# 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界

金 谷 健 一†

コンピュータビジョンやロボティクスに現れる幾何学的推定問題を「当てはめ問題」として一般的に定式化し，計算されるパラメータの共分散行列の「クラメル・ラオの下界」を導出する．次に「指数型当てはめ問題」と呼ぶクラスではパラメータの最尤推定量の共分散行列がその下界を第1近似において達成することを示し，最尤推定量の計算を非線形最適化問題に書き直す．最後に点列に対する直線およびコニックの当てはめ，動画像からの3次元解析に本理論を適用する．

# Optimal Estimation and Theoretical Accuracy Bound for Fitting Problems

KENICHI KANATANI †

Geometric estimation problems that frequently appear in computer vision and robotics applications are formulated as *fitting problems* in general terms, and the *Cramer-Rao lower bound* on the covariance matrix of the fitting parameter is derived. Then, the maximum likelihood estimator is proved to attain the bound in the first order if the problem belongs to a class called *exponential family,* and maximum likelihood estimation is expressed in the form of nonlinear optimization. Finally, our theory is applied to the problems of fitting a line and a conic to point data and reconstructing 3-D from motion images.

## 1. はじめに

画像やセンサデータから3次元環境のモデルを構築することはコンピュータビジョンやロボティクスの中心的な課題であるが，画像やセンサデータには誤差があり，これにどう対処するかが重要な問題である．基本的な手段は，誤差がないときに成立する関係式をパラメータを含んだ形で理論的に導出し，観測したデータからそのパラメータを推定することである．このような**幾何学的推定問題**は大別して二通りのタイプがある．

一つは**逆問題**である．ベクトル $\boldsymbol{u}$ を未知パラメータ，データを $\boldsymbol{a}_\alpha$, $\alpha=1,\cdots,N$ とする．データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ の真の値を $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ とするとき，これが

$$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha=\boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{u}) \tag{1}$$

の形に書けるとする．問題は，このように $\boldsymbol{u}$ に何らかの(一般には微分や積分を含む)変換 $\boldsymbol{F}_\alpha(\cdot)$ を施して得られた $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ から逆に変換前の $\boldsymbol{u}$ を計算することである．実際には $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ は未知であり，誤差の加わったデータ $\boldsymbol{a}_\alpha$ しか観測できない．この問題は統計学では「回帰」とも呼ばれる．コンピュータビジョンやロボティクスでは安定な数値解法として次のような最適化に帰着させる**正則化**と呼ばれる手法が知られている[19),20),25)]．

$$J[\boldsymbol{u}]=\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha\|\boldsymbol{a}_\alpha-\boldsymbol{F}_\alpha(\boldsymbol{u})\|^2+\lambda G(\boldsymbol{u})\to\min \tag{2}$$

ただし，$W_\alpha$ は適当な正の重みであり，$\|\cdot\|$ は何らかのノルムである．$G(\cdot)$ は解 $\boldsymbol{u}$ が $G(\boldsymbol{u})\approx 0$ であると期待される正値関数であり，$\lambda$ はそのような期待とデータから得られる情報との妥協の程度を調節する定数である．

もう一つのタイプは本論文で**当てはめ問題**と呼ぶものである．これは式(1)の代わりに

$$\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \boldsymbol{u})=0 \tag{3}$$

を要請する．ただし $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ は未知であり，データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ しか観測できない．コンピュータビジョンやロボティクスに現れるのはほとんどこのタイプである．例えば平面の位置を知るにはステレオやレンジファインダから得られた3次元データに1次式を当てはめればよいし，物体の3次元形状を知るには曲面の方程式を当てはめればよい．動画像から3次元運動や形状を復元するには，運動や形状を指定するパラメータと画像データとが満たすべき拘束条件を観測した画像データに当てはめればよい．

従来は「逆問題」とここにいう「当てはめ問題」と

† 群馬大学工学部情報工学科
Department of Computer Science, Gunma University

がはっきり区別されておらず，物理学や統計学でよく現れる[17]という理由で逆問題として扱われることが多かった．式(2)の正則化にはそれなりに確率・統計学や解析学の裏付けがあるが[25]，そのような背景のない当てはめ問題も類推によって「正則化」

$$J[\boldsymbol{u}]=\sum_{\alpha=1}^{N} W_\alpha\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}_\alpha,\boldsymbol{u})\|^2+\lambda G(\boldsymbol{u})\to\min \qquad (4)$$

が適用されることもしばしばである[19),20]．このような混乱の主たる原因は，技術者が理論を数学の教科書から形式的に転用する習慣があるため，および既存の教科書にはこの種の問題が取り上げられることが少ないためであろう．数学者や統計学者はコンピュータビジョンやロボティクスを想定していないから，これは当然のことでもある．本論文の目的は，当てはめ問題を支える確率・統計学および解析学の理論的な基礎付けを与えることである．

当てはめ問題は統計的推定問題ともみなせるが，本論文のような解析は統計学では関心が少ないようである．統計学は主として医学，生物学，農業，工業，社会，経済，政治などのように大きな不確定性をもつ分野で推定や検定を行うことを目的とするため，ランダム現象に対するモデルを仮定し，繰り返して観測したデータからそのパラメータを推定するという方法論が基本的である[16),24]．上述の諸分野では不確定性が大きいだけでなく，一般には**誤差は制御できない**という特徴がある．推定の精度を上げるには観測の繰り返し数を増すしかないが，これにはコストを伴う．したがって，精度が同等であれば必要なデータ数が少ない手法ほどよい．逆に言えば，データ数が増加すると精度が急速に向上することが望ましい．このことから推定の「漸近理論」が重要となる[24]．

一方，コンピュータビジョンやロボティックスのように精密な電子機器を用いる工学の諸分野では誤差(「ノイズ」と呼ぶ)は微小であるだけでなく，原理的には**制御できる**．データの誤差を減らすには高性能の機器を用いたり，環境(照明，温度，湿度，浮遊塵，振動，その他)を制御すればよい．しかしこれにはコストを伴う．したがって，精度が同等であれば許容ノイズが大きい手法ほどよい．逆に言えば，ノイズが減少すると精度が急速に向上することが望ましい．このことから，ノイズに関する第1近似の解析が重要となる．従来の統計学と視点が異なるもう一つの差異は，電子機器を用いれば繰り返し測定は容易であるが，ノイズの発生源(機器の解像度，照明，その他)が変わらない限り，測定結果が同一であることも多い点である．これは，一つの分布から一つのデータしか得られないことを意味し，統計学で基本とされる「同一分布に従う多数の独立なデータ」が得られない．

本論文はこのような状況のもとで，データに誤差がある以上どんな手法を用いても**達成できる精度には限界がある**ことを主張する．まず未知パラメータの不偏推定量の共分散行列の「クラメル・ラオの下界」を導出する．これはデータを確率変数とみなした「フィッシャー情報行列」によって表現される．そして「指数型当てはめ問題」と呼ぶクラスでは最尤推定量の共分散行列が第1近似において理論的な下界を達成することを示す．さらに最尤推定量の計算を当てはめパラメータのみの非線形最適化問題に書き直し，点列に対する直線およびコニックの当てはめ，2画像およびオプティカルフローからの3次元解析に本理論を適用する．

