える (図 1) . $\xi(x, y)$, u を

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= (x^2 \ 2xy \ y^2 \ 2x \ 2y \ 1)^\top, \\ u &= (A \ B \ C \ D \ E \ F)^\top \end{aligned} \quad (5)$$

と定義すると, 式 (4) は式 (3) の形になる²²⁾ .

例 2 (基礎行列の計算) 同一シーンを異なる位置から撮影した 2 画像において, 第 1 画像の点 (x, y) が第 2 画像の点 (x', y') に対応しているとき, 両者は次の「エピ極線方程式」を満たす⁸⁾ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

ただし, F はそれぞれの画像を撮影したカメラの相対位置や内部パラメータに依存する (シーンや各点の位置にはよらない) ランク 2 の行列であり, 「基礎行列」と呼ばれる. これを画像中の対応点から計算することにより, カメラ位置やシーンの 3 次元形状を計算することができる¹²⁾ (図 2) . このとき,

$$\begin{aligned} \xi(x, y, x', y') &= (xx' \ xy' \ xy' \ yy' \ yx' \ y'1)^\top, \\ u &= (F_{11} \ F_{12} \ F_{13} \ F_{21} \ F_{22} \ F_{23} \ F_{31} \ F_{32} \ F_{33})^\top \end{aligned} \quad (7)$$

と定義すると, 式 (6) は式 (3) の形になる¹⁹⁾ .

3. ξ 空間の正規分布モデル

ノイズを含むデータから最適な推定を行うためには, 次の 2 つを指定する必要がある .

- ノイズモデル: ノイズがどのような統計的な性質を持つと考えるか .
- 最適性の基準: どういう解を最適と考えるか .

よく用いられるノイズモデルは正規分布である . 本論文ではデータ x_α に正規分布のノイズを仮定する場合と, 変換した $\xi_\alpha = \xi(x_\alpha)$ に正規分布のノイズを仮定する場合の 2 通りを考える . x_α のノイズの共分散行列 $V[x_\alpha]$ と, 変換した ξ_α のノイズの共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ とは高次 (厳密にはノイズの大きさの 4 乗) の項を除いて次の関係で結ばれる .

$$V[\xi_\alpha] = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha V[x_\alpha] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top \quad (8)$$

ただし, $(\partial \xi / \partial x)$ は写像 $\xi(x)$ のヤコビ行列であり, $(\partial \xi / \partial x)_\alpha$ は $x = x_\alpha$ を代入することを意味する .

例 3 (楕円の当てはめ) 各点 (x_α, y_α) の x 座標, y 座標に独立に期待値 0, 標準偏差 σ のノイズが加わると, 式 (5) によって変換した ξ_α の共分散行列は次のように書ける²²⁾ .

$$V[\xi_\alpha] = 4\sigma^2 \begin{pmatrix} x_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & 0 & x_\alpha & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & y_\alpha & x_\alpha & 0 \\ 0 & x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 & 0 & y_\alpha & 0 \\ x_\alpha & y_\alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_\alpha & y_\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

例 4 (基礎行列の計算) 各対応点 (x_α, y_α) , (x'_α, y'_α) の x 座標, y 座標に独立に期待値 0, 標準偏差 σ のノイズが加わると, 式 (7) によって変換した ξ_α の共分散行列は次のよう

に書ける¹⁹⁾ .

$$V[\xi_\alpha] = \sigma^2 \begin{pmatrix} x_\alpha^2 + x_\alpha'^2 & x_\alpha' y_\alpha' & x_\alpha' & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & x_\alpha & 0 & 0 \\ x_\alpha' y_\alpha' & x_\alpha^2 + y_\alpha'^2 & y_\alpha' & 0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & x_\alpha & 0 \\ x_\alpha' & y_\alpha' & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & y_\alpha^2 + x_\alpha'^2 & x_\alpha' y_\alpha' & x_\alpha' & y_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & x_\alpha' y_\alpha' & y_\alpha^2 + y_\alpha'^2 & y_\alpha' & 0 & y_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_\alpha' & y_\alpha' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_\alpha & 0 & 0 & y_\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_\alpha & 0 & 0 & y_\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

4. ξ 空間の最尤推定

ノイズモデルが与えられたとき、最適性の基準としてよく用いられるのは「最尤推定」である。これは確率密度にデータを代入して得られる尤度を最大にするものであり、高次の誤差項を除いて精度の理論限界（「KCR 下界¹⁰⁾」）を達成するという利点がある¹⁰⁾。尤度を最大にする代わりにその対数の符号を換えたものを最小化してもよい。

ノイズモデルとして前章の ξ 空間での正規分布を仮定すると、最尤推定は次の「マハラノビス距離」(の二乗和)の最小化となる。

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V[\xi_\alpha]^{-1} (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (11)$$

これを拘束条件

$$(\bar{\xi}_\alpha, \mathbf{u}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (12)$$

のもとで最小にする $\bar{\xi}_\alpha, \mathbf{u}$ を求める。式 (12) は $\bar{\xi}_\alpha$ に関して線形であるから、ラグランジュ乗数を導入してこれを消去することができる。その結果、式 (11) は次式となる^{*1,11)}。

