幾何学的推定における精度の理論限界と最適アルゴリズム

金谷 健一[†]

群馬大学工学部情報工学科

376-8515 桐生市天神町 1–5–1 群馬大学工学部情報工学科

Tel: (0277)30-1842 Fax: (0277)30-1801 kanatani@ail.cs.gunma-u.ac.jp

本論文では幾何学的拘束条件に基づいて誤差のあるデータからシーンや物体の 3 次元構造を推論するコンピュータビジョンの問題を「モデル当てはめ問題」として定式化し、一般的な数学的枠組みを与える。そして、誤差の挙動を統計的にモデル化することによって推定精度の理論限界が得られるとともに、その限界を到達する計算法が得られることを示す。これは "他のどのような方法を用いてもよりよい解が得られない" という意味で真に "最適" な手法である。これを例として 3 次元運動解析の場合に具体的に説明する。また、関連するさまざまな問題との関連についても述べる。

キーワード: 最適化, 幾何学的推定, 3 次元運動解析, 統計的推定, 精度の理論限界, モデル当てはめ

Theoretical Accuracy Bounds and Optimal Algorithm in Geometric Estimation

Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515, Japan

Tel: +81(277)30-1842 Fax: +81(277)30-1801 kanatani@ail.cs.gunma-u.ac.jp

This paper gives a general mathematical framework to the computer vision task of inferring 3-D structures of scenes and objects based on image data and geometric constraints, viewing the problem as *model fitting*. It can be shown that by modeling the statistical behavior of noise, we can derive a theoretical accuracy bound and a computational scheme that attains that bound. Such a method is truly *optimal* in the sense that *accuracy cannot be improved by any other methods*. We illustrate our theory by taking the structure-from-motion problem as an example. Various related topics are also discussed.

Key words: optimization, geometric estimation, structure from motion, statistical estimation, theoretical accuracy bound, model fitting

1 序論

コンピュータビジョンの目的の一つは画像データから3次元環境に関する推論を行なうことであり、その手掛かりとなるのはその環境に関する事前の知識である。これがなければ何の推論もできない。知識としては種々の形があるが、特に物体の形状や運動に関して成立すべき幾何学的関係は拘束、あるいはモデルと呼ばれる。そのような関係には通常いくつかのパラメータが含まれている。したがって次の課題が生じる。

モデル選択 観測した画像中で特定のモデルが成立しているのか、あるいは複数の候補モデルの中でどれが成立しているかを判定する。

モデル当てはめ 観測した画像に適合にするようにモデルのパラメータを決定する。

これらはどちらも困難な問題である。それは画像データに誤差があり、成立すべき条件も厳密には成立しないからである。誤差は不確定であるから、これに対処するには統計的な推論が不可欠である。したがって統計的解析はコンピュータビジョンの核心であるともいえる[1]。

従来この点は軽視され、画像には誤差がないと仮定し、透視変換の幾何学的関係を利用して3次元形状や運動を計算する理論が次々と展開されてきた。そして等号成立の判定は適当なしきい値を導入して対処し、パラメータは拘束の二乗和を最小にするように定め、結果の信頼性については乱数誤差を加えたデータによるシミュレーションを行なって見当をつけるというのが普通であった。

筆者は上記の課題を「統計的推論」とみなして誤差の統計モデルに基づいた理論化を行なってきた [7, 8, 9, 10]。特に前者のモデル選択に関しては幾何学的ＡＩＣを導入し [12]、動画像解析 [11]、アクティブビジョンの自己評価 [13]、ＣＡＤインターフェース [3]、オプティカルフローからの移動物体検出 [19]、ステレオ画像からの推論 [15] などに適用した。 Torr らは幾何学的ＡＩＣがロバスト3次元形状復元や画像のマッチングや動画像のセグメンテーションにも有効であることを報告している [22, 23, 24]。

このようなモデル選択の方法はモデル当てはめの方法に依存している。なぜなら、候補モデルを正しいと仮定してそれをデータに「最適」に当てはめ、その残差からそのモデルの妥当性を判定するからである。そこで本稿ではモデル当てはめに関する筆者の理論を総括する。

最近「最適」という言葉が乱用されている。よく用いられるのは、何らかの最小化基準 (拘束の二乗和など) を定め、それを最小にする解を「最適」解、そのプロセスを「最適」化と呼ぶことである[2]。しかし、本来「最適解」とは “解の近さ” を適切に定義した上で「真の解に最も近い解」の意味である。当然、ある基準を最小にする解より別の基準を最小にする解の方が真の解に近いこともあり得る。したがって、「最適」とは最小化基準そのものに対する評価でなければならない。

本稿では「最適」という言葉を厳密に解釈し、「真の解に最も近い解を与える解法」、すなわち「他のどんな解法を用いてもよりよい解を得ることが不可能である解法」を「最適な解法」と呼び、その解を「最適解」と呼ぶ。これを実現するには次の2ステップが必要である。

1. 考えている問題に対して、どのような解法を用いても越えることのできない精度の理論限界を導出する。
2. 考えている解法に対して、解の精度が理論限界に到達していることを示す。