## 2. 当てはめ問題

### 2.1 定　　義

引数 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{R}^m$, $\boldsymbol{u}\in\mathcal{R}^n$ の連続微分可能なスカラ関数 $F^{(k)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})$, $k=1,\cdots,L$ が与えられているとする($\mathcal{R}^p$ は $p$ 次元実数空間)．引数 $\boldsymbol{a}$ の定義域は $m'$ 次元多様体 $\mathcal{A}\subset\mathcal{R}^m$，引数 $\boldsymbol{u}$ の定義域は $n'$ 次元多様体 $\mathcal{U}\subset\mathcal{R}^n$ であるとする．

**当てはめ問題**とは $L$ 個の方程式

$$F^{(k)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})=0,\quad k=1,\cdots,L \qquad (5)$$

が $\boldsymbol{a}$ の実現値(「データ」と呼ぶ)$\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$, $\alpha=1,\cdots,N$ に「当てはまる」ように，パラメータ $\boldsymbol{u}$ を計算することである．式(5)を**当てはめ方程式**と呼び，$\boldsymbol{u}$ を**当てはめパラメータ**と呼ぶ．各データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ は未知の真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に未知の誤差が加わったとみなし，各 $\alpha$ について独立で，$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ によって指定される確率密度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ をもつ確率変数であるとする．このとき次の問題を考える．

**【問題1】**　真の値 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\alpha=1,\cdots,N$ が未知のとき，

$$F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{u}})=0,\quad k=1,\cdots,L \qquad (6)$$

となる当てはめパラメータの値 $\bar{\boldsymbol{u}}$ をデータ $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ から推定せよ．

この問題では各データが別々の分布に従い，一つの分布からは一つのデータしか得られない．しかも推定したいパラメータは分布とは直接には関係がない．統計学でこれに最も近いのは**ネイマン・スコット問題**[18]であり，各データの分布がある共通のパラメータ(「構造パラメータ」)とデータごとに異なるパラメータ(「局外パラメータ」または「攪乱パラメータ」)とを含むとき，構造パラメータを推定する問題である．当てはめ問題では $\boldsymbol{u}$ が構造パラメータ，$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ が局外パラメータに相当するが，各データの確率密度は $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ のみによって特徴づけられ，$\boldsymbol{u}$ を含まないので，ネイマン・スコッ

ト問題のための概念や手法が直接には適用できない．

統計学では個々の「変量」の推定が課題であるが，コンピュータビジョンやロボティクスで推定したいのは「幾何学的な対象」である．このとき対象を指定するのに必要十分なパラメータをとる（例えば球面上の点を球面座標で表す）のでは幾何学的な意味が失われる．本論文ではパラメータの幾何学的な意味を直接的に表す全域的なデカルト座標系と，パラメータの制約を表す多様体を指定する．これに伴って制約空間に射影する「射影行列」や制約空間を値域とする「（ムーア・ペンローズの）一般逆行列」が必要となる．これも本理論の特徴である．

### 2.2 確率密度に関する仮定

確率密度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ に関して次の仮定を置く．ただし $\nabla_{\boldsymbol{a}} f=(\partial f/\partial a_1,\cdots,\partial f/\partial a_n)^\top$ と約束する（$\top$ は転置記号）．

**【仮定 1】** 確率密度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ は $\boldsymbol{a}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に関して任意の回数だけ連続微分可能であり，すべての $\boldsymbol{a}_\alpha\in\mathcal{A}$ に対して $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)>0$ である．また $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ の任意の式の $\boldsymbol{a}_\alpha$ に関する積分 $\int_{\mathcal{A}} da_\alpha$ は（積分が存在すれば）$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に関する微分 $\nabla_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$ と交換できる．

$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\in\mathcal{A}$ であるから，$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\notin\mathcal{A}$ に対しては $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ はどのように定義されていてもよい．そこで，多様体 $\mathcal{A}$ の $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ における接空間を $T_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}(\mathcal{A})\subset\mathcal{R}^m$ と書くとき，微小な任意のベクトル $\Delta\boldsymbol{a}_\alpha\in T_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}(\mathcal{A})^\perp$ の 1 次近似において $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha+\Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)=p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ が成り立つように拡張されているとする（記号 $\perp$ は直交補空間を表す）．直観的にいえば，多様体 $\mathcal{A}$ の「垂直方向には一定」ということであり，正確に書くと次のようになる．

**【仮定 2】** 各 $\alpha$ について $\nabla_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}p_\alpha\in T_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$．

### 2.3 当てはめ関数に関する仮定

式（5）の $L$ 個の当てはめ方程式は $\boldsymbol{a}$ の関数として代数的に従属でもよい．もし $r$ 個のみが独立であれば，実質的には $r$ 個の制約しかなく，多様体 $\mathcal{A}$ のある $(m'-r)$ 次元（すなわち**余次元** $r$ の）部分多様体に制約される[21]．$r$ を当てはめ方程式（5）の**ランク**と呼ぶ．以下，真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha=1,\cdots,N$ はその部分多様体の特異点にはないとする．正確に述べると次のようになる．

**【仮定 3】** 当てはめ方程式（5）は各 $\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha=1,\cdots,N$ の近傍で同一の余次元 $r$ をもつ $\mathcal{A}$ の部分多様体を定義する．

本論文では $L$ 次元ベクトル $(v^{(1)},\cdots,v^{(L)})^\top$ を $(v^{(k)})$ と略記する．データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ を $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha+\Delta\boldsymbol{a}_\alpha$ と書けば，$\Delta\boldsymbol{a}_\alpha$ の 1 次近似において

$$(F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha+\Delta\boldsymbol{a}_\alpha,\bar{\boldsymbol{u}}))=(\nabla_{\boldsymbol{a}}\bar{F}_\alpha^{(1)},\cdots,\nabla_{\boldsymbol{a}}\bar{F}_\alpha^{(L)})^\top\Delta\boldsymbol{a}_\alpha \tag{7}$$

である．ただし $\nabla_{\boldsymbol{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}$ は $\nabla_{\boldsymbol{a}}F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{u}})$ の略であり，$(\nabla_{\boldsymbol{a}}\bar{F}_\alpha^{(1)},\cdots,\nabla_{\boldsymbol{a}}\bar{F}_\alpha^{(L)})$ は $\nabla_{\boldsymbol{a}}\bar{F}_\alpha^{(1)},\cdots,\nabla_{\boldsymbol{a}}\bar{F}_\alpha^{(L)}$ をこの順に列とする $L$ 次元行列である．制約 $\boldsymbol{a}_\alpha\in\mathcal{A}$ より 1 次近似において $\Delta\boldsymbol{a}_\alpha\in T_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ であるから，式（7）は $T_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ から $L$ 次元空間 $\mathcal{R}^L$ のある線形部分空間 $\mathcal{L}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$ への線形写像を定義する．

接空間 $T_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}(\mathcal{A})\subset\mathcal{R}^m$ への射影行列を $\boldsymbol{P}^{\mathcal{A}}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$ とすると，任意の $\Delta\varepsilon\in\mathcal{R}^m$ に対して $\boldsymbol{P}^{\mathcal{A}}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}\Delta\varepsilon\in T_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ であるから，部分空間 $\mathcal{L}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$ の次元は $\{\boldsymbol{P}^{\mathcal{A}}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}\nabla_{\boldsymbol{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)}\}$, $k=1,\cdots,L$ のランク（線形独立なものの数）に等しい．したがって，$\mathcal{L}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$ の次元は高々 $r$ であるが，次のことを仮定する．