*1 式 (5), (7) のように ξ が定数の成分を含むと、式 (9), (10) のように共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ は特異行列となる。このときは式 (11) 中の $V[\xi_\alpha]^{-1}$ を一般逆行列に置きかえれば、 ξ_α の誤差の生じる成分のみ考えることになる。その場合でも式 (13) が成り立つ⁹⁾。

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\xi_\alpha, \mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}, V[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \quad (13)$$

この定式化がよく行われるのは、式 (13) を最小化する数値計算法が確立しているからである¹¹⁾。代表的なものは Chojnacki ら³⁾ の「FNS 法」、Leedan ら¹⁶⁾ の「HEIV 法」、および直接的な「射影的ガウス・ニュートン法」^{19),22)} がある。これらはパラメータ \mathbf{u} に特別の制約がない場合であるが、基礎行列 F の計算では F がランク 2 という制約がある。そのような制約のある場合に式 (13) を最小化する方法として FNS 法を拡張した Chojnacki ら⁴⁾ の「拘束 FNS 法^{*2)}」や金谷ら¹³⁾ の「拡張 FNS」法がある。

5. x 空間の最尤推定

前章の定式化は数値計算や理論解析¹¹⁾には適しているが、ノイズモデルが必ずしも適切ではない。たとえば例 1 の楕円当てはめでは、各点 (x_α, y_α) の各座標に独立な正規分布に従うノイズが加わっていると見なすが自然である。しかし、式 (5) のようにそれを非線形変換した ξ_α のノイズはもはや厳密には正規分布ではない。また、例 2 の基礎行列の計算でも、各対応点 $(x_\alpha, y_\alpha), (x_\alpha', y_\alpha')$ の各座標に独立な正規分布に従うノイズが加わっていると見なすが自然であるが、式 (7) のように非線形変換した ξ_α のノイズは厳密には正規分布ではない。

x 空間で正規分布を仮定して最尤推定を行っても、変換した ξ 空間で正規分布を仮定して最尤推定を行っても、ノイズが小さい限り差はないであろうが、ノイズが大きくなると両者に差が現れる可能性がある。これを調べるのが本論文の目的である。そこで、以下では元のデータ x_α をその真値 \bar{x}_α に期待値 0、共分散行列 $V[x_\alpha]$ の正規分布に従う独立なノイズが加わったものと見なし、 x 空間の最尤推定を考える。数学的には、条件

$$(\xi(\bar{x}_\alpha), \mathbf{u}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (14)$$

のもとで、マハラノビス距離 (の二乗和)

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x}_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} (x_\alpha - \bar{x}_\alpha)) \quad (15)$$

*2 拘束 FNS 法では必ずしも正しい解が得られないことが指摘されている¹³⁾。

を最小にする \bar{x}_α , u を求めるものである^{*1}。以下ではこの E を便宜上、「再投影誤差」と呼ぶ(脚注*2参照)。

この問題を一般的に解く方法はこれまで知られておらず、具体的な問題に即して対処されてきた。たとえば例1の楕円当てはめでは補助変数を導入して、真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ と楕円のパラメータ u のすべての未知数の空間がさまざまな方法で数値的に探索されている^{(2),(5),(6),(17)}。代表的な補助変数は、楕円の中心位置と主軸方向および主軸半径、そして楕円の中心から見た各点の偏角である⁽¹⁷⁾。例2の基礎行列の計算では、仮定した基礎行列 F から仮の3次元復元を行い、各点の3次元位置やカメラ位置、内部パラメータを調整して、各点を画像上に(再)投影した位置がなるべくデータ点に近くなるような探索がされている^{*2,1)}。このようなアプローチは「バンドル調整」と呼ばれている⁽²¹⁾。

このように、補助変数を導入して未知パラメータの陽な関数が得られれば、Levenberg-Marquardt 法などの非線形探索手法が適用できる。しかし、そのためには通常は非常に高次元のパラメータ空間を考慮して、問題の特殊性を考慮した定式化を行う必要があるのである。これに対して中川ら⁽¹⁸⁾は前章の ξ 空間の最尤推定を拡張した xy 空間の最尤推定による楕円当てはめ法を示し、金谷ら⁽¹⁴⁾も ξ 空間の最尤推定を拡張した $xyx'y'$ 空間の最尤推定による基礎行列の計算法を示した。本論文ではそれらを包括する、式(14)の拘束条件のもとで式(15)の再投影誤差を最小化する、問題に依存しない統一的な手続きを示す。これは何らの補助変数も導入する必要はなく、パラメータ u の空間のみの計算として実行される。ただし、これが問題の特殊性を考慮した高次元空間のバンドル調整より効率的かどうかは一般的には結論できない。バンドル調整の効率は問題の性格やプログラムの実装技法に大きく依存するからである。

6. 第1近似

真の位置 \bar{x}_α を直接に推定する代わりに

$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha - \Delta x_\alpha \quad (16)$$

と書き、補正量 Δx_α を推定してもよい。このとき、式(15)は次のようになる。

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (\Delta x_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) \quad (17)$$