このようにして得られた解法は厳密な意味で「最適」である。もちろん一意的とは限らない。精度が同程度の異なる解法が存在して、得られる解は異なってもどれも最適であることがあり得る。

2 モデル当てはめ

観測データは m 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_N$ であり、 m 次元空間 $\mathcal{R}^m$ のある m' 次元多様体 $\mathcal{A}$ に拘束されているとする。 $\mathcal{A}$ をデータ空間と呼ぶ。データ $\boldsymbol{a}_\alpha \in \mathcal{A}$ は真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \in \mathcal{A}$ に誤差が加わったものであるとみなし、

$$\boldsymbol{a}_\alpha = \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{a}_\alpha \tag{1}$$

[1] 本論文で “統計的解析” というのは観測・測定データの “誤差” に関する解析である。一方、このような特徴をもつ物体は何々である可能性が高いとか低いとかいう、ベイズ推定やＭＡＰ推定に代表される認識・識別における “統計的” 推論もあり、 “コンピュータビジョンにおける統計的方法” というと従来はこれを指すことが多かった。本論文の意味での “統計的方法” が注目され始めたのはごく最近のことである。

[2] さらにあいまいに、ある量を小さく、別の量を大きくしたいが両者が合い反するとき、適当な重みで両者を妥協させることを「最適化」と呼ぶことが広く行なわれている。これはもはや “最適” という意味を失っているので、 “妥協化” とか “折衷化” などと呼ぶのが本来であろう。

と書く。誤差 $\Delta\boldsymbol{a}_\alpha$ は α ごとに独立な期待値 $\boldsymbol{0}$ の正規分布に従う確率変数であるとみなす。誤差は小さいとし、その共分散行列

$$V[\boldsymbol{a}_\alpha] = E[\Delta\boldsymbol{a}_\alpha \Delta\boldsymbol{a}_\alpha^\top] \tag{2}$$

はデータ空間 $\mathcal{A}$ の $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ における接空間 $T_{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha}(\mathcal{A})$ を値域とするランク m' の半正値対称行列であると仮定する[3]($E[\cdot]$ は期待値、 $\top$ は転置を表す)。現実の環境で誤差の絶対的な大きさを予測するのは困難であるから、共分散行列 $V[\boldsymbol{a}_\alpha]$ は定数倍を除いて既知であるとし、

$$V[\boldsymbol{a}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{a}_\alpha] \tag{3}$$

と書く。未知の定数 ϵ をノイズレベル、既知の行列 $V_0[\boldsymbol{a}_\alpha]$ を正規化共分散行列 (一般にデータごとに異なる) と呼ぶ。

真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$, $\alpha = 1, ..., N$ の各々はある n 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ をパラメータとするある L 個の方程式を満たすとする。ベクトル $\boldsymbol{u}$ は n 次元空間 $\mathcal{R}^n$ のある n' 次元多様体 $\mathcal{U}$ に拘束されているとする。$\mathcal{U}$ をパラメータ空間と呼ぶ。変数 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{u}$ に関して滑らかな L 個の関数 $F^{(k)}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u})$: $\mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, $k = 1, ..., L$ が与えられたとき、問題は次のように書ける。

【問 題 1】 L 個の方程式

$$F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \boldsymbol{u}) = 0, \qquad k = 1, ..., L \tag{4}$$

を満たす真の値 $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha = 1, ..., N$ とパラメータ $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ を誤差のあるデータ $\boldsymbol{a}_\alpha \in \mathcal{A}$, $\alpha = 1, ..., N$ から推定せよ。

L 個の方程式 $F^{(k)}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = 0$, $k = 1, ..., L$ は互いに独立である必要はなく、独立なものの個数を r とする。したがって $F^{(k)}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}) = 0$, $k = 1, ..., L$ はデータ空間 $\mathcal{A}$ に余次元 r の多様体 $\mathcal{S}$ を定義する[4]。これを問題 1の (幾何学的) モデルと呼ぶ[5]。問題 1は次のようにも書ける。

【問 題 2】 データ空間 $\mathcal{A}$ に与えられた N 個の点 $\{\boldsymbol{a}_\alpha\}$ に対して、モデル $\mathcal{S}$ がそれらの 真の位置 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$ を通るようにパラメータ $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ を定めよ。

3 精度の理論限界

パラメータ $\boldsymbol{u}$ のある不偏推定量[6]を $\hat{\boldsymbol{u}}$ とする。パラメータ空間 $\mathcal{U}$ の $\boldsymbol{u}$ における接空間への射影行列を $\boldsymbol{P}^{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{u}}$ とし、 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の共分散行列を次のように定義する。

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] = E[\boldsymbol{P}^{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{u}}(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u})(\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u})^\top \boldsymbol{P}^{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{u}}] \tag{5}$$

これはパラメータ空間 $\mathcal{U}$ の $\boldsymbol{u}$ における接空間 $T_{\boldsymbol{u}}(\mathcal{U})$ を値域とするランク n' の半正値対称行列である。このとき次の不等式が成立する[7][7, 10]。