**【仮定 4】** すべての $\alpha$ に対して線形部分空間 $\mathcal{L}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$ の次元は当てはめ方程式のランク $r$ に等しい．

これは $L$ 個の当てはめ方程式のそれぞれが $\mathcal{A}$ の余次元 1 の部分多様体を定義し，それらが $\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha=1,\cdots,N$ において互いに**横断的**に交わることを表す[21]．例えば 3 次元空間で 2 枚の曲面が曲線や一点で接する場合が除外される．また $L$ 個の当てはめ方程式（5）を一つの方程式 $\sum_{k=1}^{L}F^{(k)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})^2=0$ に置き換えることは許されない．こうするとランクは $r$ であるが，すべての $\alpha$ に対して $\mathcal{L}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}=\{\boldsymbol{0}\}$ となるからである．部分空間 $\mathcal{L}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$ の次元が当てはめ方程式（5）のランク $r$ より小さいとき，対応するデータ $\boldsymbol{a}_\alpha$ を**特異データ**と呼び，それ以外のものを**通常データ**と呼ぶ．仮定 4 は特異データを当てはめのデータから除外することを述べている．

さらに当てはめパラメータ $\boldsymbol{u}$ のとり得る値には $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ 以外の制約が存在しない，すなわち式（6）において $\bar{\boldsymbol{u}}$ に任意に変分 $\Delta\boldsymbol{u}$ を加えても，

$$F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha+\Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{u}}+\Delta\boldsymbol{u})=0 \tag{8}$$

が $k=1,\cdots,L$ で成立する変分 $\Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha=1,\cdots,N$ が存在するとする．多様体 $\mathcal{U}$ の $\bar{\boldsymbol{u}}$ における接空間を $T_{\bar{\boldsymbol{u}}}(\mathcal{U})$ と書くと，制約 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ より 1 次近似において $\Delta\boldsymbol{u}\in T_{\bar{\boldsymbol{u}}}(\mathcal{U})$ である．同様に制約 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\in\mathcal{A}$ より 1 次近似において $\Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\in T_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ である．式（8）は 1 次近似において

$$(\nabla_{\boldsymbol{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)},\Delta\boldsymbol{u})=-(\nabla_{\boldsymbol{a}}\bar{F}_\alpha^{(k)},\Delta\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha) \tag{9}$$

と書ける．ただし $(\cdot,\cdot)$ はベクトルの内積であり，$\nabla_{\boldsymbol{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)}$ は $\nabla_{\boldsymbol{u}}F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha,\bar{\boldsymbol{u}})$ の略である．部分空間 $\mathcal{L}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$ の定義より，上述の仮定は次のように述べられる．

**【仮定 5】** 任意の $\Delta\boldsymbol{u}\in T_{\bar{\boldsymbol{u}}}(\mathcal{U})$ に対して $((\nabla_{\boldsymbol{u}}\bar{F}_\alpha^{(k)},\Delta\boldsymbol{u}))\in\mathcal{L}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$．

**注意 1** 線形部分空間 $\mathcal{L}_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}$ は多様体 $\mathcal{F}=\{(F^{(k)}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{u}}))\in\mathcal{R}^L|\boldsymbol{a}\in\mathcal{A}\}$ の $\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ における接空間としても定義できる．しかし，問題によっては $\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ が $\mathcal{A}$ から $\mathcal{R}^L$

への写像$(F^{(k)}(\cdot, \bar{\boldsymbol{u}}))$の特異点にあたり，式(7)で真の値$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$をデータ$\boldsymbol{a}_\alpha$で置き換えると，同様に定義される部分空間$\mathcal{L}_{a_\alpha}$の次元が$r$より大きくなることがある．そのような当てはめ問題は**退化**していると呼ぶ．

## 3. 不偏当てはめの精度の限界

### 3.1 フィッシャー情報行列とモーメント行列

$m$次元確率変数$\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha$を

$$\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha=\nabla_{\bar{a}_\alpha}\log p_\alpha \qquad (10)$$

と定義する．これは統計学では**スコア**と呼ばれている[16]．各$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$に関する(**フィッシャー**)**情報行列**を次のように定義する．ただし$E[\cdot]$は同時密度分布$\prod_{\alpha=1}^N p_\alpha$に関する期待値である(各$\alpha$ごとに$\boldsymbol{a}_\alpha$は独立であるから，$\boldsymbol{a}_\alpha$のみに関する量では$E[\cdot]$は$p_\alpha$に関する期待値に等しい)．

$$\boldsymbol{J}_\alpha=E[\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha^{\top}] \qquad (11)$$

仮定2より$\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha\in T_{\bar{a}_\alpha}(\mathcal{A})$であるが，$a_\alpha$が$\mathcal{A}$のすべてにわたるとき，$\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha$は接空間$T_{\bar{a}_\alpha}(\mathcal{A})$のあらゆる方向をとり得るとする．このとき確率密度$p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$は$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$において**正則**であると呼ぶ．正確に書くと次のようになる．

**【仮定6】** 情報行列$\boldsymbol{J}_\alpha$は$T_{\bar{a}_\alpha}(\mathcal{A})$を値域とする$m$次元半正値対称行列である．

行列の(**ムーア・ペンローズ**)**一般逆行列**を$(\cdot)^-$で表す．また$(kl)$要素が$\bar{W}_\alpha^{(kl)}$である$L$次元行列を$(\bar{W}_\alpha^{(kl)})$と略記し，

$$(\bar{W}_\alpha^{(kl)})=((\nabla_a\bar{F}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{J}_\alpha^-\nabla_a\bar{F}_\alpha^{(l)}))^- \qquad (12)$$

と定義する．右辺は$(kl)$要素が$(\nabla_a\bar{F}_\alpha^{(k)}, \boldsymbol{J}_\alpha^-\nabla_a\bar{F}_\alpha^{(l)})$の$L$次元行列の一般逆行列の略記である．$n$次元行列$\boldsymbol{M}$を

$$\boldsymbol{M}=\sum_{\alpha=1}^N\sum_{k,l=1}^L \bar{W}_\alpha^{(kl)}(\boldsymbol{P}_{\bar{u}}^U\nabla_u\bar{F}_\alpha^{(k)})(\boldsymbol{P}_{\bar{u}}^U\nabla_u\bar{F}_\alpha^{(l)})^{\mathrm{T}} \quad (13)$$

と定義し，**モーメント行列**を呼ぶ．$\boldsymbol{P}_u^U$は多様体$\mathcal{U}$の$\bar{\boldsymbol{u}}$における接空間$T_{\bar{u}}(\mathcal{U})\subset\mathcal{R}^n$への射影行列である．

データ$\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$は十分多数あり，その真の値$\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$は$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\in\mathcal{A}$であること以外には特別な制約はなく，「一般的に」分布しているとする．すなわちデータが局在して当てはめに不定性が生じることはないとする．正確に書くと，次のようになる．

**【仮定7】** モーメント行列$\boldsymbol{M}$は$T_{\bar{u}}(\mathcal{U})$を値域とする$n$次元半正値対称行列である．

### 3.2 当てはめ精度に関する主定理

当てはめパラメータ$\boldsymbol{u}$のある**不偏推定量**を$\hat{\boldsymbol{u}}=\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_N)$とする．これは$\boldsymbol{u}$の満たすべき制約を満たしていることを要求する．

**【仮定8】** 任意の$\boldsymbol{a}_\alpha\in\mathcal{A}$, $\alpha=1,\cdots,N$に対して$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_N)\in\mathcal{U}$.

