基礎行列の分解: 焦点距離の直接的表現

金谷 健一 * 松永 力 †

* 群馬大学工学部情報工学科 †(株) 朋栄 放送システム開発部

2 画像の点対応から計算した基礎行列をそれぞれの画像の焦点距離とカメラの運動パラメータとに代数的に閉じた形に分解するアルゴリズムを示す。これはスカラ不変量で表された基本行列の分解可能条件に基づくものである。また解が不定となる退化の条件をすべて解析する。さらに退化が生じた場合に 2 画像の焦点距離は等しいと仮定して解を求める方法を示し、その場合の退化の条件を調べる。最後にエピ極点を用いる Bougnoux の公式を本論文の理論的枠組みから再導出する。

キーワード: 動画像解析、基礎行列、自己校正、焦点距離、不変量、多項式

Decomposition of the Fundamental Matrix: Closed-Form Expression for Focal Lengths

Kenichi Kanatani* and Chikara Matsunaga†

*Department of Computer Science, Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan
†Broadcast Division, FOR-A Co. Ltd, 2-3-3 Ohsaku, Sakura, Chiba 285-0802 Japan

We describe an algorithm for decomposing a fundamental matrix computed from point correspondences over two images into the focal lengths of the two images and the camera motion parameters in a closed-form expression in the fundamental matrix. Our algorithm is based on the decomposability condition of the essential matrix expressed in terms of its scalar invariants. We give a complete analysis for degenerate camera configurations. We also describe an algorithm for computing a single focal length in the degenerate case and analyze the indeterminacy condition. Finially, we recapitulate Bougnoux's formula, which describes the focal lengths using the epipoles, in our theoretical framework.

Key words: structure from motion, fundamental matrix, self-calibration, focal length, invariant, polynomial system

謝辞: 本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究C (2) (No. 11680377) によった。

*376-8515 桐生市天神町 1–5–1 群馬大学工学部情報工学科,
Tel: (0277)30-1842, Fax: (0277)30-1801, E-mail: kanatani@cs.gunma-u.ac.jp
†285-0802 千葉県佐倉市大作 2–3–3 (株) 朋栄 放送システム開発部, Tel: (043)498-1839, Fax: (043)498-2223
E-mail: matsunaga@for-a.co.jp

1. 序論

未校正カメラを用いて2画像の点対応から3次元復元を行うとき、シーンの構造に関する (平面であるとかの) 知識がなければ、得られる情報は「基礎行列」$\boldsymbol{F}$ に集約される [3, 22, 23]。これは定数倍を除いて定まるランク2の特異行列であるから自由度は7である。カメラの相対運動は並進ベクトル $\boldsymbol{t}$ と回転行列 $\boldsymbol{R}$ で指定され、並進の絶対量が不定であるから、運動パラメータ $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}\}$ は5自由度を持つ。したがって、カメラの運動が任意であれば最大2個のカメラのパラメータしか計算できない。

その2パラメータとして現実的な選択は2画像の焦点距離 f, f' であろう。なぜならその他のパラメータ (画像中心、アスペクト比、画像歪み角、等) はカメラに固有であり、あらかじめ校正しておくことができるのに対して、焦点距離 (ズーム) は撮影のたびに変化することが多いからである[1]。焦点距離 f, f' が定まれば運動パラメータ $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}\}$ が定まり、ステレオの原理により物体の3次元形状が復元できる [10, 11]。

Hartley [5] は基礎行列 $\boldsymbol{F}$ に特異値分解を施し、4次元連立1次方程式を解くことによって焦点距離 f, f' を求める手順を示した。Pan ら [17, 18] は3次方程式を解いて f, f' を求める手順を示した。Newsam ら [16] はこれらを洗練し、$\boldsymbol{F}$ の特異値分解と3次元連立1次方程式に帰着させるとともに、解が求まらない退化の条件を明らかにした。一方、Bougnoux [1] は f を基礎行列 $\boldsymbol{F}$ と「エピ極点」$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ を用いて一つの公式として表した (付録A参照)。その導出は「Kruppa の方程式」[3, 4, 5, 14, 15, 19, 22] に基づくものである。Kruppa の方程式によれば f, f' が2次方程式を解いて得られることは徐・辻 [22] や Xu [21] も示している。エピ極点 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ は $\boldsymbol{F}$ の特異値分解の特異値0に対応するベクトルとして与えられるから、エピ極点 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ の計算は $\boldsymbol{F}$ の特異値分解と実質的に等価である。Kahl と Triggs [8] は Bougnoux の公式を用いて退化に近い配置での解の安定性を実験している。植芝ら [20] もエピ極点を用いた分解を行っている。

本論文では焦点距離 f, f' を**エピ極点も特異値分解も用いないで**、単に基礎行列 $\boldsymbol{F}$ の代数的な式として表す。これは焦点距離 f, f' が定まって得られる「基本行列」の満たすべき「分解可能条件」[3, 7, 10, 11, 22] を解くものである。徐・辻 [22] は、これは「4次方程式で、実際に解くことが困難である (p.84)」と述べているが、巧みな変数変換により、最終的に2次方程式に帰着することを示す。

基本となる考え方は「変換群に対する不変性」である [9]。もし f, f' を $\boldsymbol{F}$ によって表す式があるとすれば、それは**それぞれの画像の座標系の任意の回転に不変でなければならない**。なぜなら画像座標軸方向は任意に取れ、f, f' はそれに影響されないからである。したがって f, f' は $\boldsymbol{F}$ の「座標回転不変量」で表されなければならない。$\boldsymbol{F}$ 自体はテンソルではないが、$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top$, $\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}$ がそれぞれの画像座標に関するテンソルであることから、座標回転不変量は $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top$, $\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{k} = (0,0,1)^\top$ から作られる行列のトレースで表されなければならない [9]。