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] \succ \epsilon^2 \Big(\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{L} \bar{W}_\alpha^{(kl)} (\boldsymbol{P}^{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{u}} \nabla_{\boldsymbol{u}} \bar{F}_\alpha^{(k)})(\boldsymbol{P}^{\mathcal{U}}_{\boldsymbol{u}} \nabla_{\boldsymbol{u}} \bar{F}_\alpha^{(l)})^\top \Big)^-, \qquad \Big(\bar{W}_\alpha^{(kl)}\Big) = \Big((\nabla_{\boldsymbol{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}, V_0[\boldsymbol{a}_\alpha] \nabla_{\boldsymbol{a}} \bar{F}_\alpha^{(l)}) \Big)^- \tag{6}$$

ただし $\boldsymbol{A} \succ \boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ が半正値対称行列であることを表し、演算 $(\cdot)^-$ は (ムーア・ペンローズ) 一般逆行を表す。また n 次元ベクトル $(\partial(\cdot)/\partial u_1, ..., \partial(\cdot)/\partial u_n)^\top$、 m 次元ベクトル $(\partial(\cdot)/\partial a_1, ..., \partial(\cdot)/\partial a_m)^\top$ をそれぞれ $\nabla_{\boldsymbol{u}}(\cdot)$, $\nabla_{\boldsymbol{a}}(\cdot)$ と書き、$\nabla_{\boldsymbol{u}} F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \boldsymbol{u})$, $\nabla_{\boldsymbol{a}} F^{(k)}(\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, \boldsymbol{u})$ をそれぞれ $\nabla_{\boldsymbol{u}} \bar{F}_\alpha^{(k)}$, $\nabla_{\boldsymbol{a}} \bar{F}_\alpha^{(k)}$ と略記している。第 2 式は、右辺の $(\cdot)^-$ の中身を (kl) 要素とする行列の一般逆行列の (kl) 要素が $\bar{W}_\alpha^{(kl)}$ に等しいことを表す。

---

[3]厳密には式 (2) 中の $\Delta\mathbf{a}_\alpha$ は $\mathbf{P}^{\mathcal{A}}_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha} \Delta\mathbf{a}_\alpha$ である。ただし $\mathbf{P}^{\mathcal{A}}_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}$ は $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$ における $\mathcal{A}$ の接空間への射影行列である [7, 10]。誤差が小さいので $\mathbf{P}^{\mathcal{A}}_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha} \Delta\mathbf{a}_\alpha$ と $\Delta\mathbf{a}_\alpha$ とが同一視できるというのが仮定であり、射影行列 $\mathbf{P}^{\mathcal{A}}_{\bar{\mathbf{a}}_\alpha}$ を省略する。

[4]厳密には L 個の方程式の各々は余次元 1 の多様体を定義し、かつそれらどの二つも互いに横断的に交わると仮定する必要がある [10]。

[5]統計学では「モデル」とは観測データを未知パラメータと既知の変数とランダムな誤差とによって表すことをいい、そのパラメータの推定を回帰 (物理学では逆問題) と呼ぶ。ここではそのような形をしていないので、統計学の理論が直接には適用できない。観測データ $\mathbf{a}_\alpha$ は未知数 $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$ と誤差 $\Delta\mathbf{a}_\alpha$ によって式 (1) のように表されるのみであり、「モデル」$\mathcal{S}$ は未知数 $\{\bar{\mathbf{a}}_\alpha\}$ を式 (4) の形で間接的に拘束しているに過ぎない。これは拘束充足問題とも呼べる。

[6]推定量 $\hat{\mathbf{u}}$ の不偏性は普通は $E[\hat{\mathbf{u}}] = \mathbf{u}$ と定義されるが、パラメータ空間 $\mathcal{U}$ が平坦でないときはこのような定義ができない。この場合は射影行列を用いて $E[\mathbf{P}^{\mathcal{U}}_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})] = \mathbf{0}$ と定義する [10]。

[7]これを文献 [7, 10] では比喩的にクラメル・ラオの不等式、右辺をクラメル・ラオの下界と呼んでいるが、通常の統計学でのものとは別物である。

4 パラメータ推定

問題 1の解法として次のものが代表的である。

最小集合法 式 (4) は自由度 n' のパラメータ $\boldsymbol{u}$ に r 個の式を与えているから、誤差がないと仮定して $\lceil n'/r \rceil$ 個のデータを式 (4) に代入した次の連立 1 次方程式を解いて $\boldsymbol{u}$ が定まる。

$$F^{(k)}(\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{u}) = 0, \quad k = 1, ..., L, \ \ \alpha = 1, ..., \lceil n' \rceil \tag{7}$$

最小二乗法 N $(\geq \lceil n'/r \rceil)$ 個のデータを観測し、次式を最小にする $\boldsymbol{u}$ を計算する ($W_\alpha^{(k)}$ は適当な非負の重み)。

$$J_{LS} = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k=1}^{L} W_\alpha^{(k)} F^{(k)}(\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{u})^2 \tag{8}$$

最尤推定法 データの真の値 $\{\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$ を未知数とみなしてマハラノビス距離の二乗和

