

# コニックの計算論と直交性の3次元解釈†

金 谷 健 一††

「極点」, 「極線」, 「共役点対」等のコニックに関する射影幾何学的概念を「計算過程」の観点から定式化し, 空間中で互いに直交する3直線の3次元的配置をその投影像から解釈する問題がコニックに関する計算過程を用いて簡単に解けることを示す.

## 1. はじめに

「コニック」(「円錐曲線」)は直線に次ぐ重要な画像特徴である. ひとつにはこれが最低次数の代数曲線であるため取扱いが簡単で, 多くの曲線がコニックで近似できるためでもあるが, より重要なのは多くの工業製品には円形や球状の部分があり, 円や球は画像上に楕円として投影されるという事実である. コニックの投影像からその3次元的配置を解析的に計算することもできるので<sup>14)</sup>, コニックに着目したビジョンシステムも試みられている<sup>9)</sup>. 画像データへのコニックの当てはめの手法についても詳しく調べられている<sup>2), 4), 15)-17)</sup>.

コニックは射影幾何学の中心テーマであるから, その数学的性質はどの射影幾何学の教科書にも書かれている. しかし, 数学としての射影幾何学は公理に基づく論理の一貫性を追及するものであるため, 画像解析への応用との間には著しい隔りがある. 逆に言えば「計算上の問題」を無視していればこそ純粋数学としての地位が確立されているともいえる. したがって射影幾何学を画像解析に応用しようとするれば, 射影幾何学を「計算過程」の観点から再構成する必要がある.

筆者はこれを「計算射影幾何学」と呼び<sup>8), 9)</sup>, 画像データの幾何学的構造の仮説検定<sup>10), 11)</sup>やカメラキャリブレーション<sup>12), 13)</sup>に適用している. 本論文はこれをさらにコニックに拡張し, 「極点」, 「極線」, 「共役点対」などのコニックに関する射影幾何学的概念を計算過程の観点から定式化する. 応用として, 空間中で互いに直交する3直線の3次元的配置をその投影画像から解釈する問題を考える.

建造物や工業製品は互いに直交する辺を多数もっている. このため, 画像による3次元直交性の解釈はコン

ピュータビジョンの重要な問題であり, さまざまな解法が提案された<sup>1), 5)-7), 19)-21)</sup>. しかし, それらは反復や探索を要したり, 解析解の場合も非線形変換を含んだ複雑なものであった. 本論文ではこれがコニックに関する計算過程を用いれば簡単に解けることを示す.

## 2. 透視変換とNベクトル

次のようなカメラモデルを考える. レンズの中心を原点 $O$ とし, 光軸を $Z$ 軸とする $XYZ$ 座標系をとり, 平面 $Z=f$ を画像面とする(図1). 座標原点 $O$ を視点と呼ぶ. 定数 $f$ はカメラの撮像面とレンズの中心との距離であり, 焦点距離と呼ぶ. 画像面上で光軸に対応する点を原点 $o$ とし,  $X, Y$ 軸に平行な $x, y$ 画像座標軸をとる.

画像面上の点 $(x, y)$ は, 視点 $O$ とその点を通る視線の方向を表す単位ベクトル $m$ で指定できる. 画像面上の直線 $Ax+By+C=0$ は, 視点 $O$ とその直線を含む平面の単位法線ベクトル $n$ で指定できる(図1). そのような単位ベクトル $m, n$ をNベクトルと呼ぶ<sup>8), 9)</sup>. 成分で表せば

$$m = \pm N \begin{bmatrix} x \\ y \\ f \end{bmatrix}, \quad n = \pm N \begin{bmatrix} A \\ B \\ C/f \end{bmatrix} \quad (1)$$

となる. ただし $N[\cdot]$ は単位ベクトルへの正規化を表す.

形式的に $X, Y$ 成分が0の単位ベクトルは無限遠点,  $\pm(0, 0, 1)^T$ は無限遠直線を表すNベクトルとみなすと, Nベクトルは画像面を射影空間とみなしたときの同次座標を単位ベクトルに正規化したものにはかならない. Nベクトルの符号は任意である.

点 $P$ のNベクトルを $m$ , 直線 $l$ のNベクトルを $n$ とすると, 図1からわかるように点 $P$ が直線 $l$ 上にある, あるいは直線 $l$ が点 $P$ を通る条件(隣接条件)は

$$(m, n) = 0 \quad (2)$$

である. ただし $(\cdot, \cdot)$ はベクトルの内積を表す.

† Computational Theory of Conics and 3-D Interpretation of Orthogonality by KENICHI KANATANI (Department of Computer Science, Gunma University).