式(14)は次のようになる。

$$(\xi(x_\alpha - \Delta x_\alpha), u) = 0 \quad (18)$$

$\xi_\alpha = \xi(x_\alpha)$ とおき、テイラー展開 $\xi(x_\alpha - \Delta x_\alpha) = \xi_\alpha - (\partial\xi/\partial x)_\alpha \Delta x_\alpha + \dots$ を代入し、第1近似として補正項 Δx_α の2次の項を無視すると次式を得る。

$$\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha \Delta x_\alpha, u \right) = (\xi_\alpha, u) \quad (19)$$

式(8)と同様に、 $(\partial\xi/\partial x)_\alpha$ は写像 $\xi(x)$ のヤコビ行列に $x = x_\alpha$ を代入したものである。制約条件(19)を消去するためにラグランジュ乗数 λ_α を導入して

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N (\Delta x_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha \Delta x_\alpha, u \right) - (\xi_\alpha, u) \\ & = \sum_{\alpha=1}^N (\Delta x_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \left(\Delta x_\alpha, \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u \right) - (\xi_\alpha, u) \end{aligned} \quad (20)$$

とおき、 Δx_α で微分して0とおくと次のようになる。

$$2V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha - \lambda_\alpha \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u = 0 \quad (21)$$

これから次式を得る。

$$\Delta x_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2} V[x_\alpha] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u \quad (22)$$

これを式(19)に代入すると次のようになる。

$$\frac{\lambda_\alpha}{2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top V[x_\alpha] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha u, u \right) = (\xi_\alpha, u) \quad (23)$$

式(8)の關係を用いると、 λ_α が次のように定まる。

$$\lambda_\alpha = \frac{2(\xi_\alpha, u)}{(u, V[\xi_\alpha]u)} \quad (24)$$

式(22)を式(17)に代入すると次のようになる。

*1 以下の議論は式(15)中の $V[x_\alpha]^{-1}$ が一般逆行列でも成立する⁽⁹⁾。その場合は導出の途中で適宜、射影行列を導入する必要があるが、最終結果は同じになる。そこで以下では簡単のために $V[x_\alpha]^{-1}$ を使って説明する。

*2 これから式(15)が「再投影誤差」と呼ばれるようになった。

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^2 (V[x_{\alpha}] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \mathbf{u}, \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \mathbf{u}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^2 (\mathbf{u}, \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\alpha} V[x_{\alpha}] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \mathbf{u}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^2 (\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_{\alpha}] \mathbf{u}) \tag{25}
\end{aligned}$$

これに式 (24) を代入すると、再投影誤差 E が次のように書ける .

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\hat{\xi}_{\alpha}, \mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_{\alpha}] \mathbf{u})} \tag{26}$$

これは式 (13) と同じ形をしている . このことは , x 空間の最尤推定の第 1 近似が ξ 空間の最尤推定に一致することを意味している . したがって , FNS 法などの既存の方法によってこれを最小にする u が計算できる . その解を \hat{u} とすると , 式 (16), (22), (24) から真値 \bar{x} は次のように推定される .

$$\hat{x}_{\alpha} = x_{\alpha} - \frac{(\hat{\xi}_{\alpha}, \hat{u}) V[x_{\alpha}] \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \hat{u}}{(\hat{u}, V[\hat{\xi}_{\alpha}] \hat{u})} \tag{27}$$

7. 高次の補正

式 (27) で得られる \hat{x}_{α} は真値 \bar{x}_{α} の第 1 近似である . そこで式 (16) の代わりに真値を

$$\bar{x}_{\alpha} = \hat{x}_{\alpha} - \Delta \hat{x}_{\alpha} \tag{28}$$

とおき , 高次の補正量 $\Delta \hat{x}_{\alpha}$ を推定する . “高次の補正” とは , 真値 \bar{x}_{α} の近似値 \hat{x}_{α} をさらに補正してより真値に近づけることをいう . 式 (28) を式 (15) に代入すると次のようになる .

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (\hat{x}_{\alpha} + \Delta \hat{x}_{\alpha}, V[x_{\alpha}]^{-1} (\hat{x}_{\alpha} + \Delta \hat{x}_{\alpha})) \tag{29}$$

ただし , 次のようにおいた .

$$\tilde{x}_{\alpha} = x_{\alpha} - \hat{x}_{\alpha} \tag{30}$$

拘束条件 (14) は次のように書ける .

$$(\xi(\hat{x}_{\alpha} - \Delta \hat{x}_{\alpha}), \mathbf{u}) = 0 \tag{31}$$

$\xi(\hat{x}_{\alpha} - \Delta \hat{x}_{\alpha})$ をテイラー展開して $\Delta \hat{x}_{\alpha}$ の 2 次の項を無視すると , 次のようになる .

$$\left(\left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha} \Delta \hat{x}_{\alpha}, \mathbf{u} \right) = (\hat{\xi}_{\alpha}, \mathbf{u}) \tag{32}$$