推定量は一般にはその期待値が真の値に一致するとき「不偏」であるが，多様体$\mathcal{U}$が「曲がっていれば」$\hat{\boldsymbol{u}}$の期待値が$\mathcal{U}$にあるとは限らない．そこで不偏性を次のように定義する．

$$\boldsymbol{P}_{\bar{u}}^{\mathcal{U}}E[\hat{\boldsymbol{u}}-\bar{\boldsymbol{u}}]=0 \qquad (14)$$

そして$\hat{\boldsymbol{u}}$の共分散行列を次の行列と同一視する．

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}]=\boldsymbol{P}_{\bar{u}}^{\mathcal{U}}E[(\hat{\boldsymbol{u}}-\bar{\boldsymbol{u}})(\hat{\boldsymbol{u}}-\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{P}_{\bar{u}}^{\mathcal{U}} \qquad (15)$$

以上の前提のもとで次の定理が成立する[12]．ただし対称行列$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$に対して$\boldsymbol{A}\succeq\boldsymbol{B}$とは$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$が半正値であることと約束する．

**【定理1】**

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}]\succeq\boldsymbol{M}^- \qquad (16)$$

問題が$\boldsymbol{u}$とそれ以外の局外パラメータとで指定される分布からのサンプルから$\boldsymbol{u}$を推定することであれば，$V[\hat{\boldsymbol{u}}]$の下界が$V[\hat{\boldsymbol{u}}]\succeq\boldsymbol{J}_e^{-1}$の形で表されることが統計学で知られている．ここに$\boldsymbol{J}_e$は**有効情報行列**と呼ばれる行列であり，$\boldsymbol{u}$と局外パラメータに関する情報行列から局外パラメータの影響を射影によって消去して得られる[1]．これと比較すると，問題の構造は異なるが，当てはめ問題では式(13)のモーメント行列$\boldsymbol{M}$が有効情報行列に相当する．定理1の下界は通常の統計的推論の**クラメル・ラオの下界**に相当するので，これも**クラメル・ラオ**の下界と呼ぶ．

すべてのデータが同じ分布形をもてば，式(12)で定まる$\bar{W}_\alpha^{(kl)}$は$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$の関数として$\bar{W}^{(kl)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$と書ける．各データの真の値$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$が有界集合$\tilde{\mathcal{A}}\subset\mathcal{A}$からデータ密度$P(\boldsymbol{a})$(データ数は$N=\int_{\tilde{A}}P(\boldsymbol{a})d\boldsymbol{a}$)により独立に選ばれるとし，

$$\boldsymbol{M}_\infty=\int_{\tilde{A}}\sum_{k,l=1}^L \bar{W}^{(kl)}(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{P}_{\bar{u}}^{\mathcal{U}}\nabla_u F^{(k)}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{u}}))(\boldsymbol{P}_u^{\mathcal{U}}\nabla_u F^{(l)}(\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{u}}))^{\top}P(\boldsymbol{a})d\boldsymbol{a} \qquad (17)$$

と置けば，$N$が十分大きいときはクラメル・ラオの下界が$\boldsymbol{M}_\infty^-$で近似できる．これをクラメル・ラオの下界の**漸近近似**と呼ぶ．

## 4. 当てはめ問題の最尤推定

当てはめ問題1の**最尤推定**とはデータ$\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$が与えられたとき，それを同時確率密度に代入した$\prod_{\alpha=1}^N p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha;\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$を$\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$の関数とみた**尤度**を最大にするように$\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\boldsymbol{u}$を選ぶことである．その解$\{\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$をそれぞれ$\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\boldsymbol{u}$の**最尤推定量**と呼ぶ．

「変数」と特定の「値」を区別するために$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$を真の期待値とし，それを未知変数とみたものを$\boldsymbol{x}_\alpha$と書く．最尤推定量を求めるには，尤度の対数をとって符号を変えたものの$\boldsymbol{x}_\alpha\in\mathcal{A}$, $\alpha=1,\cdots,N$, $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$に関する最

小化

$$J=-\sum_{\alpha=1}^{N}\log p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha\,;\,\boldsymbol{x}_\alpha)\to\min \tag{18}$$

を次の制約条件のもとで実行すればよい．

$$F^{(k)}(\boldsymbol{x}_\alpha,\boldsymbol{u})=0 \tag{19}$$

$m$ 次元行列 $\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha$ を次のように定義する．

$$\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha=-\nabla^2_{x_\alpha}\log p_\alpha|_{x_\alpha=\bar{a}_\alpha} \tag{20}$$

ただし，ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha$ の第 $i$ 成分を $x_{\alpha(i)}$ とするとき，$\nabla^2_{x_\alpha}f$ はその $(ij)$ 要素が $\partial^2 f/\partial x_{\alpha(i)}\partial x_{\alpha(j)}$ の行列と約束する．最尤推定量 $\{\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\hat{\boldsymbol{u}}$ はそれぞれの真の値 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\bar{\boldsymbol{u}}$ の近くにあるとして，$\boldsymbol{x}_\alpha=\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha+\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{u}}+\Delta\boldsymbol{u}$ と置く．式(18)の $J$ を真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ の近傍で展開すると次のようになる．

$$J=\bar{c}-\sum_{\alpha=1}^{N}(\bar{\boldsymbol{l}}_\alpha,\Delta\boldsymbol{x}_\alpha)+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}(\Delta\boldsymbol{x}_\alpha,\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha\Delta\boldsymbol{x}_\alpha)+\cdots \tag{21}$$

ただし $\bar{c}$ は $J$ に $\boldsymbol{x}_\alpha=\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ を代入した値であり，…は $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ の3次以上の項を表す．

仮定2より行列 $\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha$ のランクは $m'$ を越えないが，さらに次の仮定を置く．これは $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ の近傍で $J$ を最小にする $\boldsymbol{x}_\alpha$ の存在と一意性とを保証するものである．

**【仮定9】** 任意の $\boldsymbol{a}_\alpha\in\mathcal{A}$ に対して行列 $\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha$ は $T_{\bar{a}_\alpha}(\mathcal{A})$ を値域とする $m$ 次元半正値対称行列である．

式(19)から，$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ の制約が1次近似において

$$(\nabla_a\bar{F}_\alpha^{(k)},\Delta\boldsymbol{x}_\alpha)=-(\nabla_u\bar{F}_\alpha^{(k)},\Delta\boldsymbol{u}) \tag{22}$$

と書ける．また制約 $\boldsymbol{x}_\alpha\in\mathcal{A}$ より $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ は1次近似において制約 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha\in T_{\bar{a}_\alpha}(\mathcal{A})$ を受ける．$\Delta\boldsymbol{u}$ を固定し，式(21)の $J$ を最小にする $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha$ を求め，それを式(21)に代入すると $J$ が $\Delta\boldsymbol{u}$ の関数となる．最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ はそれを最小にする $\Delta\boldsymbol{u}$ を用いて，$\hat{\boldsymbol{u}}=\bar{\boldsymbol{u}}+\Delta\boldsymbol{u}$ と表せる．次の特殊な場合を考える．