†† 群馬大学工学部情報工学科

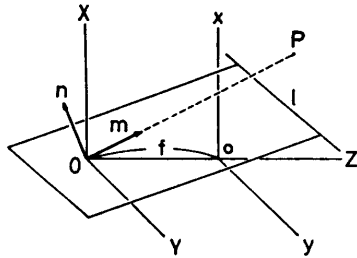


図1 カメラモデルとNベクトル  
Fig. 1 Camera model and N-vectors.

このことからNベクトルが  $n_1, n_2$  の2直線  $l_1, l_2$  の交点のNベクトル  $m$  は隣接条件  $(m, n_1)=0, (m, n_2)=0$  より

$$m = \pm N[n_1 \times n_2] \quad (3)$$

で与えられる。またNベクトルが  $m_1, m_2$  の2点  $P_1, P_2$  を通る直線  $l$  のNベクトル  $n$  は隣接条件  $(m_1, n)=0, (m_2, n)=0$  より

$$n = \pm N[m_1 \times m_2] \quad (4)$$

で与えられる。式(3), (4)が同じ形をしているのは射影幾何学における点と直線の相対性を反映したものである。

よく知られているように、空間中で平行な直線は画像上に投影すると消失点と呼ばれる一点に交わる。図2から次のことがわかる。

【定理1】 単位ベクトル  $m$  の方向をもつ直線を画像上に投影すると、Nベクトル  $\pm m$  の消失点をもつ。

また空間中の平行な平面は画像上に投影すると消失線と呼ばれる一直線を共有する。図3から次のことが

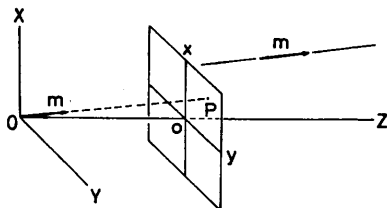


図2 直線の消失点  
Fig. 2 The vanishing point of a line.

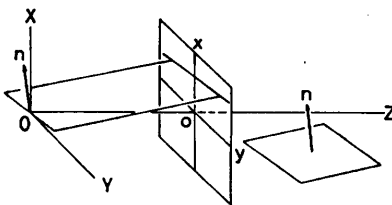


図3 平面の消失線  
Fig. 3 The vanishing line of a planar surface.

直ちにわかる。

【定理2】 単位法線ベクトル  $n$  をもつ平面を画像上に投影すると、Nベクトル  $\pm n$  の消失線をもつ。

すなわち、消失点と消失線のNベクトルがそのまま対応する空間中の直線の3次元方向および単位法線ベクトルになっている。

### 3. コニックの基本的性質

コニック(円錐曲線)とは次の形の2次曲線のことである。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \quad (5)$$

これは式(1)のNベクトル  $m$  を用いると、次のように書き直せる。

$$(m, Qm) = 0 \quad (6)$$

$$Q = \begin{pmatrix} A & B & D/f \\ B & C & E/f \\ D/f & E/f & E/f^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

逆に任意の対称行列  $Q$  に対して式(6)はコニックを表す。以下、対称行列  $Q$  が式(6)の形に表すコニックを単に「コニック  $Q$ 」と呼ぶ。定義より  $Q$  を定数倍しても同じコニックを表す。

コニックについては、次のことが知られている<sup>18)</sup>。コニックはそれが(実または虚の)2直線または縮退した1直線を表すとき特異であるといい、そうでないとき正則であるという。コニック  $Q$  が正則である必要十分条件は  $Q$  が正則行列であることである。正則なコニックが実コニック(楕円, 放物線, 双曲線)を表す必要十分条件は  $Q$  が符号(2,1)または(1,2) (すなわち1個の固有値が他の固有値と反対符号)をもつことである。このことから式(7)のコニック  $Q$  は次のようになる。

1.  $\det Q = 0$  なら(実または虚の)2直線または縮退した1直線
2.  $\det Q \neq 0$  のとき  $\det Q < 0$  となるように  $Q$  の符号を選べば
  - (a)  $AC - B^2 > 0$  のとき
    - i.  $A + C > 0$  なら楕円.
    - ii.  $A + C < 0$  なら空集合(虚コニック).
  - (b)  $AC - B^2 = 0$  のとき放物線.
  - (c)  $AC - B^2 < 0$  のとき双曲線.

実コニックは画像座標系に適当な回転と平行移動を施せば標準形に帰着する(付録1)。また、画像上のコニックが既知の形状の円または楕円の投影像であることがわかっていれば、その空間中の位置が計算でき

る (付録2, 3).