ただし , $\hat{\xi}_{\alpha} = \xi(\hat{x}_{\alpha})$ であり , $(\partial \hat{\xi} / \partial x)_{\alpha}$ は写像 $\xi(x)$ のヤコビ行列に $x = \hat{x}_{\alpha}$ を代入したものである . $\Delta \hat{x}_{\alpha}$ は高次の補正量であるから , 式 (32) は式 (14) を , 式 (19) よりもよく近似している . 制約条件 (32) を消去するためにラグランジュ乗数 λ_{α} を導入して ,

$$\sum_{\alpha=1}^N (\tilde{x}_{\alpha} + \Delta \hat{x}_{\alpha}, V[x_{\alpha}]^{-1} (\tilde{x}_{\alpha} + \Delta \hat{x}_{\alpha})) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} \left(\left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha} \Delta \hat{x}_{\alpha}, \mathbf{u} \right) - (\hat{\xi}_{\alpha}, \mathbf{u}) \tag{33}$$

を $\Delta \hat{x}_{\alpha}$ で微分して 0 とおくと次のようになる .

$$2V[x_{\alpha}]^{-1} (\tilde{x}_{\alpha} + \Delta \hat{x}_{\alpha}) - \lambda_{\alpha} \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \mathbf{u} = 0 \tag{34}$$

これから次式を得る .

$$\Delta \hat{x}_{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha}}{2} V[x_{\alpha}] \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \mathbf{u} - \tilde{x}_{\alpha} \tag{35}$$

これを式 (32) に代入すると次のようになる .

$$\left(\frac{\lambda_{\alpha}}{2} \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha} V[x_{\alpha}] \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \mathbf{u} - \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha} \tilde{x}_{\alpha}, \mathbf{u} \right) = (\hat{\xi}_{\alpha}, \mathbf{u}) \tag{36}$$

これから λ_{α} が次のように定まる .

$$\lambda_{\alpha} = \frac{2(\hat{\xi}_{\alpha}, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, (\partial \hat{\xi} / \partial x)_{\alpha} \tilde{x}_{\alpha})}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_{\alpha}] \mathbf{u})} = \frac{2(\hat{\xi}_{\alpha}^*, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_{\alpha}] \mathbf{u})} \tag{37}$$

ただし , $V[\hat{\xi}_{\alpha}^*]$ は式 (8) の $V[\hat{\xi}_{\alpha}]$ に含まれる x_{α} を \hat{x}_{α} に置き換えたものであり , $\hat{\xi}_{\alpha}^*$ を次のように定義した .

$$\hat{\xi}_{\alpha}^* = \hat{\xi}_{\alpha} + \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha} \tilde{x}_{\alpha} \tag{38}$$

式 (35) を式 (29) に代入すると次のようになる .

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\lambda_{\alpha}^2}{4} (V[x_{\alpha}] \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \mathbf{u}, V[x_{\alpha}]^{-1} V[x_{\alpha}] \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_{\alpha}^{\top} \mathbf{u}) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha}^2 (\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_{\alpha}] \mathbf{u}) \tag{39}
\end{aligned}$$

これに式 (37) を代入すると , 再投影誤差 E が次のように書ける .

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\hat{\xi}_\alpha^*, \mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \quad (40)$$

これは式 (13) と同じ形をしている．これは ξ 空間を補正した ξ^* 空間での最尤推定と見なすこともできる．したがって，FNS 法などの既存の方法によってこれを最小にする \mathbf{u} が計算できる．その解を $\hat{\mathbf{u}}$ とすると，式 (28), (30), (35), (37) から真値 \bar{x} は次のように推定される．

$$\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha - \frac{\lambda_\alpha}{2} V[x_\alpha] \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \hat{\mathbf{u}} + \tilde{x}_\alpha = x_\alpha - \frac{(\hat{\xi}_\alpha^*, \hat{\mathbf{u}}) V[x_\alpha]}{(\hat{\mathbf{u}}, V[\hat{\xi}_\alpha] \hat{\mathbf{u}})} \left(\frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \hat{\mathbf{u}} \quad (41)$$

これは式 (27) と同じ形をしている．そして，得られる \hat{x}_α は式 (27) の \hat{x}_α よりも \bar{x}_α のさらに良い近似である．そこで，これを改めて \hat{x}_α とおき，さらに高次の補正量を推定し，これを収束するまで反復する．最終的には式 (31) の $\Delta \hat{x}_\alpha$ が 0 になる．

8. 厳密な最尤推定の手順の例

以上より，“データ x_α のノイズモデルに基づく” という意味で厳密な最尤推定の手順が得られた．特にノイズが画像面上の各点の x 座標， y 座標に独立な期待値 0，標準偏差 σ のノイズが加わるとするとき，楕円当てはめと基礎行列の計算について具体的に示す．なお，ノイズの標準偏差 σ は未知でよい．なぜなら，式 (15) の最小化は $V[x_\alpha]$ を正数倍しても影響しないからである．したがって $\sigma = 1$ と見なす．

例 5 (楕円の当てはめ) 点列 (x_α, y_α) に当てはまる楕円の式 (5) のパラメータ \mathbf{u} を計算する手順は次のようになる．ただし \mathbf{u} の符号の不定性を除くために $\|\mathbf{u}\| = 1$ と正規化する．