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{a}_\alpha - \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{a}_\alpha]^{-}(\boldsymbol{a}_\alpha - \bar{\boldsymbol{a}}_\alpha)) \tag{9}$$

を制約条件 (4) のもとで最小化する[8](本稿ではベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書く)。パラメータ $\boldsymbol{u}$ は J の残差を最小にするように選ぶ。

これらにはいろいろな変形が可能である[9]。また、最小集合法はロバスト推定として今日注目を集めている[10]。しかし、最小集合法も最小二乗法も得られる解が真の解に近いという保証はない。実際、式 (8) の最小二乗法は重み W_α をどう選んでも解に統計的な偏差があることが知られている [10]。これに対して最尤推定解の共分散行列は第 1 近似において (すなわち $O(\epsilon^4)$ の項を無視して) 式 (6) の理論限界に到達すること、したがってこの意味で最適であることが示せる[11][7, 10]。

$\boldsymbol{u}$ を固定すると式 (9) の最小化の解 $\{\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha\}$ は制約条件 (4) に対するラグランジュ乗数を用いて、1 次近似において (すなわち $O(\epsilon^2)$ の項を無視して) 次のように書ける[12][9, 10]。

$$\hat{\boldsymbol{a}}_\alpha = \boldsymbol{a}_\alpha - V_0[\boldsymbol{a}_\alpha] \sum_{k,l=1}^{L} W_\alpha^{(kl)} F_\alpha^{(k)} \nabla_{\boldsymbol{a}} F_\alpha^{(l)}, \qquad \left(W_\alpha^{(kl)}\right) = \left((\nabla_{\boldsymbol{a}} F_\alpha^{(k)}, V_0[\boldsymbol{a}_\alpha] \nabla_{\boldsymbol{a}} F_\alpha^{(l)})\right)_r^{-} \tag{10}$$

ただし $F_\alpha^{(k)}$, $\nabla_{\boldsymbol{a}} F_\alpha^{(k)}$ はそれぞれ $F^{(k)}(\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{u})$, $\nabla_{\boldsymbol{a}} F^{(k)}(\boldsymbol{a}_\alpha, \boldsymbol{u})$ の略記である。演算 $(\cdots)_r^-$ は標準形において固有値を大きいほうから r 個のみ残し、残りを 0 に置き換えてから (ムーア・ペンローズ) 一般逆を計算することを意味する[13]。

式 (10) を式 (9) 中の $\bar{\boldsymbol{a}}_\alpha$ に代入すると、問題は $\boldsymbol{u}$ のみに関する次の最小化となる[14]。

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{L} W_\alpha^{(kl)} F_\alpha^{(k)} F_\alpha^{(l)} \tag{11}$$

---

[8]仮定した誤差モデルのもとでデータ $\{\mathbf{a}_\alpha\}$ が観測される尤度は (定数)×$e^{-J/2\epsilon^2}$ であり、J の最小化は尤度の最大化と等価である。

[9]例えば、パラメータ $\mathbf{u}$ の拘束 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ が問題を複雑にするので、この拘束を無視して解き、後で $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ となる条件 (分解可能条件) を満たすように補正することも考えられる。このような方法を線形化手法と呼ぶ [10]。

[10]多数のデータからランダムに最小集合を繰り返し選び、解を解空間に投票し、最高得票のものを採用する。これは **RANSAC** と呼ばれる [1]。

[11]通常の最尤推定は観測数無限大の極限でクラメル・ラオの下界を達成する。この場合は (観測数) = (データ数) である。しかし、モデル当てはめでは観測数は 1 である。なぜなら未知パラメータは $\{\bar{\mathbf{a}}_\alpha\}$ と $\mathbf{u}$ の $mN + n$ 個 (自由度は $m'N + n'$) であり、これに対する一組のデータ $\{\mathbf{a}_\alpha\}$ が観測される。データ数 N を増やせば未知パラメータもその分だけ増加し、新しいパラメータの組に対してまた一組のデータが観測される。したがって最尤推定の漸近的最適性は実現せず、最尤推定量 $\{\hat{\mathbf{a}}_\alpha\}$ は N を大きくしても真の値 $\{\bar{\mathbf{a}}_\alpha\}$ に近づかない。しかし、誤差の小さい極限を考えることは観測数を増大させるのと等価であり、最尤推定の漸近的最適性が実現される。

[12]これはデータ $\mathbf{a}_\alpha$ の最適補正 [9, 10] であり、幾何学的には点 $\mathbf{a}_\alpha$ をマハラノビス距離が最小になるようにモデル $\mathcal{S}$ に射影すること (マハラノビス射影) を意味する。

[13]そうしないと $\mathbf{W}_\alpha$ はデータの誤差のためフルランクになるが、$\mathbf{a}_\alpha \to \bar{\mathbf{a}}_\alpha$ の極限でランク r に落ちる。この演算は誤差が小さいときの数値的不安定を防ぐためである [10]。