4. コニックの極変換

以下, 正則コニック  $Q$  のみを考える. 点  $P$  の  $N$  ベクトルが  $m$  であるとき,  $N$  ベクトルが  $n = \pm N[Qm]$  の直線をコニック  $Q$  に関する点  $P$  の極線といい ( $\det Q \neq 0$  だから  $Qm \neq 0$ ), 直線  $l$  の  $N$  ベクトルが  $n$  であるとき,  $N$  ベクトルが  $m = \pm N[Q^{-1}n]$  の点をコニック  $Q$  に関する直線  $l$  の極点という. 考えているコニック  $Q$  が明らかなきは「コニック  $Q$  に関する」というただし書きを省略する. コニックの極点と極線に対して次のことが知られている<sup>18)</sup>. ここでは  $N$  ベクトルによる証明をつける.

【命題1】 コニック  $Q$  上の点  $P$  の極線は  $Q$  の  $P$  における接線である.

(証明) コニック  $Q$  を  $s$  でパラメータ化して, その上の点を  $P(s)$ , その  $N$  ベクトルを  $m(s)$  とする. 定義式  $(m, Qm) = 0$  を  $s$  で微分すると  $(\dot{m}, Qm) + (m, Q\dot{m}) = 0$  (ドットは  $s$  に関する微分).  $Q$  は対称行列だから  $(m, Q\dot{m}) = (Qm, \dot{m})$ , したがって  $2(\dot{m}, Qm) = 0$ . 点  $P$  の極線の  $N$  ベクトルは  $n = \pm N[Qm]$  だから

$$(\dot{m}, n) = 0 \tag{8}$$

点  $P$  はコニック  $Q$  上にあるから  $(m, Qm) = 0$  であり,

$$(m, n) = 0 \tag{9}$$

ゆえに  $n$  は  $\dot{m}$  と  $m$  の両方に直交する. これは  $n$  が, 視点と  $P$  における  $Q$  の接線とを含む平面の単位法線ベクトルであることを意味している (図4). すなわち,  $n$  は  $Q$  の  $P$  における接線の  $N$  ベクトルである.  $\square$

【系1】 直線  $l$  がコニック  $Q$  に接する必要十分条件は, その極点がコニック  $Q$  の上にあることである.

楕円の内部の点の極線は楕円の外部にあり, 楕円と (実の) の交点をもたない. 一方, 楕円の外部の点の極線は楕円と2点で交わる. これを一般のコニック

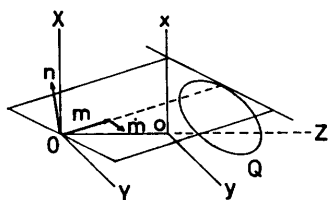


図4 コニック  $Q$  への接線の  $N$  ベクトル  $n$   
Fig. 4 The  $N$ -vector  $n$  of a tangent to conic  $Q$ .

$Q$  に拡張して, 点  $P$  はその極線が  $Q$  と (実の) 交点をもたないとき内部にあるといい, その極線が  $Q$  と2点で交わる時外部にあるという.

【命題2】 点  $P$  がコニック  $Q$  の外部にあるとき, 点  $P$  からコニック  $Q$  へ引いた接線の接点を  $P_1, P_2$  とすれば, 点  $P$  の極線は2点  $P_1, P_2$  を通る.

(証明) 接点  $P_1, P_2$  の  $N$  ベクトルをそれぞれ  $m_1, m_2$  とする. 直線  $P_1P$  および  $P_2P$  はそれぞれ点  $P_1$  および  $P_2$  の極線であるから (命題1), それらの  $N$  ベクトルはそれぞれ  $\pm N[Qm_1]$  および  $\pm N[Qm_2]$  である. 点  $P$  はそれらの交点であるから, その  $N$  ベクトル  $m$  は式(3)より

$$m = \pm N[Qm_1 \times Qm_2] \tag{10}$$

したがって点  $P$  の極線  $l$  の  $N$  ベクトルは

$$n = \pm N[Qm] = \pm N[Q(Qm_1 \times Qm_2)] = \pm \gamma Q(Qm_1 \times Qm_2) \tag{11}$$

ただし  $\gamma$  は正規化定数である. これから, 次のことがわかる.

$$(m_1, n) = \pm \gamma (m_1, Q(Qm_1 \times Qm_2)) = \pm \gamma (Qm_1, Qm_1 \times Qm_2) = 0 \tag{12}$$

これは点  $P_1$  が  $l$  上にあるという隣接条件である (式(2)). 同様に点  $P_2$  も  $l$  上にある. ゆえに, 点  $P$  の極線  $l$  は直線  $P_1P_2$  と一致する (図5).  $\square$