以下、まずアルゴリズムを述べて、その後で導出を示すとともに、解が求まらない退化の条件を解析する。その結果は Newsam ら [16] の結果と一致する。最後に退化の場合に $f = f'$ と仮定して解を求める手順を述べ、その退化の条件は Brooks ら [2] が示した水平ステレオの退化の場合に一致することを示す。

2. アルゴリズム

ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$, $\boldsymbol{b} = (b_i)$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$ と書き、ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$ のノルムを $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i{}^2}$ と定義する。行列 $\boldsymbol{M} = (M_{ij})$ のノルムを $\|\boldsymbol{M}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} M_{ij}{}^2}$ と定義する。以下 $\boldsymbol{k} = (0,0,1)^\top$ と約束する。

画像中心は既知とし、それを画像座標の原点にとる。アスペクト比や歪み角は既知とし、あらかじめ補正を行い、歪みのないアスペクト比1の画像とみなせるとする。第1画像の任意の点 (x, y) と第2画像の対応する点 (x', y') は次の**エピ極線方程式**を満たす。

$$
(\begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{F} \begin{pmatrix} x'/f_0 \\ y'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 0 \qquad (1)
$$

ここに $\boldsymbol{F}$ はランク2の行列であり、**基礎行列**と呼ぶ [3, 22, 23]。f_0 は数値計算を安定にするための任意のスケール因子であり、例えば画像の大きさ (単位は画素) にとればよい。数値計算の問題を考えなければ単に $f_0 = 1$ としてもよい。基礎行列 $\boldsymbol{F}$ がスケール因子を考慮せず計算され、かつ座標原点が任意に選ばれていて画像中心がその座標系の点 (u_0, v_0) にあるなら、次のように変換すればよい。

$$
\boldsymbol{F} \leftarrow \begin{pmatrix} f_0 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 & 0 \\ u_0 & v_0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{F} \begin{pmatrix} f_0 & 0 & u_0 \\ 0 & f_0 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)
$$

焦点距離 f, f' を計算する手順は次のようになる。

入力: 基礎行列 $\boldsymbol{F}$。

出力: 焦点距離 f, f'。

手順:

[1] 市販のカメラではズーム機構の精度不足のため、ズームを変えると画像中心もやや変化するといわれている。しかし、実際的な応用ではこれを無視しても問題ないことが多い。

1. 次の量を計算する。

$$a=\frac{\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2}{\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2},\quad b=\frac{\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2}{\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2}$$

$$c=\frac{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})^2}{\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2},\quad d=\frac{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})}{(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})} \tag{3}$$

$$A=\frac{1}{c}+a-2d,\quad B=\frac{1}{c}+b-2d \tag{4}$$

$$P=2\Big(\frac{1}{c}-2d+\frac{1}{2}\|\boldsymbol{F}\|^2\Big)$$
$$Q=-\frac{A+B}{c}+\frac{1}{2}\Big(\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\|^2-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{F}\|^4\Big) \tag{5}$$

2. 次の Z の２次方程式を解く。

$$(1+cP)Z^2-(cP^2+2P+4cQ)Z$$
$$+P^2+4cPQ+12AB=0 \tag{6}$$

3. 二つの解のうち次式が小さいほう (理想的には0) を選ぶ。

$$\Big|Z^3-3PZ^2+2(P^2+2Q)Z-4\Big(PQ+\frac{4AB}{c}\Big)\Big| \tag{7}$$

4. 次式を計算する。

$$X=-\frac{1}{c}\Big(1+\frac{2B}{Z-P}\Big),\quad Y=-\frac{1}{c}\Big(1+\frac{2A}{Z-P}\Big) \tag{8}$$

5. 次の焦点距離 f, f' を返す。

$$f=\frac{f_0}{\sqrt{1+X/\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2}},\quad f'=\frac{f_0}{\sqrt{1+Y/\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2}} \tag{9}$$

２次方程式 (6) の解は解の公式によって表せるから、上の手順により焦点距離 f, f' が $\|\boldsymbol{F}\|^2$, $\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\|^2$、および式 (3) で定義される不変量によって閉じた形式で表現される。このアルゴリズムが破綻するのは次の場合である。

- $\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|$, $\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|$, $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})$ のいずれかが 0 となる。
- $Z=P$ となる。

これがどのような特異なカメラ配置に対応しているかは後に示す。

3. 運動パラメータの計算

焦点距離 f, f' が定まれば運動パラメータ $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{R}\}$ は次の手順で定まる [10, 11]。

1. 次の**基本行列**を計算する。

$$\boldsymbol{E}=\mathrm{diag}(1,1,\frac{f_0}{f})\boldsymbol{F}\mathrm{diag}(1,1,\frac{f_0}{f'}) \tag{10}$$

2. 行列 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\top$ の最小固有値に対する単位固有ベクトル $\boldsymbol{t}$ を計算する。
3. 次のように $-\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{E}$ の特異値分解を行う。

$$-\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{E}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^\top \tag{11}$$

4. 回転行列 $\boldsymbol{R}$ を次のように定める。

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{V}\mathrm{diag}(1,1,\det\boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^\top)\boldsymbol{U}^\top \tag{12}$$

式 (10) 中の $\mathrm{diag}(\cdots)$ は対角要素が $\cdots$ の対角行列を表す。式 (11) の左辺はベクトル $\boldsymbol{t}$ と行列 $\boldsymbol{E}$ の外積であり、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と行列 $\boldsymbol{A}$ に対して $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{a}$ と行列 $\boldsymbol{A}$ の各列とのベクトル積を列とする行列である。式 (11) の右辺の $\boldsymbol{\Lambda}$ は対角要素 (「特異値」) を大きい順に並べた対角行列であり、$\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U}$ は直交行列である。