**【仮定10】** 行列 $\bar{\boldsymbol{L}}_\alpha$ はデータ $\boldsymbol{a}_\alpha$ に依存しない．

これは確率密度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha\,;\,\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ が次の形に表されることを意味する．

$$p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha\,;\,\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)=C_\alpha(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)\exp[(\boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha),\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)+g_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha)] \tag{23}$$

ここに $\boldsymbol{f}_\alpha(\boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{a}\in\mathcal{R}^m$ の $m$ 次元関数，$C_\alpha(\boldsymbol{a})$, $g_\alpha(\boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{a}\in\mathcal{R}^m$ のスカラ関数である．これは**指数型分布**と呼ばれ，通常現れる分布の多くはこの型である[1),16),24)]．このとき問題1を**指数型当てはめ問題**と呼ぶ．代表的な例はデータ $\boldsymbol{a}_\alpha$ が正規分布に従う場合である．

統計学ではクラメル・ラオの下界を達成する推定量を**有効推定量**と呼び，データ数が増加するとき真の値に近づく推定量を**一致推定量**と呼ぶ．これにならって定理1の下界を達成する推定量を**有効推定量**と呼ぶと，指数型当てはめ問題では次の結論が得られる[24)]．

**【命題1】** 指数型当てはめ問題の最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ は第1近似において不偏推定量である．

**【命題2】** 指数型当てはめ問題の最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ は第1近似において有効推定量である．

**【命題3】** データの真の値 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$, $\alpha=1,\cdots,N$ がすべて $\mathcal{A}$ の有界集合に含まれていれば，指数型当てはめ問題の最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ は第1近似において一致推定量である．

**注意2** 命題1，2，3はすべて関数 $J$ を引数の真の値の周りで2次関数に近似し，制約(19)を線形近似して得られた結果である．命題1，2，3に「第1近似において」とあるのはこの意味である．

## 5．最尤推定量の計算

固定した $\boldsymbol{u}$ に対して制約(19)のもとに最小化(18)の解 $\boldsymbol{x}_\alpha$ を求め，それを $J$ に代入した残差を $J[\boldsymbol{u}]$ と置いて，$\boldsymbol{u}$ のみについての最小化問題を導く．ここで，尤度 $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha\,;\,\boldsymbol{x}_\alpha)$ が $\boldsymbol{x}_\alpha=\boldsymbol{a}_\alpha$ で最大値をとるとする．これは，データ $\boldsymbol{a}_\alpha$ 以外に他の情報が何も与えられなければ，$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ の最尤推定量は $\boldsymbol{a}_\alpha$ 自身であることを意味する．具体的に必要な条件は次の仮定である．

**【仮定11】** $\nabla_{x_\alpha}p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha\,;\,\boldsymbol{x}_\alpha)|_{x_\alpha=a_\alpha}=0$

例えば原点0で最大値をとるスカラ関数 $f(\cdot)$ により，確率密度が $p_\alpha(\boldsymbol{a}_\alpha\,;\,\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)=f(\boldsymbol{a}_\alpha-\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)$ と表されていれば仮定11が成立する．特に正規分布ではこれが成立する．

$m$ 次元行列 $\boldsymbol{L}_\alpha$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{L}_\alpha=-\nabla^2_{x_\alpha}\log p_\alpha|_{x_\alpha=a_\alpha} \tag{24}$$

仮定9は行列 $\boldsymbol{L}_\alpha$ についても成立するとする．これは $\boldsymbol{a}_\alpha$ の近傍で $J$ を最小にする $\boldsymbol{x}_\alpha$ の存在と一意性とを保証するものである．

**【仮定12】** 任意の $\boldsymbol{a}_\alpha\in\mathcal{A}$ に対して行列 $\boldsymbol{L}_\alpha$ は $T_{\bar{a}_\alpha}(\mathcal{A})$ を値域とする $m$ 次元半正値対称行列である．

このとき次の結論が得られる[13)]．

**【命題4】** ベクトル $\boldsymbol{u}$ の最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ は制約 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$ のもとでの次の非線形最適化問題の解として与えられる．

$$J[\boldsymbol{u}]=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{L}W_\alpha^{(kl)}F_\alpha^{(k)}F_\alpha^{(l)}\to\min \tag{25}$$

$$(W_\alpha^{(kl)})=((\nabla_a F_\alpha^{(k)},\boldsymbol{L}_\alpha^{-}\nabla_a F_\alpha^{(l)}))_r^{-} \tag{26}$$

式(26)は $(\nabla_a F_\alpha^{(k)},\boldsymbol{L}_\alpha^{-}\nabla_a F_\alpha^{(l)})$ を $(kl)$ 要素とする $L$ 次元行列のランクを $r$ に強制した(スペクトル分解[4),5)]において大きい順に $r$ 個の固有値のみを残し，残りの固有値を0に置き換えて計算した)一般逆行列の $(kl)$ 要素が $W_\alpha^{(kl)}$ であることを表す．(ランクを $r$

に強制した)一般逆行列を用いるのは,当てはめ問題が退化しているときの計算上の問題を防ぐためである[13].

## 6. 直線当てはめ

平面上の点列 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha=1, \cdots, N$ に直線 $Ax+By+C=0$ を当てはめる問題を考える. $(x_\alpha, y_\alpha)$ は各 $\alpha$ ごとに独立で,期待値 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ をもつ確率変数とする. 直線当てはめは次の推定問題として定式化できる.

**【問題 2】** $\alpha=1, \cdots, N$ に対して

$$A\bar{x}_\alpha+B\bar{y}_\alpha+C=0 \tag{27}$$

が成立する定数 $A, B, C$ をデータ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ から推定せよ.

式(27)のランクは1である. 定数倍の不定性を除くために $A^2+B^2+C^2=1$ と正規化する. 3次元ベクトル $\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{n}$ を

$$\boldsymbol{x}_\alpha=\begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{n}=\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{28}$$

と定義する. $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha=E[\boldsymbol{x}_\alpha]$ とし, $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ に関する情報行列を $\boldsymbol{J}_\alpha$ とする. 定理1よりクラメル・ラオ下界が次のように与えられる.

$$V[\hat{\boldsymbol{n}}]\geq\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{J}_\alpha^- \boldsymbol{n})}\right)^- \tag{29}$$

例えば $x_\alpha=\bar{x}_\alpha+\Delta x_\alpha$, $y_\alpha=\bar{y}_\alpha+\Delta y_\alpha$ として, 誤差 $(\Delta x_\alpha, \Delta y_\alpha)$ の分布がどの点についても同一かつ等方的であり,平均 $(0, 0)$, $E[\Delta x_\alpha^2]=E[\Delta y_\alpha^2]=\epsilon^2$, $E[\Delta x_\alpha y_\alpha]=0$ の正規分布に従うと, 式(29)の右辺は次のようになる.

$$\frac{\epsilon^2}{1+d^2}\begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha^2 & \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha\bar{x}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha^2 & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha \\ \sum_{\alpha=1}^N \bar{x}_\alpha & \sum_{\alpha=1}^N \bar{y}_\alpha & N \end{pmatrix}^- \tag{30}$$

ただし $d$ は直線 $Ax+By+C=0$ の座標原点からの距離である.