点  $P_a$  が点  $P_b$  の極線上にあり, 点  $P_b$  が点  $P_a$  の極線上にあるとき, 2点  $P_a, P_b$  は互いに共役であるという. 点  $P_a, P_b$  の  $N$  ベクトルがそれぞれ  $u, v$  であれば, 極線の定義と隣接条件(2)より, 2点  $P_a, P_b$  が互いに共役である必要十分条件は

$$(u, Qv) = 0 \tag{13}$$

である. したがってコニック  $Q$  上の点は自己共役 (自分自身に共役) である. これと双対に, 直線  $l_i$  が直線  $l_j$  の極点を通り, 直線  $l_j$  が直線  $l_i$  の極点を通るとき, 2直線  $l_i, l_j$  は互いに共役であるという. 直線  $l_i, l_j$  の  $N$  ベクトルがそれぞれ  $s, t$  であれば, 極

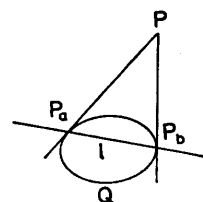


図5 点の極線はその点からのコニック への接線の接点を通る  
Fig. 5 The polar of a point is defined by the two tangents to the conic.

点の定義と隣接条件(2)より, 2直線  $L_1, L_2$  が互いに共役である必要十分条件は

$$(s, Q^{-1}t) = 0 \quad (14)$$

である. したがってコニック  $Q$  の接線は自己共役である.

**【命題3】**  $N$ ベクトルが  $n$  の直線  $l$  上の点  $P_1$  の  $N$ ベクトルが  $u$  であるとき, 直線  $l$  上のこれと共役な点  $P_2$  の  $N$ ベクトルは  $N[Qu] \neq \pm n$  なら

$$v = \pm N[n \times Qu] \quad (15)$$

であり,  $N[Qu] = \pm n$  なら  $v = \pm u$  である.

(証明) 直線  $l$  上の点  $P_1$  の共役点  $P_2$  は点  $P_1$  の極線と直線  $l$  との交点である. 点  $P_1$  の極線の  $N$ ベクトルは  $\pm N[Qu]$  であるから,  $N[Qu] \neq \pm n$  なら式(3)より交点  $P_2$  の  $N$ ベクトルは式(15)で与えられる.  $N[Qu] = \pm n$  なら系1より点  $P_2$  はコニック  $Q$  上にあるから自己共役である.  $\square$

**【命題4】**  $N$ ベクトルが  $m$  の点  $P$  を通る直線  $l_1$  の  $N$ ベクトルが  $s$  であるとき, 点  $P$  を通るこれと共役な直線  $l_2$  の  $N$ ベクトルは  $N[Q^{-1}s] \neq \pm m$  なら

$$t = \pm N[m \times Q^{-1}s] \quad (16)$$

であり,  $N[Q^{-1}s] = \pm m$  なら  $t = \pm s$  である.

(証明) 点  $P$  を通る直線  $l_1$  の共役直線  $l_2$  は直線  $l_1$  の極点と点  $P$  とを通る直線である. 直線  $l_1$  の極点の  $N$ ベクトルは  $\pm N[Q^{-1}s]$  であるから,  $N[Q^{-1}s] \neq \pm m$  なら式(4)より直線  $l_2$  の  $N$ ベクトルは式(16)で与えられる.  $N[Q^{-1}s] = \pm m$  なら系1より直線  $l_2$  はコニック  $Q$  に接するから自己共役である.  $\square$

## 5. コニックと直線との交点

前章に述べた共役点対の性質を用いると, 直線とコニックとの交点の計算が次のように簡単化される.

**【命題5】** 点  $P_1, P_2$  が直線  $l$  上の相異なる共役点対であり, 点  $P_1, P_2$  の  $N$ ベクトルがそれぞれ  $u, v$  であるとき, 直線  $l$  とコニック  $Q$  が2点で交われば, その交点の  $N$ ベクトル  $m_1, m_2$  は次のように与えられる (二つの複号は独立).

$$m_{1,2} = \pm N[\sqrt{|(v, Qv)|} u \pm \sqrt{|(u, Qu)|} v] \quad (17)$$

(証明) 点  $P_1, P_2$  は直線  $l$  上にあるから, 直線  $l$  上の任意の点の  $N$ ベクトルは適当な実数  $a, b$  により

$$m = au + bv \quad (18)$$

と表される. この点がコニック  $Q$  上にある必要十

分条件は  $(m, Qm) = 0$ . 点  $P_1, P_2$  は互いに共役であり, したがって式(13)より  $(u, Qv) = 0$ . ゆえに

$$(m, Qm) = a^2(u, Qu) + b^2(v, Qv) = 0 \quad (19)$$

したがって

$$\frac{a}{b} = \pm \sqrt{-\frac{(v, Qv)}{(u, Qu)}} \quad (20)$$

$m$  は単位ベクトルであるから, 式(17)が得られる.  $\square$

点  $P_1$  が自己共役であれば, 点  $P_2$  はコニック  $Q$  上にあるからその  $N$ ベクトルを  $u$  とすると  $(u, Qu) = 0$  である. このことと上の命題を合わせて次の系を得る.