- (1) $E_0 = \infty$ (十分大きい値) とし， $\hat{x}_\alpha = x_\alpha$ ， $\hat{y}_\alpha = y_\alpha$ ， $\tilde{x}_\alpha = \tilde{y}_\alpha = 0$ とおく ($\alpha = 1, \dots, N$) ．
- (2) 次の ξ_α^* を計算する ($\alpha = 1, \dots, N$) ．

$$\xi_\alpha^* = \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha^2 + 2\hat{x}_\alpha\tilde{x}_\alpha \\ 2(\hat{x}_\alpha\hat{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha\tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha\tilde{y}_\alpha) \\ \hat{y}_\alpha^2 + 2\hat{y}_\alpha\tilde{y}_\alpha \\ 2(\hat{x}_\alpha + \tilde{x}_\alpha) \\ 2(\hat{y}_\alpha + \tilde{y}_\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

- (3) 式 (9) の $V[\xi_\alpha]$ において x_α, y_α をそれぞれ $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha$ に置き換え， $\sigma = 1$ とおいたものを $V[\hat{\xi}_\alpha]$ とする ($\alpha = 1, \dots, N$) ．

- (4) 次の関数を最小にする 6 次元単位ベクトル $\mathbf{u} = (u_i)$ を計算する (たとえば FNS 法を用いる²²⁾) ．

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)^2}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \quad (43)$$

- (5) $\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha$ を次のように更新する．

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_\alpha \\ \tilde{y}_\alpha \end{pmatrix} \leftarrow \frac{2(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

- (6) $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha$ を次のように更新する．

$$\hat{x}_\alpha \leftarrow x_\alpha - \tilde{x}_\alpha, \quad \hat{y}_\alpha \leftarrow y_\alpha - \tilde{y}_\alpha \quad (45)$$

- (7) 再投影誤差 E を次のように計算する．

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (\tilde{x}_\alpha^2 + \tilde{y}_\alpha^2) \quad (46)$$

- (8) $E \approx E_0$ なら \mathbf{u} を返して終了する^{*1}．そうでなければ， $E_0 \leftarrow E$ として更新してステップ (2) に戻る．

この反復の初回のステップ (4) で得られる値 (第 1 近似) が従来の方法 (ξ 空間の最尤推定) であり，式 (13) の最小化に相当する．山田ら²²⁾ が実験的比較を行ったのもこの方法である．厳密な最尤推定は既に中川ら¹⁸⁾ によって行われているが，これが本論文の一般論の特別の場合として導かれる．ただし，中川ら¹⁸⁾ は実験によって，厳密な最尤推定と従来の方法との解が実質的に同等であることを示している．すなわち，上記の反復は 4, 5 回で終了し，有効数字のかなり下位しか解が改良しない．したがって，実用的には従来の方法でも十分である．

例 6 (基礎行列の計算) 対応点 $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$ に対する基礎行列 F を表す式 (7) のベクトル \mathbf{u} は次のように計算される．ただし \mathbf{u} の符号の不定性を除くために $\|\mathbf{u}\| = 1$ と

*1 計算した \mathbf{u} が前回の \mathbf{u} の値と符号を除いてほぼ一致することを終了条件にしてもよい．

正規化する .

- (1) $E_0 = \infty$ (十分大きい値) とし, $\hat{x}_\alpha = x_\alpha$, $\hat{y}_\alpha = y_\alpha$, $\hat{x}'_\alpha = x'_\alpha$, $\hat{y}'_\alpha = y'_\alpha$, $\tilde{x}_\alpha = \tilde{y}_\alpha = \tilde{x}'_\alpha = \tilde{y}'_\alpha = 0$ とおく ($\alpha = 1, \dots, N$).
- (2) 次の ξ_α^* を計算する ($\alpha = 1, \dots, N$).

$$\xi_\alpha^* = \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha \hat{x}'_\alpha + \hat{x}'_\alpha \tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha \tilde{x}'_\alpha \\ \hat{x}_\alpha \hat{y}'_\alpha + \hat{y}'_\alpha \tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha \tilde{y}'_\alpha \\ \hat{x}_\alpha + \tilde{x}_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \hat{x}'_\alpha + \hat{x}'_\alpha \tilde{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha \tilde{x}'_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \hat{y}'_\alpha + \hat{y}'_\alpha \tilde{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha \tilde{y}'_\alpha \\ \hat{y}_\alpha + \tilde{y}_\alpha \\ \hat{x}'_\alpha + \tilde{x}'_\alpha \\ \hat{y}'_\alpha + \tilde{y}'_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

- (3) 式 (10) の $V[\xi_\alpha]$ において $x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha$ をそれぞれ $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha, \hat{x}'_\alpha, \hat{y}'_\alpha$ に置き換え, $\sigma = 1$ とおいたものを $V[\hat{\xi}_\alpha]$ とする ($\alpha = 1, \dots, N$).
- (4) 次の関数を最小にする 9 次元単位ベクトル $\mathbf{u} = (u_i)$ を, それが定義する基礎行列 F の行列式が 0 であるように計算する (たとえば拡張 FNS 法を用いる¹³⁾).

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)^2}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \quad (48)$$

- (5) $\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha, \tilde{x}'_\alpha, \tilde{y}'_\alpha$ を次のように更新する .