[14]ロバスト推定法には RANSAC のような投票法の他に、M推定法、最小メジアン法などがある。Torr [22] は式 (11) の各 α に対する項にM推定子を適用している。あるいは和をとる代わりに最小メディアンに置き換えてもよい。しかし、そのようにするとアウトライアは除去できても残差の統計的な解析が難しくなる。太田ら [19] は、式 (10) の各 α に対する項を ϵ で割ったものが近似的に自由度 r の χ^2 分布に従うことから、上側のある % 点以上の項を除去することを提案している。こうすると残差の統計的性質が (N の変化以外は) ほぼ保存される。

これは最小二乗法に形が似ているが、「重み」$W_\alpha^{(kl)}$ も未知数 $\boldsymbol{u}$ の関数であることに注意。この最小値 $\hat{J}$ を単に残差と呼ぶ。$\hat{J}/\epsilon^2$ が 1 次近似において自由度 $rN-n'$ の χ^2 分布に従うことから [10]、未知ノイズレベル ϵ の二乗の不偏推定量が次のように得られる。

$$\hat{\epsilon}^2 = \frac{\hat{J}}{rN-n'} \tag{12}$$

5　3 次元運動解析

カメラのレンズ中心を原点 O、光軸を Z 軸とする XYZ 座標系をとる。カメラは校正済み[15]とし、焦点距離を長さの単位にとれば画像面は $Z=1$ とみなせる。その上に光軸の通過点 (画像中心) を原点 o とし、XY 軸に平行な座標軸をもつ xy 座標系をとる。そのカメラが原点 O の周りに回転行列 $\boldsymbol{R}$ だけ回転し、ベクトル $\boldsymbol{t}$ だけ並進するとする。$\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}\}$ を運動パラメータと呼ぶ。

N 組の対応する特徴点の画像座標を (x_α, y_α), (x'_α, y'_α), $\alpha = 1, ..., N$ とし、これらを次のような 3 次元ベクトル[16]で表す。

$$\boldsymbol{x}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, 1)^\top, \qquad \boldsymbol{x}'_\alpha = (x'_\alpha, y'_\alpha, 1)^\top \tag{13}$$

これらを各点ごとに独立な正規分布に従う確率変数とみなし、共分散行列を $V[\boldsymbol{x}_\alpha]$, $V[\boldsymbol{x}'_\alpha]$ とする ($\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ の第 3 成分は定数 1 であるから、一般にランク 2 の特異行列である)。これらを次のように未知のノイズレベル ϵ と既知の正規化共分散行列 $V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]$, $V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]$ に分解する。

$$V[\boldsymbol{x}_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}_\alpha], \qquad V[\boldsymbol{x}'_\alpha] = \epsilon^2 V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha] \tag{14}$$

5.1　一般モデル

対応点の組 $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'\}$ が空間の同一点を表す必要十分条件は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{t}$ が共面であることであり、次のエピ極線方程式が得られる ($|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}|$ はベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のスカラ三重積)。

$$|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'| = 0 \tag{15}$$

これは 4 次元データ空間 $\mathcal{X} = \{(x, y, z, x', y', z') | z = 1, z' = 1\} \in \mathcal{R}^6$ に余次元 1 のモデル $\mathcal{S}$ を定義する。未知数は 12 次元ベクトル $\boldsymbol{u} = (t_1, t_2, t_3, R_{11}, R_{12}, ..., R_{33})^\top$ であるが、式 (15) より並進 $\boldsymbol{t}$ の絶対値が未定であり、$\|\boldsymbol{t}\| = 1$ と正規化する。また (R_{ij}) は回転行列であり、自由度は 3 である。したがって、パラメータ空間は $\mathcal{U}$ は 12 次元空間 $\mathcal{R}^{12}$ の 5 次元多様体である。

並進の誤差　並進は加法群を作るので、計算値 $\hat{\boldsymbol{t}}$ と真値 $\boldsymbol{t}$ の誤差は “差” $\hat{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{t}$ で評価できる。しかし、$\hat{\boldsymbol{t}}$ も $\boldsymbol{t}$ も単位ベクトルに正規化されているので単位球面上に拘束されている。そこで誤差は小さいと仮定して誤差を $\boldsymbol{t}$ における接平面に射影し、並進の誤差を次のように定義する。

$$\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{t}}(\hat{\boldsymbol{t}} - \boldsymbol{t}) \tag{16}$$

ここに $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{t}}$ $(= \boldsymbol{I} - \boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^\top)$ は $\boldsymbol{t}$ に垂直な平面上への射影行列である ($\boldsymbol{I}$ は単位行列)。

回転の誤差　回転は乗法群を作るので、計算値 $\hat{\boldsymbol{R}}$ と真値 $\boldsymbol{R}$ の誤差は “商” $\hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{-1}$ $(= \hat{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^\top)$ で評価できる。これは相対回転行列であり、その回転軸を $\boldsymbol{l}$ (単位ベクトル)、回転角 $\Delta\Omega$ とし、回転の誤差を次のベクトルで表す[17]

$$\Delta \boldsymbol{\Omega} = \Delta\Omega \boldsymbol{l} \tag{17}$$

[15]最近は射影幾何学を利用した未校正カメラによる 3 次元復元法 (自己校正法) の研究が盛んであるが、誤差に対する最適性を論じるにはカメラ校正は不可欠である。射影幾何学は “関係” の記述であり、定量的な意味をもたない。誤差は物理的な画像面に生じるのであり、“同次座標の誤差” など意味を持たないから、“同次座標による最小二乗法” などは正当化されない。誤差に関する最適解を求めるには、射影幾何学に基づく自己校正法の解を初期値とし、その校正結果に基づいた最適手法を改めてほどこす必要がある。