**【系2】** 点  $P_1, P_2$  が直線  $l$  上の共役点対であり, 点  $P_1, P_2$  の  $N$ ベクトルがそれぞれ  $u, v$  であるとき, 直線  $l$  とコニック  $Q$  が (実の) 交点をもつ必要十分条件は

$$(u, Qu)(v, Qv) \leq 0 \quad (21)$$

**【系3】** 点  $P_1, P_2$  が直線  $l$  上の共役点対であり, 直線  $l$  がコニック  $Q$  と (実の) 2交点をもつとき,  $P_1, P_2$  の一方は  $Q$  の内部にあり, 他方は  $Q$  の外部にある.

(証明) コニック  $Q$  の方程式は  $(m, Qm) = 0$  である. 点  $P_1, P_2$  の  $N$ ベクトルをそれぞれ  $u, v$  とすると, 系2より  $(u, Qu), (v, Qv)$  は異なる符号をもつから, 互いに  $Q$  の反対側にある.  $\square$

直線  $l$  が与えられたとき, その上の共役点対  $\{P_1, P_2\}$  の選び方は任意である. しかし, 実際の計算で最も便利なのは,  $P_1$  を「無限遠点」に選ぶことである. 直線  $l$  の  $N$ ベクトルを  $n$  とすると,  $l$  の無限遠点は  $l$  と「無限遠直線」との交点である.  $k = (0, 0, 1)^T$  とすると無限遠直線の  $N$ ベクトルは  $\pm k$  であるから, 無限遠点の  $N$ ベクトルは  $u = \pm N[n \times k]$  である. このことから, コニック  $Q$  と直線  $l$  の  $N$ ベクトル  $n$  が与えられたとき,  $Q$  と  $l$  の交点の  $N$ ベクトルを計算する手順が次のように与えられる\*.

**procedure intersection ( $Q, n$ )**

1. ベクトル  $u = N[n \times k]$  を計算する.
2. ベクトル  $v = N[n \times Qu]$  を計算する.
3. もし  $(u, Qu)(v, Qv) > 0$  であれば, (実の) 交点は存在しない. そうでなければ
4.  $m_{1,2} = N[\sqrt{|(v, Qv)|} u \pm \sqrt{|(u, Qu)|} v]$  を返す.

## 6. 直交性の3次元解釈

空間中で互いに直交する3直線を考える. これらは

\*  $Q$  が双曲線で  $l$  がその漸近線の場合と,  $Q$  が放物線で  $l$  がその軸に平行な場合は例外的処置が必要である. 詳細省略.

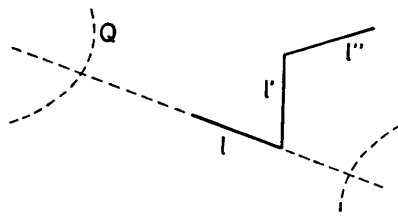


図6 直交性の3次元解釈

Fig. 6 3-D interpretation of orthogonality.

1点で交わっている必要はなく、位置は任意でよい(図6)。これらの「3次元解釈」とは、画像上にそれらの投影像  $l, l', l''$  が与えられたとき、おのおのの3次元方向を計算する問題をいう。空間中の直線の3次元方向はその画像上での消失点のNベクトルに等しいから(定理1)、これは3直線の消失点を計算することに帰着する。

【定理3】空間中で直交する3直線の投影像  $l, l', l''$  のNベクトルをそれぞれ  $n, n', n''$  とすると、 $l$  の消失点は  $l$  とコニック

$$Q = (n', n'')I - \frac{1}{2}(n'n'^T + n''n''^T) \quad (22)$$

との交点である。

(証明) 直線  $l, l', l''$  のそれぞれの消失点のNベクトルを  $n, n', n''$  とする。消失点はそれぞれの直線(またはその延長)上にあるから、それぞれの隣接条件(式(2))が成立する。

$$(m, n) = 0, \quad (m', n') = 0, \quad (m'', n'') = 0 \quad (23)$$

$m, m', m''$  は各直線の3次元方向でもあり(定理1)、それらは互いに直交する。

$$(m, m') = 0, \quad (m, m'') = 0, \quad (m', m'') = 0 \quad (24)$$

ゆえに  $m'$  は  $n', m$  の両方に直交する単位ベクトルであり、 $m''$  は  $n'', m$  の両方に直交する単位ベクトルである。したがって

$$m' = \pm N[n' \times m] = \pm \gamma' n' \times m \quad (25)$$

$$m'' = \pm N[n'' \times m] = \pm \gamma'' n'' \times m \quad (26)$$

ただし  $\gamma', \gamma''$  は正規化定数。 $m', m''$  は互いに直交するから

$$\begin{aligned} (m', m'') &= \pm \gamma' \gamma'' (n' \times m, n'' \times m) \\ &= \pm \gamma' \gamma'' ((n', n'')(m, m) - (n', m)(m, n'')) \\ &= \pm \gamma' \gamma'' (m, \left( (n', n'')I - \frac{1}{2}(n'n'^T + n''n''^T) \right) m) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