ただし**解は一意的ではない**。なぜなら基礎行列 $\boldsymbol{F}$ は定数倍の不定性があり、特に符号が不定だからである。また $\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\top$ の固有ベクトル $\boldsymbol{t}$ の符号も任意であるから、$\pm\boldsymbol{E}$, $\pm\boldsymbol{t}$ の符号に応じて運動パラメータが**4 組**得られる。真の解を $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{R}\}$ とし、$\boldsymbol{t}$ の周りの 180° 回転を $\boldsymbol{I_t}=2\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^\top-\boldsymbol{I}$ とすると、他の解は $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{I_t}\boldsymbol{R}\}$, $\{-\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{I_t}\boldsymbol{R}\}$, $\{-\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{R}\}$ である [10]。これは数学的には物体がカメラの前方にあっても後方にあっても同じ透視変換の式となるためであり、４組の解は第１画像、第２画像で奥行きが{正, 正}, {正, 負}, {負, 正}, {負, 負}となる解に対応している。３次元復元を行うにはこれらの中から奥行きがともに正の解を選ぶ [10, 11]。

上記の手順で特異値分解を用いるのは便宜的であり、単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ と回転行列 $\boldsymbol{R}$ を直接的に計算することもできる [13]。上記の手順の利点は行列 $\boldsymbol{E}$ が単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ と回転行列 $\boldsymbol{R}$ によって厳密に $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{R}$ とは表せない場合にも最小二乗の意味で最適な単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ と回転行列 $\boldsymbol{R}$ が計算できることである。

4. アルゴリズムの導出

基礎行列 $\boldsymbol{F}$ が焦点距離 f, f' と運動パラメータ $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{R}\}$ によって定義されていると、式 (10) で定義される基本行列 $\boldsymbol{E}$ が $\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{R}$ と表される [10, 11]。行列 $\boldsymbol{E}$ がそのように表せる必要十分条件は $\boldsymbol{E}$ の特異値の一つが零であり、他の二つが等しいことである (**分解可能条件** [7])。この命題は座標回転に不変である。したがって座標回転不変量によって表されなければならない [9]。実際、次のように表せる [3, 4, 10, 14, 15]。

$$\|\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\top\|^2=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{E}\|^4 \tag{13}$$

したがって

$$K(f,f')=\|\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\top\|^2-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{E}\|^4 \tag{14}$$

と置けば、これは$1/f$，$1/f'$の8次多項式(各々の4次式)であり、$K(f,f')=0$を解いてf，f'が定まる。一個の方程式のみでは二個の未知数は求まらないように思えるが、実は解は$K(f,f')$の**特異点**であり、

$$K(f,f)=K_f(f,f')=K_{f'}(f,f')=0 \tag{15}$$

が成立する[11](付録B)。ただし添え字は偏微分を表す。新しい変数

$$x=\left(\frac{f_0}{f}\right)^2-1,\quad y=\left(\frac{f_0}{f'}\right)^2-1 \tag{16}$$

を定義すれば、やや長い変形の後にKが次のようにx, yの4次多項式(各々の2次式)として表せる。

$$\begin{aligned}K=&(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})^4x^2y^2+2(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})^2\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2x^2y\\&+2(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})^2\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2xy^2+\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^4x^2\\&+\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^4y^2+4(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})xy\\&+2\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2x+2\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2y+\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\|^2\\&-\frac{1}{2}\Big((\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})^2xy+\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2x\\&+\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2y+\|\boldsymbol{F}\|^2\Big)^2\end{aligned} \tag{17}$$

$\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|$, $\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|$, $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})$が0でないと仮定して次のように置く。

$$X=\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2x,\quad Y=\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2y \tag{18}$$

そして

$$Z=cXY+X+Y \tag{19}$$

と置くと、式(17)は次のように書ける。

$$K=2\Big(g(Z)+AX+BY+\frac{A+B}{c}\Big) \tag{20}$$

ここに$g(Z)$は次の2次多項式である。

$$g(Z)=\frac{1}{4}Z^2-\frac{1}{2}PZ+Q \tag{21}$$

ただし上記の式中でc, A, B, P, Qは式(3), (4), (5)で定義した定数である。式(20)より、条件$K=K_X=K_Y=0$は次の3式となる。

$$g(Z)+A\Big(X+\frac{1}{c}\Big)+B\Big(Y+\frac{1}{c}\Big)=0 \tag{22}$$

$$X+\frac{1}{c}=-\frac{2B}{c(Z-P)},\quad Y+\frac{1}{c}=-\frac{2A}{c(Z-P)} \tag{23}$$

式(23)を式(22)に代入すると次のZの3次方程式を得る。

$$Z^3-3PZ^2+2(P^2+2Q)Z-4\Big(PQ+\frac{4AB}{c}\Big)=0 \tag{24}$$

一方、式(23)を式(19)に代入すると次のZの3次方程式を得る。

$$Z^3-\Big(2P-\frac{1}{c}\Big)Z^2+P\Big(P-\frac{2}{c}\Big)Z+\frac{P^2-4AB}{c}=0 \tag{25}$$

式(24)，(25)からZ^3を消去すると2次方程式(6)を得る。その二つの解のうち、式(24)(あるいは式(25))を満たすほうを選ぶ。Zが定まれば式(23)からX, Yが定まり、式(16)，(18)から焦点距離f，f'が定まる。

5．退化の条件

xy座標系に平行移動、伸縮を加え、解が原点$(0,0)$に来るようにする。そのためには新しい座標(x',y')を

$$x'=\left(\frac{\bar f}{f_0}\right)^2(x+1)-1,\quad y'=\left(\frac{\bar f'}{f_0}\right)^2(y+1)-1 \tag{26}$$