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_\alpha \\ \tilde{y}_\alpha \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}'_\alpha \\ \hat{y}'_\alpha \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'_\alpha \\ \tilde{y}'_\alpha \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_4 & u_7 \\ u_2 & u_5 & u_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

- (6) $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha, \hat{x}'_\alpha, \hat{y}'_\alpha$ を次のように更新する .

$$\hat{x}_\alpha \leftarrow x_\alpha - \tilde{x}_\alpha, \quad \hat{y}_\alpha \leftarrow y_\alpha - \tilde{y}_\alpha, \quad \hat{x}'_\alpha \leftarrow x'_\alpha - \tilde{x}'_\alpha, \quad \hat{y}'_\alpha \leftarrow y'_\alpha - \tilde{y}'_\alpha \quad (50)$$

- (7) 再投影誤差 E を次のように計算する .

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (\tilde{x}_\alpha^2 + \tilde{y}_\alpha^2 + \tilde{x}'_\alpha^2 + \tilde{y}'_\alpha^2) \quad (51)$$

- (8) $E \approx E_0$ なら \mathbf{u} を返して終了する^{*1}. そうでなければ, $E_0 \leftarrow E$ としてステップ (2) に戻る .

楕円の場合と同様に, 反復の初回のステップ (4) で得られる値 (第 1 近似) が従来の方法 (ξ 空間の最尤推定) であり, 式 (13) の最小化に相当する. 菅谷ら¹⁹⁾ が実験的比較を行ったのもこの方法である. 厳密な最尤推定はすでに金谷ら¹⁴⁾ によって行われているが, これが本論文の一般論の特別の場合として導かれる. ただし, 金谷ら¹⁴⁾ は実験によって, 厳密な最尤推定と従来の方法との解が実質的に同等であることを示している. すなわち, 反復は 4, 5 回で終了し, 有効数字のかなり下位しか解が改良されない. したがって, 実用的には従来の方法でも十分である.

9. 最適補正への応用

上記のように, 本論文の方法は幾何学的当てはめに対しては実質的な精度の向上をもたらさないが, 副産物としてこれから最適補正の一般的な手続きが得られる. 「最適補正⁹⁾」とは誤差のあるベクトルデータ x を拘束条件

$$F(x; \mathbf{u}) = 0 \quad (52)$$

が満たされるように最適に補正する問題である. ただし, パラメータ \mathbf{u} は与えられ, 固定されている. 式 (47) が式 (3) のように書けるとき, この最尤推定は制約条件

$$(\xi(\bar{x}), \mathbf{u}) = 0 \quad (53)$$

のもとで再投影誤差

$$E = (x - \bar{x}, V[x]^{-1}(x - \bar{x})) \quad (54)$$

を最小にする \bar{x} を求めよという問題となる. したがって, 前章までの結果で \mathbf{u} の計算に関する部分を除けば, そのまま最適補正の最尤推定の手順が得られる.

例 7 (楕円への垂線) 式 (4) で表される楕円が与えられたとき, 与えられた点 (x, y) からこの楕円に下した垂線の足を計算したい (図 3). これは次のように求める (\mathbf{u} は式 (5) で定義).

*1 計算した \mathbf{u} が前回の \mathbf{u} の値と符号を除いてほぼ一致することを終了条件にしてもよい.

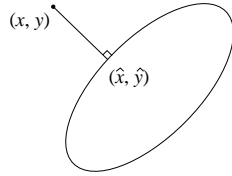


図 3 与えられた点から楕円に垂線を下ろす
Fig. 3 Drawing a perpendicular to a given ellipse.

- (1) $E_0 = \infty$ (十分大きい値) とし, $\hat{x} = x, \hat{y} = y, \tilde{x} = \tilde{y} = 0$ とおく.
- (2) 次の ξ^* を計算する.

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \hat{x}^2 + 2\hat{x}\tilde{x} \\ 2(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\tilde{x} + \hat{x}\tilde{y}) \\ \hat{y}^2 + 2\hat{y}\tilde{y} \\ 2(\hat{x} + \tilde{x}) \\ 2(\hat{y} + \tilde{y}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

- (3) 式 (9) の $V[\xi_\alpha]$ において x_α, y_α をそれぞれ \hat{x}, \hat{y} に置き換え, $\sigma = 1$ とおいたものを $V[\hat{\xi}]$ とする.
- (4) \tilde{x}, \tilde{y} を次のように更新する.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \frac{2(\mathbf{u}, \xi^*)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}]\mathbf{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

- (5) \hat{x}, \hat{y} を次のように更新する.

$$\hat{x} \leftarrow x - \tilde{x}, \quad \hat{y} \leftarrow y - \tilde{y} \quad (57)$$

- (6) 再投影誤差 E を次のように計算する.

$$E = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \quad (58)$$

- (7) $E \approx E_0$ なら (\hat{x}, \hat{y}) を返して終了する. そうでなければ, $E_0 \leftarrow E$ としてステップ (2) に戻る.