これは  $Q$  を式(22)で定義すれば  $(m, Qm) = 0$  であ

ることを意味する。□

この定理より、3直線  $l, l', l''$  のNベクトル  $m, m', m''$  からそれぞれの3次元方向  $n, n', n''$  を計算する手続きが次のように得られる。

procedure orthogonal ( $n, n', n''$ )

1. 前節の  $intersection(Q, n)$  により、Nベクトル  $n$  の直線  $l$  が式(22)のコニック  $Q$  と(実の)交点をもつか判定する。
2. もし(実の)交点が存在しなければ、 $l, l', l''$  は直交する3直線ではありえない。存在すれば同じく  $intersection(Q, n)$  によって、一つ交点のNベクトル  $m$  を計算する。
3.  $m' = N[n' \times m], m'' = N[n'' \times m]$  を計算する。
4.  $\{m, m', m''\}$  を返す。

前節の  $intersection(Q, n)$  ではコニック  $Q$  は正則であると仮定したが、 $(n', n'') = 0$  または  $n' = \pm n''$  のとき式(22)の  $Q$  が特異になる(証明省略)。しかし、上の手続きで計算できれば正しい解釈が得られることが確かめられる。計算ができない唯一の例外は  $intersection(Q, n)$  の2. で  $Qu = 0$  となるときのであるが、このときは直線  $l$  がコニック  $Q$  に含まれ、解が無数に生じる(例えば3直線がT字型頂点をつくるとき; 詳細省略)。

一般には直線  $l$  とコニック  $Q$  は高々2個の(実の)交点をもつので、上の手続きにより、従来から知られているように<sup>1), 5)-7), 19)-21)</sup>、高々2個の3次元解釈が得られる。これは3直線のどれについても、どちらの端が視点に近い、あるいは遠いかわからないためである。どれかの直線でこれがわかれば、解は一意的である。

7. ま と め

本論文ではコニックに関する性質を「計算過程」の観点から再構成し、筆者が「計算射影幾何学」と呼ぶNベクトルによる定式化を与えた。そして、これを直交性の3次元解釈に適用し、解が容易に求まることを示した。

画像座標に基づく従来の解析<sup>1), 5)-7), 19)-21)</sup>では、直線の交点や2点を通る直線を計算するには連立1次方程式を解く必要があり、直線とコニックの交点を計算するには2次方程式を解く必要があり、直交性の3次元解釈の計算には三角関数、逆三角関数を含んだ非線形方程式を解く必要があった。それが計算射影幾何学

によれば、Nベクトルによるごく単純な代数演算のみで解ける。もちろん本質的には等価な計算を行っているのであるが、従来の複雑な計算部分が「極点」、「極線」、「共役点对」、「無限遠点」、「無限遠直線」などの射影幾何学的諸概念の定義およびそれらの諸性質の中に吸収されて、表面に出ないのである。比喩的にいえば、従来の理論が「アセンブリ言語」的に書かっていたのに対して、本論文では計算射影幾何学という「高級言語」を定義したために、それを用いれば簡潔に記述できるのである。

### 参 考 文 献

- 1) Barnard, S. T.: Choosing a Basis for Perceptual Space, *Comput. Vision Gr. Image Process.*, Vol. 29, pp. 1233-1251 (1985).
- 2) Bookstein, F. L.: Fitting Conic Sections to Scattered Data, *Comput. Gr. Image Process.*, Vol. 9, pp. 56-71 (1979).
- 3) Forsyth, D., Mundy, J. L., Zisserman, A., Coelho, C., Heller, A. and Rothwell, C.: Invariant Descriptors for 3-D Object Recognition and Pose, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, Vol. 13, pp. 971-991 (1991).
- 4) 岩崎利夫, 金谷健一: コニックあてはめの統計的偏差と不偏推定法, 情報処理学会研究報告, 92-CV-77 (1992. 3).
- 5) Kanade, T.: Recovery of Three-dimensional Shape of an Object from a Single View, *Artif. Intell.*, Vol. 17, pp. 409-461 (1981).
- 6) Kanatani, K.: Constraints on Length and Angle, *Comput. Vision Gr. Image Process.*, Vol. 41, pp. 28-42 (1988).
- 7) Kanatani, K.: *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin (1990).
- 8) 金谷健一: 画像理解/3次元認識の数理, 森北出版, 東京 (1990).
- 9) Kanatani, K.: Computational Projective Geometry, *CVGIP: Image Understanding*, Vol. 54, pp. 333-348 (1991).
- 10) Kanatani, K.: Hypothesizing and Testing Geometric Properties of Image Data, *CVGIP: Image Understanding*, Vol. 54, pp. 349-357 (1991).
- 11) 金谷健一, 川島孝夫: 画像データの幾何学的構造の仮説検定, 情報処理学会論文誌, Vol. 31, No. 6, pp. 879-886 (1990).
- 12) Kanatani, K. and Onodera, Y.: Anatomy of Camera Calibration Using Vanishing Points, *IEICE Trans.*, Vol. 74, No. 10, pp. 3369-3378 (1991).
- 13) 金谷健一, 浦沢康二: 消失点の推定と焦点距離の