と定義すればよい。ただし$\bar f$，$\bar f'$は変数f，f'の真の値である。この新しい座標を用いると、多項式Kは次のように表される。

$$\begin{aligned}K=&(\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})^4x'^2y'^2+2(\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})^2\|\bar{\boldsymbol{E}}^\top\boldsymbol{k}\|^2x'^2y'\\&+2(\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})^2\|\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k}\|^2x'y'^2+\|\bar{\boldsymbol{E}}^\top\boldsymbol{k}\|^4x'^2\\&+\|\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k}\|^4y'^2+4(\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})(\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})x'y'\\&+2\|\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\boldsymbol{k}\|^2x'+2\|\bar{\boldsymbol{E}}^\top\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k}\|^2y'+\|\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\|^2\\&-\frac{1}{2}\Big((\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})^2x'y'+\|\bar{\boldsymbol{E}}^\top\boldsymbol{k}\|^2x'\\&+\|\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k}\|^2y'+\|\bar{\boldsymbol{E}}\|^2\Big)^2\end{aligned} \tag{27}$$

ただし、次のように置いた。

$$\bar{\boldsymbol{E}}=\mathrm{diag}(1,1,\frac{f_0}{\bar f})\boldsymbol{F}\mathrm{diag}(1,1,\frac{f_0}{\bar f'}) \tag{28}$$

これは基本行列$\boldsymbol{E}$の真の値であるから、あるベクトル$\boldsymbol{t}$と回転行列$\boldsymbol{R}$が存在して

$$\bar{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{R} \tag{29}$$

と表せる。これから次のことがわかる[10, 11]。

$$\|\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\|^2=\frac{1}{2}\|\bar{\boldsymbol{E}}\|^4=2\|\boldsymbol{t}\|^4 \tag{30}$$

また、次のことがわかる。

$$\begin{gathered}\|\bar{\boldsymbol{E}}^\top\boldsymbol{k}\|=\|\boldsymbol{t}\|\sin\theta,\quad \|\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k}\|=\|\boldsymbol{t}\|\sin\theta'\\ \|\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\boldsymbol{k}\|=\|\boldsymbol{t}\|^2\sin\theta,\quad \|\bar{\boldsymbol{E}}^\top\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k}\|=\|\boldsymbol{t}\|^2\sin\theta'\\ (\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})=-\|\boldsymbol{t}\|\sin\phi\sin\theta\sin\theta'\\ (\boldsymbol{k},\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})=-\|\boldsymbol{t}\|^3\sin\phi\sin\theta\sin\theta'\end{gathered} \tag{31}$$

ただし θ は並進 $\boldsymbol{t}$ が第１カメラの光軸方向 $\boldsymbol{k}$ と成す角であり、 θ' は並進 $\boldsymbol{t}$ が第２カメラの光軸方向 $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{Rk}$ と成す角である。 ϕ は $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{t}$ の張る平面と $\boldsymbol{k}'$, $\boldsymbol{t}$ の張る平面の成す角である。上式を式 (27) に代入すると $x' = y' = 0$ において $K = K_{x'} = K_{y'} = 0$ であることが直ちにわかる。 $x' = y' = 0$ における２階の偏導関数は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
K_{xx} &= \|\boldsymbol{t}\|^4 \sin^4\theta \\
K_{xy} &= \|\boldsymbol{t}\|^4 (2\sin^2\phi - 1)\sin^2\theta\sin^2\theta' \\
K_{yy} &= \|\boldsymbol{t}\|^4 \sin^4\theta'
\end{aligned}
\tag{32}
$$

解が不定となる必要条件は多項式 $K(x,y)$ のヘッセ行列の行列式

$$
K_{xx}K_{yy} - K_{xy}^2 = \|\boldsymbol{t}\|^8 \Big(1-(2\sin^2\phi-1)^2\Big)\sin^4\theta\sin^4\theta' \tag{33}
$$

が 0 となることである。これは $\sin\theta = 0$ または $\sin\theta' = 0$ または $(2\sin^2\phi - 1)^2 = 1$ を意味する。最後の場合は $\sin\phi = 0$ または $\sin\phi = \pm 1$ を意味する。これらの場合を個別に調べると次のようになる。

場合 1 ($\sin\theta = 0$)**:** これは $\theta = 0$, π であり、第１カメラの光軸が並進方向と平行であることを意味する。このとき

$$
K(x', y') = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{t}\|^4 y'^2 \sin^4\theta' \tag{34}
$$

であり、 x' は不定である。

場合 2 ($\sin\theta' = 0$)**:** これは $\theta' = 0$, π であり、第２カメラの光軸が並進方向と平行であることを意味する。このとき

$$
K(x', y') = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{t}\|^4 x'^2 \sin^4\theta \tag{35}
$$

であり、 y' は不定である。

場合 3 ($\sin\phi = 0$)**:** これは $\phi = 0, \pi$ であり、二つのカメラの光軸が共面であることを意味する。このとき

$$
K(x', y') = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{t}\|^4 (x'\sin^2\theta - y'\sin^2\theta')^2 \tag{36}
$$

であり、 $x'\sin^2\theta = y'\sin^2\theta'$ となる無数の解が存在する。

場合 4 ($\sin\phi = \pm 1$)**:** これは $\phi = \pi/2$, $3\pi/2$ であり、第１カメラの光軸と並進方向の張る平面と第２カメラの光軸と並進方向の張る平面とが直交することを意味する。このとき

$$
\begin{aligned}
K(x', y') = \frac{1}{8}\|\boldsymbol{t}\|^4 (&x'y'\sin^2\theta\sin^2\theta' \\
&+ x'\sin^2\theta + y'\sin^2\theta')^2
\end{aligned}
\tag{37}
$$

であり、 $xy\sin^2\theta\sin^2\theta' + x\sin^2\theta + y\sin^2\theta' = 0$ となる無数の解が存在する。