楕円への垂線の足は代数方程式を連立させて解けば求まるが, このような単純な方法は過

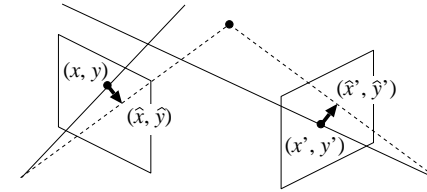


図 4 2 画像の対応点から 3 次元位置を計算する
Fig. 4 Computing the 3-D position from corresponding points in two images.

去には知られていなかったようである. 反復は 3, 4 回で収束するが, 第 1 回の解 (第 1 近似) でも十分な精度がある. この方法は最近, 菅谷ら²⁰⁾ によって画像中の楕円の検出に用いられている.

例 8 (三角測量) 基礎行列 F が既知のとき, 誤差のある対応点 $(x, y), (x', y')$ を式 (6) のエビ極線方程式が満たされるように補正することによって, その点の 3 次元位置が定まる*1 (図 4). $(x, y), (x', y')$ の移動距離の 2 乗和が最小になるように補正は次のように計算される (\mathbf{u} は式 (7) で定義).

- (1) $E_0 = \infty$ (十分大きい値) とし, $\hat{x} = x, \hat{y} = y, \hat{x}' = x', \hat{y}' = y', \tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{x}' = \tilde{y}' = 0$ とおく.
- (2) 次の ξ^* を計算する.

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \hat{x}\hat{x}' + \hat{x}'\tilde{x} + \hat{x}\tilde{x}' \\ \hat{x}\hat{y}' + \hat{y}'\tilde{x} + \hat{x}\tilde{y}' \\ \hat{x} + \tilde{x} \\ \hat{y}\hat{x}' + \hat{x}'\tilde{y} + \hat{y}\tilde{x}' \\ \hat{y}\hat{y}' + \hat{y}'\tilde{y} + \hat{y}\tilde{y}' \\ \hat{y} + \tilde{y} \\ \hat{x}' + \tilde{x}' \\ \hat{y}' + \tilde{y}' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

*1 対応点 $(x, y), (x', y')$ の定義する視線が 1 点で交わる必要十分条件は式 (6) のエビ極線方程式が満たされることである⁸⁾.

- (3) 式 (10) の $V[\xi_\alpha]$ において $x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha$ をそれぞれ $\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}', \hat{y}'$ に置き換え, $\sigma = 1$ とおいたものを $V[\hat{\xi}]$ とする.
- (4) $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}'$ を次のように更新する.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\mathbf{u}, \xi^*)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}]\mathbf{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\mathbf{u}, \xi^*)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}]\mathbf{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_4 & u_7 \\ u_2 & u_5 & u_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 1 \end{pmatrix},$$
(60)

- (5) $\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}', \hat{y}'$ を次のように更新する.
- $$\hat{x} \leftarrow x - \tilde{x}, \quad \hat{y} \leftarrow y - \tilde{y}, \quad \hat{x}' \leftarrow x' - \tilde{x}', \quad \hat{y}' \leftarrow y' - \tilde{y}'$$
- (61)

- (6) 再投影誤差 E を次のように計算する.

$$E = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{x}'^2 + \hat{y}'^2$$
(62)

- (7) $E \approx E_0$ なら $(\hat{x}, \hat{y}), (\hat{x}', \hat{y}')$ を返して終了する. そうでなければ, $E_0 \leftarrow E$ としてステップ (2) に戻る.

これは金谷ら¹⁵⁾のステレオ画像の三角測量法に他ならない. 金谷ら¹⁵⁾は実験により, これを用いると, 標準的に用いられている Hartley-Sturm 法⁷⁾と同じ解が得られ, かつ計算が圧倒的に効率化されることを示している.

10. まとめ

本論文では幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の計算法を統一的に示した. 従来はデータを計算に都合の良い形に変換した ξ 空間において正規分布に従うノイズが仮定されていたが, 本論文では元のデータの x 空間での正規分布ノイズを仮定した. そして, その最尤推定の計算を従来の方法を反復に帰着させる統一的な手法を提案した. このような厳密な最尤推定は, 楕円の当てはめや基礎行列の計算問題に対しては中川ら¹⁸⁾や金谷ら¹⁴⁾によって個別に導出されていたが, 本論文ではそれらが本論文の一般論から統一的に導かれることが示された.

従来の ξ 空間での最適化と異なり, 提案方法では拘束条件のパラメータ \mathbf{u} だけでなく, 各データ x_α の真値 \bar{x}_α も同時に最尤推定されている. 問題によってはパラメータ \mathbf{u} 以外に,

データの真値の推定も必要なことがある. そのような場合に提案方法は都合が良い. このことは, \mathbf{u} を固定すれば最適補正の一般的な手続きが得られることを意味する. 例として, 菅谷ら²⁰⁾の楕円への垂線の計算や金谷ら¹⁵⁾のステレオ画像の三角測量法が得られることを示した. このように本論文の一般論により, 過去に個別に考案されてきた手法が統一的に理解され, 非常に見通しが良くなったことはコンピュータビジョンの研究者に非常に助けになるものと思われる.