命題4より $\boldsymbol{n}$ の最尤推定量は次の最小化によって求まる.

$$J[\boldsymbol{n}]=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{n}, V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{n})}\to\min \tag{31}$$

これは非線形最適化問題であるが,「くりこみ法」によって探索によらずに計算できる[8),10)]. 誤差が同一かつ等方的であれば式(31)は「最小二乗法」$\sum_{\alpha=1}^N(Ax_\alpha+By_\alpha+C)^2/(A^2+B^2)\to\min$ に帰着する.

データ点数が大きいとき, 式(17)の漸近近似 $\boldsymbol{M}_\infty^-$ を計算することによって, 画素の密な列として定義されるエッジへの直線当てはめの精度を定量的に表現することができる[5),6),10)].

## 7. コニック当てはめ

平面上の点列 $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$, $\alpha=1, \cdots, N$ に2次曲線(**コニック**) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2(Dx+Ey)+F=0$ を当てはめる問題を考える. $(x_\alpha, y_\alpha)$ は各 $\alpha$ ごとに独立で, 期待値 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ をもつ確率変数とする. コニック当てはめは次の推定問題として定式化できる.

**【問題 3】** $\alpha=1, \cdots, N$ に対して

$$A\bar{x}_\alpha^2+2B\bar{x}_\alpha\bar{y}_\alpha+C\bar{y}_\alpha^2+2(D\bar{x}_\alpha+E\bar{y}_\alpha)+F=0 \tag{32}$$

が成立する定数 $A, B, C, D, E, F$ をデータ $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ から推定せよ.

式(32)のランクは1である. 定数倍の不定性を除くために $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2=1$ と正規化する. 直線当てはめの場合と同様に $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$ を定義し, $\boldsymbol{X}_\alpha=\boldsymbol{x}_\alpha\boldsymbol{x}_\alpha^\top$, $\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha^\top$ と置く. また行列 $\boldsymbol{Q}$ を次のように定義する.

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \tag{33}$$

行列 $\boldsymbol{Q}$ の不偏推定量 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ の**共分散テンソル**を

$$\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{Q}}]=E[\mathcal{P}_Q(\hat{\boldsymbol{Q}}-\boldsymbol{Q})\otimes\mathcal{P}_Q(\hat{\boldsymbol{Q}}-\boldsymbol{Q}))] \tag{34}$$

と定義する. $\mathcal{P}_Q$ は $(ijkl)$ 要素が $\delta_{ik}\delta_{jl}-Q_{ij}Q_{kl}$ の射影テンソルであり, $\delta_{ij}$ は**クロネッカのデルタ**である($i=j$ のとき1, それ以外は0をとる). 定理1よりクラメル・ラオの下界が次のように与えられる.

$$\mathcal{V}[\hat{\boldsymbol{Q}}]\succeq\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha\otimes\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha}{(\boldsymbol{Q}\,;\,\mathcal{J}_\alpha^-\boldsymbol{Q})}\right)^- \tag{35}$$

ここに $\mathcal{J}_\alpha$ は $\bar{\boldsymbol{X}}_\alpha$ に関する(**フィッシャー**)**情報テンソル**であり, 3次元行列 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(B_{ij})$ の内積を $(\boldsymbol{A}\,;\,\boldsymbol{B})=\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}B_{ij}$ と定義する. 上式は定理1において, ベクトル代数を内積 $(\cdot\,;\,\cdot)$ による行列の線形空間に拡張したものである[5)].

$\boldsymbol{x}_\alpha$ が正規分布に従い, 共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$ をもつとする. 誤差は小さいと仮定し, 独立な誤差の積を正規分布で近似すると,命題4より $\boldsymbol{Q}$ の最尤推定量は次の最小化によって求まる.

$$J[\boldsymbol{Q}]=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{Q}_\alpha)^2}{2(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{Q}V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}x_\alpha)+(V[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{Q}\,;\,\boldsymbol{Q}V[\boldsymbol{x}_\alpha])}\to\min \tag{36}$$

これは非線形最適化問題であるが,「くりこみ法」によって探索によらずに計算できる[9)]. 直線およびコニックだけではなく, 平面や多項式曲線, 多項式曲線の当てはめ, ステレオによる3次元復元についても本論文

の理論が同様に適用できる．

## 8．一般の3次元運動解析

空間中の $N$ 個の特徴点 $\{P_\alpha\}$, $\alpha=1, \cdots, N$ を2台のカメラで観測したとき，$P_\alpha$ の画像座標がそれぞれ $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$, $(\bar{x}'_\alpha, \bar{y}'_\alpha)$ であるとする（単位は画素）．3次元ベクトル $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ を

$$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha=\begin{pmatrix}\bar{x}_\alpha/f\\ \bar{y}_\alpha/f\\ 1\end{pmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha=\begin{pmatrix}\bar{x}'_\alpha/f'\\ \bar{y}'_\alpha/f'\\ 1\end{pmatrix} \tag{37}$$

と定義する．$f, f'$ はそれぞれのカメラの焦点距離である（単位は画素）．第2のカメラの位置は第1のカメラに並進 $\boldsymbol{h}$, 回転 $\boldsymbol{R}$ を施して得られた位置にあるとする．$\{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\}$ を**運動パラメータ**と呼ぶ．$\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ は各点ごとに独立で，期待値 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ をもつ確率変数とみなせば，3次元運動解析は次のような当てはめ問題とみなせる[4),5),15),27),28)]．

**【問題4】**　画像上の真の位置が**エピ極線方程式**

$$|\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha|=0 \tag{38}$$

を満たすように運動パラメータ $\{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\}$ をデータ $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$, $\alpha=1, \cdots, N$ から推定せよ．

式(38)の左辺はベクトルのスカラ三重積である．式(38)のランクは1である．運動パラメータ $\{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\}$ の不偏推定量 $\{\hat{\boldsymbol{h}}, \hat{\boldsymbol{R}}\}$ が得られたとする．ただしスケールの不定性を除くために $\|\boldsymbol{h}\|=1$ と正規化する．相対回転 $\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^\top$ も回転行列であるから，これはある回転軸 $\boldsymbol{l}$（単位ベクトル）の周りの正の回転角 $\Delta\Omega$ の回転である．$\boldsymbol{h}$ に垂直な平面への射影行列を $\boldsymbol{P}_h=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{h}\boldsymbol{h}^\top$ とし，推定量 $\{\hat{\boldsymbol{h}}, \hat{\boldsymbol{R}}\}$ の共分散行列を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
V[\hat{\boldsymbol{h}}]&=E[(\boldsymbol{P}_h(\hat{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{h}))(\boldsymbol{P}_h(\hat{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{h}))^\top]\\
V[\hat{\boldsymbol{R}}]&=E[(\Delta\Omega)^2\boldsymbol{l}\boldsymbol{l}^\top]\\
V[\hat{\boldsymbol{h}}, \hat{\boldsymbol{R}}]&=V[\hat{\boldsymbol{R}}, \hat{\boldsymbol{h}}]^\top=E[(\boldsymbol{P}_h(\hat{\boldsymbol{h}}-\boldsymbol{h}))(\Delta\Omega\boldsymbol{l})^\top]
\end{aligned} \tag{39}$$