以上より次の命題を得る。これは Newsam ら [16] の結論と同一である。

【命題 1】 焦点距離が不定となるのは (i) 二つのカメラの光軸が共面、あるいは (ii) 第１カメラの光軸と並進方向の張る平面と第２カメラの光軸と並進方向の張る平面とが直交する場合に限る。

また、次のこともわかる。

【命題 2】 二つのカメラの光軸と並進方向とが共線であれば解はまったく不定である。それ意外の退化の場合は、解は１パラメータを除いて求まる。

やや長い変形の結果、 $\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|$, $\|\boldsymbol{Fk}\|$, $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Fk})$ と $\|\bar{\boldsymbol{E}}^\top\boldsymbol{k}\|$, $\|\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k}\|$, $(\boldsymbol{k}, \bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})$ とは互いに線形結合で表せるので、 $(\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|, \|\boldsymbol{Fk}\|, (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Fk})) \neq (0,0,0)$ と $(\|\bar{\boldsymbol{E}}^\top\boldsymbol{k}\|, \|\bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k}\|, (\boldsymbol{k}, \bar{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{k})) \neq (0,0,0)$ が同値である。式 (20) より

$$
\begin{aligned}
K_x &= 2g'(Z)(cY+1) + 2A \\
K_y &= 2g'(Z)(cY+1) + 2A
\end{aligned}
\tag{38}
$$

であるから、 $Z = P$ あるいは $g'(Z) = (Z-P)/2 = 0$ となるのは $A = B = 0$ のときのみである。式 (22) から、これは $g(P) = 0$ を意味する。しかし $g(P) = g'(P) = 0$ は $g(Z)$ が $g(Z) = (Z-P)^2/4$ と書けることを意味する。したがって、式 (20) は次の形をもつ。

$$
K = \frac{1}{2}(XY + X + Y - P)^2 \tag{39}
$$

これは上記の場合 4 に相当する。以上より、本アルゴリズムが破綻するのは命題 1に列挙した特異な配置の場合のみであることがわかる。

6. 固定焦点距離の計算

カメラが特異な配置にあるときは f, f' が等しいと仮定して解を求めることができる。前述のアルゴリズムで $f = f'$ とすると、次の手順となる。

1. 次の量を計算する。

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Fk})^4 \\
a_2 &= (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Fk})^2(\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2 + \|\boldsymbol{Fk}\|^2) \\
a_3 &= \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2 - \|\boldsymbol{Fk}\|^2)^2 \\
&\quad + (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Fk})(4(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{FF}^\top\boldsymbol{Fk}) - (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{Fk})\|\boldsymbol{F}\|^2), \\
a_4 &= 2(\|\boldsymbol{FF}^\top\boldsymbol{k}\|^2 + \|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{Fk}\|^2) \\
&\quad - (\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2 + \|\boldsymbol{Fk}\|^2)\|\boldsymbol{F}\|^2 \\
a_5 &= \|\boldsymbol{FF}^\top\|^2 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{F}\|^4.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

2. 次の多項式を定義する。

$$
K(x) = a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 \tag{41}
$$

3. もし $a_1 \approx a_2 \approx a_3 \approx 0$ であれば終了する。そうでなければ $K(x)$ と $K'(x)$ の共通根を求める。

4. 焦点距離 f を次のように計算する。

$$f = \frac{f_0}{\sqrt{1+x}} \tag{42}$$

多項式 $K(x)$, $K'(x)$ の共通根は次のように計算できる。$a_1 \neq 0$ であれば3方程式 $K(x) = 0$, $K'(x) = 0$, $xK'(x) = 0$ は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3x^2 + a_4x + a_5 \\ & 4a_1 & 3a_2x^2 + 2a_3x + a_4 \\ 4a_1 & 3a_2 & 2a_3x^2 + a_4x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

したがって次の２次方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3x^2 + a_4x + a_5 \\ & 4a_1 & 3a_2x^2 + 2a_3x + a_4 \\ 4a_1 & 3a_2 & 2a_3x^2 + a_4x \end{vmatrix}$$
$$= a_1(3a_2^2 - 8a_1a_3)x^2 + 2a_1(a_2a_3 - 6a_1a_4)x + a_1(a_2a_4 - 16a_1a_5) = 0 \tag{44}$$

もし二つの解が存在すれば (上記の方程式は１次方程式に退化するかもしれない)、$K(x) = 0$ を満たすほうを選ぶ。もし $a_1 = 0$ かつ $a_2 \neq 0$ のときは、３方程式 $K(x) = 0$, $K'(x) = 0$, $xK'(x) = 0$ が次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4x + a_5 \\ & 3a_2 & 2a_3x + a_4 \\ 3a_2 & 2a_3 & a_4x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{45}$$

したがって、次の１次方程式を解いて解が定まる。

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4x + a_5 \\ & 3a_2 & 2a_3x + a_4 \\ 3a_2 & 2a_3 & a_4x \end{vmatrix}$$
$$= 2a_2(a_3^2 - 3a_2a_4)x + a_2(a_3a_4 - 9a_2a_5) = 0 \tag{46}$$

もし $a_1 = a_2 = 0$ かつ $a_3 \neq 0$ なら１次方程式 $K'(x) = 0$ を解いて解が定まる。

上記のアルゴリズムは $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (これがどういう場合に生じるかは次節で解析する) でない限り解が求まるが、それは基礎行列 $\boldsymbol{F}$ が $f = f'$ の解を持つと仮定しているからである。しかし、任意の $\boldsymbol{F}$ に対しては $K(x) = K'(x) = 0$ の解が存在するとは限らない。その場合に $f = f'$ の解を近似的にかつ最適に求めたい場合は、３次方程式 (２次または１次に退化するかもしれない) $K'(x) = 0$ のうち $|K(x)|$ が最小となるものを選ぶのが実際的であろう。