ただし, 中川ら¹⁸⁾や金谷ら¹⁴⁾が実験的に示しているように, 厳密な最尤推定 (x 空間の最適化) は従来の方法 (ξ 空間の最適化) と実質的に同等である. これは, 厳密には正規分布でない ξ 空間の誤差を正規分布と見なしても, 共分散行列を正しく評価している限り, 解に実質的な相違が生じないことを意味している. このため, 現段階では本論文の一般論の直接に精度の向上に役立つ応用が見出されていないが, 手法間の精度の比較, たとえば単純化や効率化のために導入した近似がどれだけ解に影響するかの評価基準として意義があると思われる.

謝辞 本研究について有益なコメントをいただいたオーストラリア Adelaide 大学 Brooks 教授, Woicich Chojnacki 博士, および米国 Alabama 大学 Nikolai Chernov 博士に感謝する.

参考文献

- 1) Bartoli, A. and Sturm, P.: Nonlinear estimation of fundamental matrix with minimal parameters, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, Vol.26, No.3, pp.426–432 (2004).
- 2) Björck, A.: *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, PA, U.S.A. (1996).
- 3) Chojnacki, W., Brooks, M.J., van den Hengel, A. and Gawley, D.: On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, Vol.22, No.11, pp.1294–1303 (2000).
- 4) Chojnacki, W., Brooks, M.J., van den Hengel, A. and Gawley, D.: A new constrained parameter estimator for computer vision applications, *Image Vis. Comput.*, Vol.22, No.2, pp.85–91 (2004).
- 5) Gander, W., Golub, H. and Strebel, R.: Least-squares fitting of circles and ellipses, *BIT*, Vol.34, No.4, pp.558–578 (1994).
- 6) Harker, M. and O'Leary, P.: First order geometric distance (The myth of Sampson), *Proc. 17th Brit. Mach. Vis. Conf.*, Edinburgh, U.K., Vol.1, pp.87–96 (2006).
- 7) Hartley, R.I. and Sturm, P.: Triangulation, *Comput. Vision Image Understand.*,

Vol.68, No.2, pp.146–157 (1997).

- 8) Hartley, R. and Zisserman, A.: *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2000).
- 9) Kanatani, K.: *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands (1996); Dover, New York (2005).
- 10) 金谷健一: 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8, pp.59–64 (2005).
- 11) Kanatani, K.: Statistical optimization for geometric fitting: Theoretical accuracy analysis and high order error analysis, *Int. J. Comput. Vision*, Vol.80, No.2, pp.167–188 (2008).
- 12) 金谷健一, 三島等: 未校正カメラによる 2 画像からの 3 次元復元とその信頼性評価, 情報処理学会論文誌: コンピュータビジョンとイメージメディア, Vol.42, No.SIG 6, pp.1–8 (2001).
- 13) 金谷健一, 菅谷保之: 制約付きパラメータ推定のための拡張 FNS 法, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-158-4, pp.25–32 (2007).
- 14) 金谷健一, 菅谷保之: 高ノイズレベルにおける基礎行列の最尤推定, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-160-9, pp.49–56 (2007).
- 15) 金谷健一, 菅谷保之, 新妻弘崇: 2 画像からの三角測量: Hartley vs. 最適補正, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-54, pp.335–342 (2008).
- 16) Leedan, Y. and Meer, P.: Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, Vol.37, No.2, pp.127–150 (2000).
- 17) Sturm, P. and Gargallo, P.: Conic fitting using the geometric distance, *Proc. 8th Asian Conf. Comput. Vision*, Tokyo, Japan, Vol.2, pp 784–795 (2007).
- 18) 中川裕介, 金谷健一, 菅谷保之: 高ノイズレベルにおける最尤楕円当てはめ, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-10, pp.53–60 (2008).
- 19) 菅谷保之, 金谷健一: 基礎行列の高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-153-32, pp.207–214 (2006).
- 20) 菅谷保之, 福山治樹: エッジセグメントの分割と統合による楕円検出, 第 14 回画像セ

ンシングシンポジウム講演論文集, 横浜, pp.IN1-14-1–IN1-14-6 (2006).

- 21) Triggs, B., McLauchlan, P.F., Hartley, R.I. and Fitzgibbon, A.: Bundle adjustment—A modern synthesis, *Vision Algorithms: Theory and Practice*, Triggs, B. Zisserman, A. and Szeliski, R.: (Eds.), Springer, Berlin (2000).
- 22) 山田純平, 金谷健一, 菅谷保之: 楕円当てはめの高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-154-36, pp.339–346 (2006).

(平成 20 年 5 月 2 日受付)

(平成 20 年 11 月 28 日採録)

(担当編集委員 清水 郁子)



金谷 健一 (正会員)

1972 年東京大学工学部計数工学科 (数理工学) 卒業. 1979 年同大学大学院博士課程修了. 工学博士. 群馬大学工学部情報工学科教授を経て, 現在, 岡山大学大学院自然科学研究科 (計算機工学) 教授. IEEE フェロー.



菅谷 保之 (正会員)

1996 年筑波大学第三学群情報学類卒業. 2001 年同大学大院博士課程修了. 博士 (工学). 岡山大学工学部助手を経て, 現在, 豊橋技術科学大学情報工学系講師. 画像処理, コンピュータビジョンの研究に従事.