[16]これらは特徴点の同次座標を成分とするベクトルとみなせるから射影幾何学的 “関係” が簡潔に表現できる。同時に長さは物理的意味を持っているから誤差解析も可能となる。

[17]このようなパラメータ化は回転の全体がリー群 (回転群) を作ることに着目している。このとき無限小回転の全体はリー代数という構造をもち、式 (17) はその表現である [4]。例えば回転に関する最適化を行なう場合もこの表現が有効である [17, 25]。

以上より運動パラメータ $\{\hat{\boldsymbol{t}},\ \hat{\boldsymbol{R}}\}$ の共分散行列を次のように定義する (式 (5) 参照)。

$$V[\hat{\boldsymbol{t}}] = E[\Delta\boldsymbol{t}\Delta\boldsymbol{t}^\top], \quad V[\hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{R}}] = E[\Delta\boldsymbol{t}\Delta\boldsymbol{\Omega}^\top](= V[\hat{\boldsymbol{R}}, \hat{\boldsymbol{t}}]^\top), \quad V[\hat{\boldsymbol{R}}] = E[\Delta\boldsymbol{\Omega}\Delta\boldsymbol{\Omega}^\top] \tag{18}$$

このとき式 (6) の下界は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} V[\hat{\boldsymbol{t}}] & V[\hat{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{R}}] \\ V[\hat{\boldsymbol{R}}, \hat{\boldsymbol{t}}] & V[\hat{\boldsymbol{R}}] \end{pmatrix} \succ \epsilon^2 \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^N \bar{W}_\alpha \bar{\boldsymbol{p}}_\alpha \bar{\boldsymbol{p}}_\alpha^\top & \sum_{\alpha=1}^N \bar{W}_\alpha \bar{\boldsymbol{p}}_\alpha \bar{\boldsymbol{q}}_\alpha^\top \\ \sum_{\alpha=1}^N \bar{W}_\alpha \bar{\boldsymbol{q}}_\alpha \bar{\boldsymbol{p}}_\alpha^\top & \sum_{\alpha=1}^N \bar{W}_\alpha \bar{\boldsymbol{q}}_\alpha \bar{\boldsymbol{q}}_\alpha^\top \end{pmatrix}^- \tag{19}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_\alpha = \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \times \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \quad \bar{\boldsymbol{q}}_\alpha = (\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}_{\alpha'})\boldsymbol{t} - (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha)\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha \tag{20}$$

$$\bar{W}_\alpha = \frac{1}{(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha](\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha)) + (\boldsymbol{t} \times \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{R}V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{t} \times \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha))} \tag{21}$$

この下界を第 1 近似において達成する最尤推定は次の関数の最小化となる [6, 10]。

$$J[\boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}] = \sum_{\alpha=1}^N \frac{|\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha|^2}{(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha](\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha)) + (\boldsymbol{t} \times \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{R}V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{t} \times \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha))}. \tag{22}$$

直接的最小化は数値探索を必要とするが、上式において

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{R} \tag{23}$$

と置くと、行列 $\boldsymbol{F}$ に関する次の関数の最小化となる (ベクトル $\boldsymbol{v}$ と行列 $\boldsymbol{T}$ の積 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{T}$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{T}$ の各列とのベクトル積を列とする行列)。

$$J[\boldsymbol{F}] = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha)^2}{(\boldsymbol{F}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}_\alpha]\boldsymbol{F}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha]\boldsymbol{F}^\top\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha)}. \tag{24}$$

$\boldsymbol{F}$ を基本行列と呼ぶ。上式を最小化する基本行列 $\boldsymbol{F}$ を求め、それを運動パラメータ $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{R}\}$ に分解する方法を線形化手法と呼ぶ。上式の最小化は「くりこみ法」と呼ぶ手法によって簡単な計算で実現できる。さらにこれに「最適補正」[9, 10] と呼ぶ手法を組み合わせると[18]、式 (22) の直接最小化と同程度の精度が達成できる [6]。

カメラが未校正のときは式 (15) は成立しないが、任意の画像座標系と任意の空間座標系に対してある行列 $\boldsymbol{F}$ が存在して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}') = 0 \tag{25}$$

が成立する。これもエピ極線方程式と呼び、 $\boldsymbol{F}$ を基礎行列と呼ぶ。このときの基礎行列 $\boldsymbol{F}$ の最適な推定はやはり式 (24) の最小化となる[19]。したがって基礎行列の推定にも「くりこみ法」が適用できる。カメラが校正されているかどうかは行列 $\boldsymbol{F}$ が式 (23) の分解をもつかもたないかの違いのみである。