キャリブレーションの統計的信頼性, 日本ロボット学会誌, Vol. 9, No. 7, pp. 813-820 (1991).

- 14) 劉 武, 金谷健一: コニックの3次元解釈とその応用, 情報処理学会研究報告, 92-CV-76 (1992. 1).
- 15) Porrill, J.: Fitting Ellipses and Predicting Confidence Envelopes Using a Bias Corrected Kalman Filter, *Image Vision Computing*, Vol. 8, pp. 37-41 (1990).
- 16) Safae-Rad, R., Tchoukanov, I., Benhabib, B. and Smith, K. C.: Accurate Parameter Estimation of Quadratic Curves from Grey-Level Images, *CVGIP: Image Understanding*, Vol. 54, pp. 259-274 (1991).
- 17) Sampson, P. D.: Fitting Conic Sections to "Very Scattered" Data: An Iterative Refinement of the Bookstein Algorithm, *Comput. Gr. Image Process.*, Vol. 18, pp. 97-108 (1982).
- 18) Semple, J. G. and Kneebone, G.: *Algebraic Projective Geometry*, Clarendon, Oxford (1952; reprinted 1979).
- 19) 尺長 健, 金子 博: 透視角度変換一角度情報からの形状情報復元一, 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. J 70 D, No. 10, pp. 1931-1940 (1987).
- 20) 尺長 健, 金子 博: 単眼視画像による3面頂点の配置推定一代数解と法線像仮説検定法一, 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. J 71 D, No. 9, pp. 1669-1681 (1988).
- 21) Shakunaga, T. and Kaneko, H.: Perspective Angle Transform: Principle of Shape from Angle, *Int. J. Comput. Vision*, Vol. 3, pp. 239-254 (1989).

### 付 録

#### 1. コニックの標準形

正則コニック

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} A & B & D/f \\ B & C & E/f \\ D/f & E/f & F/f^2 \end{pmatrix} \quad (28)$$

は  $xy$  画像座標系の回転と平行移動によって、次のように楕円, 放射線, 双曲線の標準形に変換される<sup>14)</sup>.

$\mathbf{Q}$  は定数倍しても同じコニックを表すから,  $\det \mathbf{Q} = -1$  となるように定数倍し,

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{(A+C) \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC-B^2)}}{2} \quad (29)$$

とおく.

1.  $AC-B^2 \neq 0$  なら,  $\lambda_1, \lambda_2$  は共に零でない.

$$\mu = \frac{f^2}{AC-B^2} \quad (30)$$

$$a = \sqrt{\left| \frac{\mu}{\lambda_1} \right|}, \quad b = \sqrt{\left| \frac{\mu}{\lambda_2} \right|} \quad (31)$$

と定義すると

(a)  $\mu\lambda_1 < 0, \mu\lambda_2 < 0$  であればコニック  $Q$  は実曲線を表さない。

(b)  $\mu\lambda_1 > 0, \mu\lambda_2 > 0$  であればコニック  $Q$  は楕円である。標準形は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (32)$$

(c)  $\mu\lambda_1, \mu\lambda_2$  が異符号ならコニック  $Q$  は双曲線である。標準形は

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (33)$$

ただし上側の符号は  $\mu\lambda_1 > 0, \mu\lambda_2 < 0$  の場合であり、下側の符号は  $\mu\lambda_1 < 0, \mu\lambda_2 > 0$  の場合である。

2.  $AC - B^2 = 0$  のとき、 $\lambda_1$  または  $\lambda_2$  が零になる。

このときコニック  $Q$  は放物線である。その標準形は

(a)  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$  のとき

$$y = \left| \frac{(A+C)\sqrt{A^2+B^2}}{2(BD-AE)} \right| x^2 \quad (34)$$

(b)  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$  のとき

$$y = \left| \frac{(A+C)\sqrt{B^2+C^2}}{2(BE-CD)} \right| x^2 \quad (35)$$

### 2. 円の3次元解釈

コニック  $Q$  ( $\det Q = -1$ ) が空間中の半径  $r$  の円の円の投影であるとし、その円を含む平面をその円の支持平面と呼ぶ。行列  $Q$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ( $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ ) とし、対応する単位固有ベクトルのつくる正規直交系を  $\{u_1, u_2, u_3\}$  とする。支持平面の単位法線ベクトルが次のように与えられる<sup>14)</sup>。

$$n = \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3}} u_2 + \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}} u_3 \quad (36)$$