$\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ が正規分布に従い，それぞれ共分散行列 $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$, $V[\boldsymbol{x}'_\alpha]$ をもつとする．誤差は小さいと仮定し，独立な誤差の積を正規分布で近似すると，定理1よりクラメル・ラオの下界が次のように与えられる．ただし3次元ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_i)$ と3次元行列 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})$ との積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}$ を $(ij)$ 要素が $\sum_{k,l=1}^{3}\varepsilon_{ikl}a_kA_{lj}$ の行列と定義する（$\varepsilon_{ijk}$ は**エディングトンのイプシロン**であり，$(ijk)$ が(123)の偶順列のとき1，奇順列のとき $-1$，その他の場合に0をとる）．

$$\begin{pmatrix}V[\hat{\boldsymbol{h}}] & V[\hat{\boldsymbol{h}}, \hat{\boldsymbol{R}}]\\ V[\hat{\boldsymbol{R}}, \hat{\boldsymbol{h}}] & V[\hat{\boldsymbol{R}}]\end{pmatrix}
\succ\begin{pmatrix}\sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha^\top & \sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha^\top\\ \sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha^\top & \sum_{\alpha=1}^{N}\bar{W}_\alpha\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha^\top\end{pmatrix}^{-} \tag{40}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha=\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\times\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha \tag{41}$$

$$\bar{\boldsymbol{b}}_\alpha=(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha)\boldsymbol{h}-(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha)\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
\bar{W}_\alpha=1/((&\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha, V[\boldsymbol{x}_\alpha](\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha)\\
&+(\boldsymbol{h}\times\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{R}V[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{h}\times\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)\\
&+(V[\boldsymbol{x}_\alpha](\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R});(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{R})V[\boldsymbol{x}'_\alpha]))
\end{aligned} \tag{43}$$

命題4より $\{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\}$ の最尤推定量は次の最小化によって求まる．

$$J[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}]=\sum_{\alpha=1}^{N}W_\alpha|\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha|^2\to\min \tag{44}$$

ただし，$W_\alpha$ は式(43)で $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ をそれぞれ $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ に置き換えたものである．式(44)は非線形最適化問題であるが，「くりこみ法」によって探索によらずに計算できる[11)]．

3次元運動解析を（局外パラメータを含む）統計的推定とみなして（通常の）クラメル・ラオの下界を計算しようとする試みはあるが[27),28)]，簡単な形で表現されてはいない．本論文で式(40)のような簡単な表現が得られたのは（i）問題を従来の統計的推定に帰着させるのではなく，本論文に示した形の「当てはめ問題」とみなし，（ii）3次元運動解析の特殊性を捨象し，その本質を抽象化したためである．この観点の萌芽はすでに文献26)に見られるが，ほとんど注目されなかった．本論文はその完成版とみなせる．式(44)と実質的に等価な最適化はいろいろな形で提起されているが[5),11),27),28)]，本論文はそれに統計的な裏付けを与えるものである．

## 9．オプティカルフローの解析

空間中のある特徴点をカメラで観測した画像座標を $(x, y)$ とする（単位は画素）．カメラが並進速度 $\boldsymbol{v}$, 角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の瞬間運動を行うときの画像座標 $(x, y)$ の変化速度（**オプティカルフロー**）を $(\bar{\dot{x}}, \bar{\dot{y}})$ とする．カメラの焦点距離を $f$（単位は画素）とし，

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x/f\\ y/f\\ 1\end{pmatrix},\quad \bar{\dot{\boldsymbol{x}}}=\begin{pmatrix}\bar{\dot{x}}/f\\ \bar{\dot{y}}/f\\ 0\end{pmatrix} \tag{45}$$

と置く．$\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ を**（瞬間）運動パラメータ**と呼ぶ．オプティカルフローに誤差があり，実際に観測される値 $\dot{\boldsymbol{x}}$ は各点ごとに独立で，期待値 $\bar{\dot{\boldsymbol{x}}}$ をもつ確率変数であるとみなせば，オプティカルフロー解析は次のような当てはめ問題とみなせる[5),7)]．

**【問題5】**　画像上の真のフローが**エピ極線方程式**

$$|\boldsymbol{x}, \bar{\dot{\boldsymbol{x}}}, \boldsymbol{v}|+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})=0 \tag{46}$$

を満たすように運動パラメータ $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ をデータフロー $\dot{\boldsymbol{x}}$ から推定せよ．

式(46)のランクは1である．$\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ の不偏推定量

$\{\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}\}$が得られたとする．ただしスケールの不定性を除くために$\|\boldsymbol{v}\|=1$と正規化する．$\boldsymbol{v}$に垂直な平面への射影行列を$\boldsymbol{P}_v=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^\top$とし，推定量$\{\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}\}$の共分散行列を次のように定義する．

$$V[\hat{\boldsymbol{v}}]=E[(\boldsymbol{P}_v(\hat{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{P}_v(\hat{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}))^\top]$$
$$V[\hat{\boldsymbol{\omega}}]=E[(\hat{\boldsymbol{\omega}}-\boldsymbol{\omega})(\hat{\boldsymbol{\omega}}-\boldsymbol{\omega})^\top]$$
$$V[\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}]=V[\hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{v}}]^\top=E[(\boldsymbol{P}_v(\hat{\boldsymbol{v}}-\boldsymbol{v}))(\hat{\boldsymbol{\omega}}-\boldsymbol{\omega})^\top] \tag{47}$$

誤差が正規分布に従い，$\dot{\boldsymbol{x}}$が共分散行列$V[\dot{\boldsymbol{x}}]$をもてば，定理1よりクラメル・ラオの下界は次のように与えられる．

$$\begin{pmatrix} V[\hat{\boldsymbol{v}}] & V[\hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}] \\ V[\hat{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{v}}] & V[\hat{\boldsymbol{\omega}}] \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} \int_S W(\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{a}}^\top dxdy & \int_S W(\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{b}}^\top dxdy \\ \int_S W(\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{a}}^\top dxdy & \int_S W(\boldsymbol{x})\bar{\boldsymbol{b}}\bar{\boldsymbol{b}}^\top dxdy \end{pmatrix}^- \tag{48}$$

ただし，$\int_S dxdy$はオプティカルフローの定義されているすべての画素にわたる総和を表し，$\bar{\boldsymbol{a}}$, $\bar{\boldsymbol{b}}$, $W(\boldsymbol{x})$を次のように定義する．

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{x}\times\bar{\dot{\boldsymbol{x}}}+\|\boldsymbol{x}\|^2\boldsymbol{\omega}-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{x} \tag{49}$$
$$\bar{\boldsymbol{b}}=\|\boldsymbol{x}\|^2\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\boldsymbol{x} \tag{50}$$
$$W(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}, V[\dot{\boldsymbol{x}}](\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}))} \tag{51}$$

命題4より$\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}\}$の最尤推定量は次の最小化によって求まる．

$$J[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\omega}]=\int_S W(\boldsymbol{x})(|\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{v}|+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}))^2 dxdy \to \min \tag{52}$$

これは非線形最適化問題であるが，「くりこみ法」によって探索によらずに計算できる[7]．ただし，カメラの並進方向$\boldsymbol{v}$にある点$\boldsymbol{x}_{foe}$(**出現点**)のフローは「特異データ」であり，$W(\boldsymbol{x}_{foe})=\infty$になるので，推定した$\boldsymbol{v}$の方向およびその近傍にある点$\boldsymbol{x}$は最適化の過程で除去する必要がある．