5.2 平面モデル

空間に平面を考え、単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$、原点 O からの距離 ($\boldsymbol{n}$ の方向に正) を d とし、 $\{\boldsymbol{n},\ d\}$ を平面パラメータと呼ぶ。対応点の組 $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'\}$ がこの平面上の点を表す必要十分条件は次のように書ける [10, 14]。

$$\boldsymbol{x}' \times \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{R}^\top(\boldsymbol{t}\boldsymbol{n}^\top - d\boldsymbol{I}) \tag{26}$$

$\boldsymbol{H}$ は画像面上に引き起こされる射影変換を表す行列である。式 (26) は 4 次元データ空間 $\mathcal{X} = \{(x, y, z, x', y', z')|z = 1, z' = 1\} \in \mathcal{R}^6$ に余次元 2 のモデル $\mathcal{S}_\Pi$ を定義する。未知パラメータは $\boldsymbol{H}$ であるが、式 (26) からスケールが未定であるので $\|\boldsymbol{H}\| = 1$ と正規化する。この結果、パラメータ空間 $\mathcal{U}$ は 9 次元空間 $\mathcal{R}^9$ の 8 次元多様体である。射影変換 $\boldsymbol{H}$ の最適解は次の最小化によって得られる (積 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{I})^\top$ の略記) [10, 14]。

---

[18] 行列 $\mathbf{F}$ が式 (23) のように分解されるためには、その固有値が $1,\ 1,\ 0$ でなければならない [5]。これは $\det \mathbf{F} = 0,\ \|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{F}\mathbf{F}^\top\| = \sqrt{2}$ と同値である [5]($\|\cdot\|$ は行列のユークリッドノルム)。この条件は特異値分解によって簡単に課すことができるが [5]、これは行列の空間での最小二乗法に相当しているので、精度のよい解は得られない。それに対して基本行列の共分散テンソルを考慮し、条件を満たす空間へ統計的に最適に射影 (マハラノビス射影) するのが「最適補正」である [9, 10]。

[19] 任意の画像座標系といっても、その画像座標系に関して誤差の挙動が (定数倍を除いて) 既知でなければならない。エピ極線方程式 (25) は画像や空間の射影変換に関する不変式 (射影幾何学的 “関係”) であるが、誤差は “計量的” な性質であり、射影変換を施すと一様等方誤差分布が非一様非等方分布になるなど、計量的な性質が保存されない。したがって、実際には未校正カメラといっても、近似的に校正されていなければならない。

$$J[\boldsymbol{H}] = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_\alpha) \tag{27}$$

$$\boldsymbol{W}_\alpha = \Big(\boldsymbol{x}'_\alpha \times \boldsymbol{H} V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \boldsymbol{H}^\top \times \boldsymbol{x}'_\alpha + (\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_\alpha) \times V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha] \times (\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_\alpha)\Big)^-_2 \tag{28}$$

式 (27) の最小化にも「くりこみ法」とよぶ手法が適用でき、簡単な計算で解が計算できる [10, 14]。射影変換 $\boldsymbol{H}$ が得られれば、式 (26) の第 2 式を満たす運動パラメータ $\{\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{R}\}$ と平面パラメータが (スケールを除いて) 解析的に計算できる [10, 14]。式 (27) の最小化はカメラが校正されているか否かにかかわらず、画像上の射影変換の最適な推定となっている[20]。

5.3 純粋回転モデル

並進が $\boldsymbol{0}$ でカメラがレンズ中心の周りを回転すれば何の 3 次元情報も得られず、カメラの回転 $\boldsymbol{R}$ のみが推定できる。対応点の組 $\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'\}$ が空間の同一点を表す必要十分条件は次のように書ける。

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0} \tag{29}$$

これは 4 次元データ空間 $\mathcal{X} = \{(x, y, z, x', y', z') | z = 1, z' = 1\} \in \mathcal{R}^6$ に余次元 2 のモデル $\mathcal{S}_R$ を定義する。パラメータ空間 $\mathcal{U}$ は回転行列 $\boldsymbol{R}$ の全体であり、 9 次元空間 $\mathcal{R}^9$ の 3 次元多様体である。回転 $\boldsymbol{R}$ の最適解は次の最小化によって得られる [10]。

$$J[\boldsymbol{R}] = \sum_{\alpha=1}^{N} (\boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha, \boldsymbol{W}_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha) \tag{30}$$

$$\boldsymbol{W}_\alpha = \Big((\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha) \times V_0[\boldsymbol{x}_\alpha] \times (\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}'_\alpha) + \boldsymbol{x}_\alpha \times \boldsymbol{R} V_0[\boldsymbol{x}'_\alpha] \boldsymbol{R}^\top \times \boldsymbol{x}_\alpha\Big)^-_2 \tag{31}$$