視点から支持平面までの距離は次の式で与えられる<sup>14)</sup>。

$$d = \lambda_1^{3/2} r \quad (37)$$

各固有ベクトルの符号は任意であるが、 $\pm n$  は同じ面の向きを表すから解の個数は次のようになる。

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  なら2個

2.  $\lambda_1 = \lambda_2$  なら1個

### 3. 楕円の3次元解釈

コニック  $Q$  が面積  $S$ 、離心率  $e$  ( $0 < e < 1$ ) の楕円の投影であるとする。離心率  $e$  の代わりに

$$\tilde{e} = \frac{1}{1-e^2} (> 1) \quad (38)$$

とおく。視点から支持平面までの距離を  $d$  とすると、支持平面の単位法線ベクトル  $n$  は次の手順で計算される<sup>14)</sup>。

1.  $Q$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ( $\lambda_3 < 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ ) とする。対応する単位固有ベクトルのつくる正規直交系を  $\{u_1, u_2, u_3\}$  とする。
2. もし、

$$\sqrt{\frac{S}{\pi}} \frac{\lambda_1^{1/3}}{\tilde{e}^{3/4}} \leq d \leq \sqrt{\frac{S}{\pi}} \min\left(\tilde{e}^{3/4} \lambda_1^{1/3}, \frac{\lambda_2^{1/3}}{\tilde{e}^{3/4}}\right) \quad (39)$$

でなければ、コニック  $Q$  は面積  $S$ 、離心率  $e$  の楕円の投影ではありえない。これが満たされているとき、定数  $k$  と関数  $\phi(x)$  を次のように定義する。

$$k = \frac{1}{\tilde{e}^{1/2} \lambda_1} \left( \frac{\pi d^2}{S} \right)^{1/3} \quad (40)$$

$$\phi(x) = (x-1) \left( x - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \left( x - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \quad (41)$$

3. 関数  $\mu(x)$ ,  $x \neq 1$ ,  $\tilde{e}$  を次のように定義する。

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{A/(x-1)^2 + B/(x-\tilde{e})^2 + 1}} \quad (42)$$

$$A = \frac{\phi(k)}{(\tilde{e}-1)k^3}, \quad B = -\frac{\phi(\tilde{e}k)}{(\tilde{e}-1)k^3} \quad (43)$$

そして  $\mu(1) = \mu(\tilde{e}) = 0$  と拡張する。

4.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  なら、支持平面の単位法線ベクトル  $n$  は次のように与えられる。

$$n = \mu\left(\frac{1}{k}\right) u_1 + \mu\left(\frac{\lambda_2}{k\lambda_1}\right) u_3 + \mu\left(\frac{\lambda_3}{k\lambda_1}\right) u_3 \quad (44)$$

$\lambda_1 = \lambda_2$  なら、次のように与えられる。

$$n = \sqrt{1 - \left( \mu\left(\frac{\lambda_3}{k\lambda_1}\right) \right)^2} u_1 + \mu\left(\frac{\lambda_3}{k\lambda_1}\right) u_3 \quad (45)$$

各固有ベクトルの符号は任意であるが、 $\pm n$  は同じ面の向きを表すから解の個数は次のようになる。

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  のとき

(a)  $k \neq 1, 1/\tilde{e}, \lambda_2/\tilde{e}\lambda_1$  なら4個

(b)  $k = 1, 1/\tilde{e}, \lambda_2/\tilde{e}\lambda_1$  なら

i.  $\lambda_2/\lambda_1 \neq \tilde{e}$  であれば2個

ii.  $\lambda_2/\lambda_1 = \tilde{e}$  であれば1個

2.  $\lambda_1 = \lambda_2$  のとき無数

(平成4年2月4日受付)

(平成4年4月9日採録)

**金谷 健一 (正会員)**

1947年岡山県生. 1969-70年米国  
Case Western Reserve 大学留学.  
1972年東京大学工学部計数工学科  
(数理工学)卒業. 1979年同大学院博  
士課程修了. 工学博士. 同年群馬大  
学工学部情報工学科助手. 1983年同助教授. 1988年同  
教授. 米国 Maryland 大学, デンマーク Copenhagen  
大学, 英国 Oxford 大学客員研究員. 著書「線形代  
数」講談社, “Group-Theoretical Methods in Image  
Understanding,” Springer, 「画像理解」森北出版.  
1987年本学会論文賞.

---