7. 固定焦点距離の退化条件

解が原点 $(0,0)$ に来るように式 (26) による新しい $x'y'$ 座標系をとる。式 (27) で $f = f'$ とすると、多項式 $K(x')$ は次のようになる。

$$K(x') = \bar{a}_1x'^4 + \bar{a}_2x'^3 + \bar{a}_3x'^2 \tag{47}$$

ここに $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ は式 (40) 中の $\boldsymbol{F}$ を式 (28) の $\bar{\boldsymbol{E}}$ に置き換えて得られる a_1, a_2, a_3 の真の値である。明らかに $K(0) = K'(0) = 0$ となっている。式 (31) を代入すると $K''(0)$ は次のようになる。

$$K''(0) = \|\boldsymbol{t}\|^4 \Big(4\sin^2\phi\sin^2\theta\sin^2\theta' + (\sin^2\theta - \sin^2\theta')^2\Big) \tag{48}$$

これが0となるのは $\sin^2\phi\sin^2\theta\sin^2\theta' = 0$ かつ $\sin^2\theta = \sin^2\theta'$ のときである。前者は $\phi = 0, \pi$ (二つのカメラの光軸と並進方向が共面) または $\theta = 0, \pi$ (第１カメラの光軸と並進方向が共線) または $\theta' = 0, \pi$ (第２カメラの光軸と並進方向が共線) を意味する。後者は $\theta' = \theta$, $\theta + \pi$ (二つのカメラの光軸が平行) または $\theta' = -\theta$, $\pi - \theta$ (二つのカメラの光軸と並進方向が並進方向を底辺とする二等辺三角形をつくる) を意味する。また、$K(x')$ が恒等的に0となるのは $\sin^2\phi\sin^2\theta\sin^2\theta' = 0$ かつ $\sin^2\theta = \sin^2\theta'$ であることがわかる。以上より次の結論を得る。

【命題 3】 焦点距離が一定のとき、これが不定となるのは (i) 二つのカメラの光軸が平行、または (ii) 二つのカメラの光軸と並進方向が並進方向を底辺とする二等辺三角形をつくる場合に限る。

Brooks ら [2] は水平な基線をもちカメラが垂直な軸の周りの回転の自由度をもつステレオでは特異な配置は条件 (ii) のみであることを示している。上の結果はこれを一般の配置の場合に拡張したものとも解釈できる。

8. 誤差と精度

本論文に示したアルゴリズムは他の方法 [1, 5, 17, 18, 16, 22] と同様に、基礎行列 $\boldsymbol{F}$ から焦点距離 f, f' と運動パラメータ $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}\}$ への単なる写像である。データに誤差があろうとなかろうと、どの方法も全く同一の結果を返すので、異なるアルゴリズムの精度を比較することには意味がない。ただし、計算速度には若干の相違がある。マシンやプログラミングに依存するが、本方法は固有値解析や特異値分解を行わないぶんわずかに速いようである。

一方、焦点距離 f, f' と運動パラメータ $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}\}$ を精度よく計算することは基礎行列 $\boldsymbol{F}$ を精度よく計算することにかかっている。これについては、我々は既にデータの誤差のあるときに２画像の対応点から基礎行

列を統計的に最適に計算し、かつその精度を定量的に評価するアルゴリズムを開発している [12]。そして、これが精度の理論限界に到達し、もはや改良の余地のないことを理論的および実験的に実証している [12]。このアルゴリズムの C++ 言語によるプログラムはインターネット上で公開されている[2]。

9. まとめ

本論文では焦点距離以外のカメラパラメータはあらかじめ校正されている場合に、与えられた基礎行列を焦点距離と運動パラメータに分解するアルゴリズムを示した。本方法では焦点距離が基礎行列の要素によって直接に代数的に閉じた形で表されており、特異値分解やエピ極点 (固有値、固有ベクトルの計算) を用いていない。本方法は基本行列の分解可能条件に基づくものであり、すべての式が画像座標系の回転に関する不変量で表されている。また、解が不定となる退化の条件を解析した。これは Newsam ら [16] が示した結果と一致する。さらに退化の場合に焦点距離が一定であるという仮定のもとに解を計算するアルゴリズムを示し、その退化条件は Brooks ら [2] が水平面に拘束されたステレオに関して導いた結果と一致することを示した。

Bougnoux [1] や徐・辻 [22] は基礎行列とエピ極点を用いる焦点距離の計算法を Kruppa の方程式から導いているが、本論文の定式化のもとにこれを座標回転の不変量で表す方法を付録に示す。

謝辞: 本研究に関して有益なコメントを頂いたフランス INRIA 研究所の Bill Triggs 氏、オーストラリア Murdoch 大学の Du Huynh 氏、および電総研の植芝俊夫氏に感謝します。

参考文献

[1] S. Bougnoux, From projective to Euclidean space under any practical situation, a criticism of self calibration, *Proc. 6th Int. Conf. Comput. Vision.*, January 1998, Bombay, India, pp. 790–796.

[2] M. J. Brooks, L. de Agapito, D. Q. Huynh and L. Baumela, Towards robust metric reconstruction via a dynamic uncalibrated stereo head, *Image Vision Comput.*, **16**-14 (1998), 989-1002.

[3] O. D. Faugeras, *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*, MIT Press, Cambridge, MA, U.S.A., 1993.

[4] O. D. Faugeras and S. Maybank, Motion from point matches: Multiplicity of solutions, *Int. J. Comput. Vision*, **4**-3 (1990), 225–246.

[5] R. I. Hartley, Estimation of relative camera positions for uncalibrated cameras, *Proc. 2nd Euro. Conf. Comput. Vision*, May 1992, Santa Margherita Ligure, Italy, pp. 579–587.

[6] R. I. Hartley, Kruppa's equations derived from the fundamental matrix, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19**-2 (1997), 133–135.