出現点が特異点になることは既に指摘されていたが[2]，アルゴリズムに起因する特異現象とみなされることが多く，その数学的な構造までは考察されていなかった．オプティカルフロー解析が有限運動解析と異なる点は，それが(局外パラメータを含む)逆問題の形にも書けることである．したがって(通常の)クラメル・ラオの下界を計算することもできるが[29]，式(48)のような簡潔な結果は得られていない．式(52)に相当する最適化もさまざまな形で提起されている[3),5),7),22),23)]．本論文はオプティカルフローに関する特殊性を捨象し，その本質を抽象して数学的な基礎を与えるものである．

## 10. まとめ

コンピュータビジョンやロボティクスに現れる幾何学的推定問題ではデータに誤差がある以上，達成できる精度には限界がある．本論文では「当てはめ問題」を一般的に定式化し，未知パラメータの不偏推定量の共分散行列の「クラメル・ラオの下界」を導出した．そして「指数型当てはめ問題」と呼ぶクラスでは当てはめパラメータの最尤推定量の共分散行列が第1近似においてその下界を達成することを示した．また最尤推定量の計算を当てはめパラメータのみの非線形最適化問題に書き直し，計算上の諸問題を指摘した．最後に例として点列に対する直線およびコニックの当てはめ，および動画像からの3次元解析に本理論を適用した．

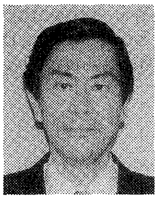
**謝辞** 本研究の内容について詳細な議論を頂いた東京大学工学部の甘利俊一教授および杉原厚吉教授に感謝します．本研究の一部は文部省科学研究費一般研究B(No. 07458067)および大川情報通信基金からの助成によった．

## 参考文献

1) Bickel, P. J., Klaassen, C. A. J., Ritov, Y. and Wellner, J. A.: *Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models,* Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD (1992).
2) Daniilidis, K. and Nagel, H.-H.: Analytical Results on Error Sensitivity of Motion Estimation from Two Views, *Image Vision Comput.,* Vol. 8, pp. 287-303 (1990).
3) Endoh, T., Toriu, T. and N. Tagawa, N.: A Superior Estimator to the Maximum Likelihood Estimator on 3-D Motion Estimation from Nosy Optical Flow, *IEICE Trans. Inf. & Syst.,* Vol. 77-D, No. 11, pp. 1240-1246 (1994).
4) 金谷健一：画像理解—3次元認識の数理—, 森北出版, 東京 (1990).
5) Kanatani, K.: *Geometric Computation for Machine Vision,* Oxford University Press, Oxford (1993).
6) 金谷健一：画像の3次元解釈の統計的信頼性, 情報処理学会論文誌, Vol. 34, No. 10, pp. 2062-2070 (1993).
7) Kanatani, K.: 3-D Interpretation of Optical Flow by Renormalization, *Int. J. Comput. Vision,* Vol. 11, No. 3, pp. 267-282 (1993).
8) 金谷健一：コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, Vol. 35, No. 2, pp. 201-209 (1993).

9) Kanatani, K.: Statistical Bias of Conic Fitting and Renormalization, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.,* Vol. 16, No. 3, 320-326 (1994).
10) Kanatani, K.: Statistical Analysis of Geometric Computation, *CVGIP: Image Understanding,* Vol. 59, No. 3, pp. 286-306 (1994).
11) Kanatani, K.: Renormalization for Motion Analysis: Statistically Optimal Algorithm, *IEICE Trans. Inf. & Syst.,* Vol. E77-D, No. 11, pp. 1233-1239 (1994).
12) 金谷健一:パラメトリック当てはめの精度の理論的限界, 情報処理学会研究報告, 94-CV-91, pp. 15-22 (1994).
13) 金谷健一:パラメトリック当てはめの最尤推定, 情報処理学会研究報告, 94-CV-91, pp. 23-30 (1994).
14) 金谷健一:空間データの数理—3次元コンピューティングに向けて—, 朝倉書店, 東京 (1995).
15) Maybank, S.: *Theory of Reconstruction from Image Motion,* Springer, Berlin (1993).
16) McCullagh, P. and Nelder, J. A.: *Generalized Linear Models, 2nd edition,* Chapman & Hall, London (1989).
17) 武者利光 監, 岡本良夫 著:逆問題とその解き方, オーム社, 東京 (1992).
18) Neyman, J. and Scott, E. L.: Consistent Estimates Based on Partially Consistent Observations, *Econometrica,* Vol. 32, No. 1, pp. 1-32 (1948).
19) Poggio, T. and Koch, C.: Ill-Posed Problems in Early Vision: From Computational Theory to Analogue Networks, *Proc. Roy. Soc. Lond.,* Ser. B, Vol. 226, No. 1244, pp. 303-323 (1985).
20) Poggio, T., Torre, V. and Koch, C.: Computational Vision and Regularization Theory, *Nature,* Vol. 317, pp. 314-319 (1985).
21) Poston, T. and Stewart, I.: *Catastrophe Theory and Its Applications,* Pitman, London (1978) (野口 広訳:カタストロフィーの理論とその応用/理論編, サイエンス社, 東京 (1980);野口 広, 佐藤隆一, 戸川美郎 訳:カタストロフィーの理論とその応用/応用編, サイエンス社, 東京 (1982)).
22) Tagawa, N., Toriu, T. and Endoh, T.: Un-Biased Linear Algorithm for Recovering Three-Dimensional Motion from Optical Flow, *IEICE Trans. Inf. & Syst.,* Vol. E76-D, No. 10, pp. 1263-1275 (1993).
23) Tagawa, N., Toriu, T. and Endoh, T.: Estimation of 3-D Motion From Optical Flow with Unbiased Objective Function, *IEICE Trans. Inf. & Syst.,* Vol. E77-D, No. 10, pp. 1148-1161 (1994).
24) 竹内 啓:数理統計学, 東洋経済新報社, 東京 (1963).
25) Tikhonov, A. N. and Arsenin, V. Y.: *Solution of Ill-Posed Problems,* V. H. Winston, Washington D. C. (1977).
26) Trivedi, H. P.: Estimation of Stereo and Motion Parameters Using a Variational Principle, *Image Vision Comput.,* Vol. 5, pp. 181-183 (1987).
27) Weng, J., Ahuja, N. and Huang, T. S.: Optimal Motion and Structure Estimation, *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Intell.,* Vol. 15, pp. 864-884 (1993).
28) Weng, J., Huang, T. S. and Ahuja, N.: *Motion and Structure from Image Sequences,* Springer, Berlin (1993).
29) Young, G.-S. J. and Chellappa, R.: Statistical Analysis of Inherent Ambiguities in Receiving 3-D Motion from a Noisy Flow Field, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.,* Vol. 14, No. 10, pp. 995-1013 (1992).


(平成7年1月5日受付)
(平成7年5月12日採録)



**金谷 健一**(正会員)

1947年岡山県生まれ. 1969-1970年米国 Case Western Reserve 大学留学. 1972年東京大学工学部計数工学科(数理工学)卒業. 1979年同大学院博士課程修了. 工学博士. 同年群馬大学工学部情報工学科助手. 1983年同助教授. 1988年同教授. 米国 Maryland 大学, デンマーク Copenhagen 大学, 英国 Oxford 大学客員研究員. 著書「線形代数」(講談社), "Group-Theoretical Methods in Image Understanding" (Springer), 「画像理解」(森北出版), "Geometric Computation for Machine Vision" (Oxford University Press). 1987年情報処理学会論文賞受賞.