[7] T. S. Huang and O. D. Faugeras, Some properties of the E matrix in two-view motion estimation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **11**-12 (1989), 1310–1312.

[8] F. Kahl and B. Triggs, Critical motions in Euclidean structure from motion, *Proc. IEEE Computer Society Conf. Comput. Vision Patt. Recog.*, June 1999, Fort Collins, CO, U.S.A.

[9] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer, Berlin, 1990,

[10] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[11] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[12] 三島等, 金谷健一, 基礎行列の最適計算とその信頼性評価, 情報処理学会コンピュータビジョンとイメージメディア研究会, 99-CVIM-118-10 (1999-9), pp. 67–74.

[13] H. C. Longuet-Higgins, A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections, *Nature*, **293**-10 (1981), 133–135.

[14] S. Maybank, *Theory of Reconstruction from Image Motion*, Springer, Berlin, 1993.

[15] S. J. Maybank and O. D. Faugeras, A theory of self-calibration of a moving camera, *Int. J. Comput. Vision*, **8**-2 (1992), 123–151.

[16] G. N. Newsam, D. Q. Huynh, M. J. Brooks and H.-P. Pan, Recovering unknown focal lengths in self-calibration: An essentially linear algorithm and degenerate configurations, *Int. Arch. Photogram. Remote Sensing*, **31**-B3-III, July 1996, Vienna, Austria, pp. 575–580.

[17] H.-P. Pan, M. J. Brooks and G. Newsam, Image resituation: initial theory, *Proc. SPIE: Videometrics IV*, October 1995, Philadelphia, USA, pp. 162-173.

[18] H.-P. Pan, D. Q. Huynh and G. Hamlyn, Two-image resituation: Practical algorithm, *Proc. SPIE: Videometrics IV*, October 1995, Philadelphia, USA. pp. 174-190.

[19] 佐藤淳, 「コンピュータビジョン — 視覚の幾何学 —」, コロナ社, 1999.

[20] 植芝俊夫, 富田文明, 焦点距離が未知のステレオカメラによる三次元復元, 情報処理学会コンピュータビジョンとイメージメディア研究会, 99-CVIM-119-1 (1999-11), pp. 1–8.

[21] G. Xu, An algebraic derivation of the Kruppa equations and a new algorithm for self-calibration of cameras, *Proc. 1998 Symposium on Image, Speech, Signal Processing and Robotics*, September 1998, Hong Kong, pp. I15–18.

[22] 徐剛, 辻三郎, 「３次元ビジョン」, 共立出版, 1998.

[23] G. Xu and Z. Zhang, *Epipolar Geometry in Stereo, Motion and Object Recognition: A Unified Approach*, Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, 1996.

付録 A: Bougnoux の公式

与えられた基礎行列 $\boldsymbol{F}$ に対して $\boldsymbol{F}^\top$, $\boldsymbol{F}$ の固有値 0 の単位固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ とする。これらはそれぞれ、第１、第２画像の**エピ極点**を表すベクトルである [3, 23]。すなわち、 $\boldsymbol{e}$ は第１カメラから見た第２カメラのレンズ中心の投影位置を指すベクトルであり、 $\boldsymbol{e}'$ は第２カメラから見た第１カメラのレンズ中心の投影位置を指すベクトルである。これらは次のように表せる。

$$\boldsymbol{e} \simeq \mathrm{diag}(1, 1, \frac{f_0}{f})\boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{e}' \simeq \mathrm{diag}(1, 1, \frac{f_0}{f'})\boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{t} \quad (49)$$

ここに $\simeq$ は一方の辺が他方の辺の定数倍であることを表す。上式を用いると基礎行列 $\boldsymbol{F}$ から並進 $\boldsymbol{t}$ が消去されて次のように書ける。

$$\boldsymbol{F} \simeq \boldsymbol{e} \times \mathrm{diag}(1, 1, \frac{f_0}{f})\boldsymbol{R}\mathrm{diag}(1, 1, \frac{f'}{f_0})$$

[2] `http://www.ail.cs.gunma-u.ac.jp/~kanatani/j`

$$\boldsymbol{F} \simeq \mathrm{diag}(1,1,\frac{f}{f_0})\boldsymbol{R}\mathrm{diag}(1,1,\frac{f_0}{f'}) \times \boldsymbol{e}' \tag{50}$$

ただし、行列 $\boldsymbol{T}$ とベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{T})^\top$ と約束する。上式から回転 $\boldsymbol{R}$ を消去することによって次の **Kruppa の方程式**[3]が得られる。

$$\boldsymbol{F}\mathrm{diag}(1,1,\frac{f_0^2}{f'^2})\boldsymbol{F}^\top \simeq \boldsymbol{e} \times \mathrm{diag}(1,1,\frac{f_0^2}{f^2}) \times \boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{F}^\top\mathrm{diag}(1,1,\frac{f_0^2}{f^2})\boldsymbol{F} \simeq \boldsymbol{e}' \times \mathrm{diag}(1,1,\frac{f_0^2}{f'^2}) \times \boldsymbol{e}' \tag{51}$$

式 (16) のように変数 x, y を定義すると次のようになる。

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{I} + y\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^\top)\boldsymbol{F}^\top \simeq \boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{I} + x\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^\top) \times \boldsymbol{e}$$

$$\boldsymbol{F}^\top(\boldsymbol{I} + x\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^\top)\boldsymbol{F} \simeq \boldsymbol{e}' \times (\boldsymbol{I} + y\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^\top) \times \boldsymbol{e}' \tag{52}$$

これから次式を得る。

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top + y(\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})(\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})^\top \simeq \boldsymbol{P}_{\mathbf{e}} + x(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k})(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k})^\top \tag{53}$$

$$\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F} + x(\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k})(\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k})^\top \simeq \boldsymbol{P}_{\mathbf{e}'} + y(\boldsymbol{e}'\times\boldsymbol{k})(\boldsymbol{e}'\times\boldsymbol{k})^\top \tag{54}$$

ただし

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{e}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^\top, \quad \boldsymbol{P}_{\mathbf{e}'} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}'^\top \tag{55}$$

と定義した。これらはそれぞれ $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ に垂直な面への射影行列である。式 (53), (54) の両辺の右から $\boldsymbol{k}$ を掛けると、互いに変数が分離されて次のようになる。

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k} + y(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})\boldsymbol{F}\boldsymbol{k} = c\boldsymbol{P}_{\mathbf{e}}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}\boldsymbol{k} + x(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k} = c'\boldsymbol{P}_{\mathbf{e}'}\boldsymbol{k} \tag{56}$$

ここに c, c' は未知の比例定数である。式 (56) の第 2 式と $\boldsymbol{k}$ との内積をとると次のようになる。

$$\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2 + (\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})^2 x = c'\|\boldsymbol{e}' \times \boldsymbol{k}\|^2 \tag{57}$$

式 (56) の第 2 式と $\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}$ との内積をとると次のようになる。

$$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2 x = c'(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}) \tag{58}$$

式 (57), (58) を x について解くと次のようになる。

$$x = \frac{\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2 - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{e}'\times\boldsymbol{k}\|^2/(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})}{\|\boldsymbol{e}'\times\boldsymbol{k}\|^2\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2 - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})^2} \tag{59}$$

同様にして式 (56) の第 1 式から次の解を得る。

$$y = \frac{\|\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{k}\|^2 - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})\|\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k}\|^2/(\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})}{\|\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k}\|^2\|\boldsymbol{F}\boldsymbol{k}\|^2 - (\boldsymbol{k},\boldsymbol{F}\boldsymbol{k})^2} \tag{60}$$

[3] これは文献 [3, 4, 5, 14, 15, 19] の形とは異なるが、数学的には等価である。

この結果 f, f' が次のように表される。

$$f = \frac{f_0}{\sqrt{1+x}}, \quad f' = \frac{f_0}{\sqrt{1+y}} \tag{61}$$

これは形は異なっているが Bougnoux [1] が与えた公式と等価である。

付録 B: 分解可能条件の特異点

基本行列 $\boldsymbol{E}$ のスケールは不定であるから、$\|\boldsymbol{E}\| = 1$ と仮定して一般性を失わない。$\boldsymbol{E}$ はその 9 個の要素の作る 9 次元パラメータ空間 $\mathcal{R}^9$ の原点を中心とする 8 次元単位球面 S^8 上の一点である。分解可能条件 (13) は解 $\bar{\boldsymbol{E}}$ が $\mathcal{R}^9$ の曲面 $\|\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\top\|^2 = 1$ と球面 S^8 の交線上にあることを意味する。解 $\bar{\boldsymbol{E}}$ での交わり方を調べるために $\boldsymbol{E} = \bar{\boldsymbol{E}} + \Delta\boldsymbol{E}$ とおいて曲面の方程式 $\|\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\top\|^2 = 1$ に代入してテイラー展開し、高次の項を無視すると次のようになる。

$$\begin{aligned} 1 &= \|(\bar{\boldsymbol{E}}+\Delta\boldsymbol{E})(\bar{\boldsymbol{E}}+\Delta\boldsymbol{E})^\top\|^2 \\ &= \|\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\|^2 + (\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top;\bar{\boldsymbol{E}}\Delta\boldsymbol{E}^\top) + (\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top;\Delta\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{E}}^\top) \\ &= 1 + 2(\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\bar{\boldsymbol{E}};\Delta\boldsymbol{E}) \end{aligned} \tag{62}$$

ただし行列 $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ の内積を $(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B}) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}B_{ij}$ と定義した。上式より第 1 近似において $2(\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\bar{\boldsymbol{E}};\Delta\boldsymbol{E}) = 0$ であり、したがって曲面 $\|\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\top\|^2 = 1$ の点 $\bar{\boldsymbol{E}}$ における「法線方向」が $\bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\bar{\boldsymbol{E}}$ であることがわかる。これに式 (29) の表現を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{E}}\bar{\boldsymbol{E}}^\top\bar{\boldsymbol{E}} &= (\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{I})^\top(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{R} \\ &= (\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{I})(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{I})^\top(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{R} \\ &= (\|\boldsymbol{t}\|^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^\top)(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{I})\boldsymbol{R} \\ &= \|\boldsymbol{t}\|^2\bar{\boldsymbol{E}} + \boldsymbol{t}((\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{t})^\top)\boldsymbol{R} = \|\boldsymbol{t}\|^2\bar{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{63}$$

球面 S^8 の点 $\bar{\boldsymbol{E}}$ における法線方向は $\bar{\boldsymbol{E}}$ そのものであるから、これは曲面 $\|\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\top\|^2 = 1$ と球面 S^8 と「接している」 (接超平面を共有している) ことを意味する。いま $\bar{\boldsymbol{E}}$ が 2 パラメータ f, f' で指定される 2 次元多様体に拘束されていれば、2 パラメータ f, f' の摂動に対してこの関係が保存されるから、式 (15) が成立する。

なお、曲面 $\|\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^\top\|^2 = 1$ と球面 S^8 はともに 8 次元多様体であるから、それらの 9 次元空間での交わりは一般には 7 次元多様体となるはずであるが、上記の「非横断的交差」のため 6 次元多様体となる。解はその 6 次元多様体と $\det\boldsymbol{E} = 0$ の定義する 8 次元多様体との交線上にあり、その交線は 5 次元多様体である。したがって基本行列は 5 自由度をもち、これが回転行列 $\boldsymbol{R}$ と単位ベクトルに正規化した並進 $\boldsymbol{t}$ の自由度に対応する。