この場合も問題を適当に変形すれば、「四元数」を用いた「くりこみ法」によって計算が簡単化される [18]。

6 まとめ

本論文では拘束条件に基づいた誤差のあるデータからの推論を「モデル当てはめ」として定式化し、一般的な数学的枠組みを与えた。本論文のメッセージは単純である。誤差のあるデータへの当てはめに盲目的に最小二乗法を適用してはならない、誤差の原因を注意深く考察し、その挙動を統計的にモデル化し、それから精度の理論限界を導くとともに、その限界を到達する最適な計算法を導出せよ、ということに尽きる。

従来、多くの理論的な研究、特に高級な射影幾何学を用いるものに、誤差をどうモデル化するかに触れないで “最適化” を議論するものが非常に多かった。それらはたいてい、誤差がどの変数になぜ含まれるか、それが同次座標か定数かなどを無視して最小二乗法を無差別に用いている[21]。特異値分解も行列の空間の最小二乗法にほかならないが、これも誤差の由来を考慮せずに乱用されてきた[22]。しかし、最近では誤差に関する統計的な考察とそれに基づく計算法の重要さが次第に認識されつつある。

例えば、 3 次元復元において運動パラメータが得られた後に物体の形状を計算するとき、解のカメラ位置からの二つの視線は誤差のために交わるとは限らない。従来は視線を結ぶ最短線分の中点をとるなどの形式的な処理がされることが多かったが、 Hartley ら [2] は誤差が画像上に生じることから、対応点をエピ極線方程式が厳密に成立するように最小二乗の意味で補正することを提唱した。そして、拘束条件を適切にパラメータ化すると解が 6 次方程式を解いて得られることを示した。これに対して Torr ら [21] は式 (10) に基づく最適補正の方法がすぐれていることを指摘している[23]。

[20] もちろん、カメラが未校正であれば行列 $\mathbf{H}$ を式 (26) の第 2 式のように運動パラメータ $\{\mathbf{t}, \mathbf{R}\}$ と平面パラメータに分解することはできない。式 (26) も画像や空間の射影変換に対する不変式であり、任意の画像座標系と任意の空間座標系で成立する。しかし、誤差の計量的な性質は保たれない。

[21] 誤差を考慮した “統計的” な議論に見えて、実は否なる議論もある。例えば、誤差のないデータに対して $(\ldots) = 0$ となる式が誤差のあるデータに対して成り立たないとき、 $(\ldots)$ の部分が何であるかにかかわらず、 “右辺” に誤差が入るとして $(\ldots) = \varepsilon$ と書き直し、 ε が正規分布に従うと仮定して、最小二乗法を用いるのが最適であるなどと主張するものもある。

[22] 因子分解法 [20] と呼ばれる手法も特異値分解して小さい特異値を切り捨てるという手続きをとり、誤差の統計的な性質を考慮していない。したがって、その解は統計的最適解を得るための初期値としての意味しかない。

[23] ... Comparisons of the computation of $\hat{\mathbf{x}}$ and $\hat{\mathbf{x}}'$ by Hartley and Sturm's method and that of Kanatani have again shown agreement to three or four significant figures, as mentioned, but Kanatani's method is several orders of magnitude faster, being a linear method and hence preferable for rapid evaluation purposes. ... (文献 [21] より)

本論文に示したように、３次元復元のためのモデル当てはめも数学的には曲線当てはめと同じ構造をもっている。 Zhang [26] はコニック当てはめにおける「くりこみ法」を懐疑的に紹介しているが、 Leedan ら [16] は基礎行列の推定とコニックの当てはめが数学的には同じ構造をもつことを指摘するとともに、「くりこみ法」およびその変形によって極めて精度のよい推定ができることを実証している。今後このような統計的な議論が深まり、精度の高い手法[24]が定着していくことが期待される。

謝辞: 本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究Ｃ (No. 09680352) によった。

参考文献

[1] M. A. Fischler and R. C. Bolles, Random sample consensus: A paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography, *Comm. ACM*, **24**-6 (1981), 381–395.

[2] R. I. Hartley and P. Sturm, Triangulation, *American Image Understanding Workshop*, 1994, pp. 957–966.

[3] Iman Triono and K. Kanatani, Automatic recognition of regular figures by geometric AIC, *Proc. IAPR Workshop Machine Vision Applications, Tokyo, Japan, 12–14 November 1996*, pp. 393—396, 1996.

[4] K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1990.

[5] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.

[6] K. Kanatani, Renormalization for motion analysis: Statistically optimal algorithm. *IEICE Trans. Inf. & Sys.* **E 77-D**-11 (1994), 1233–1239.

[7] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **3**-8 (1995), 1865–1873.

[8] 金谷健一, 画像理解のための統計学: 画像の幾何学的解釈の信頼性評価, 情報処理, **37**-1 (1996), 52–60.

[9] 金谷健一, 幾何学的補正問題の最適計算と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **37**-3 (1996), 363–370.

[10] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996.

[11] K. Kanatani, Automatic singularity test for motion analysis by an information criterion, *Proc. 4th European Conf. Computer Vision*, Cambridge, UK, April 1996, pp. 697–708.

[12] 金谷健一, 情報量基準による幾何学的モデル選択, 情報処理学会論文誌, Vol. 37, No. 6 (1996-6), pp. 1073–1080.

[13] 金谷健一, 自己評価を伴うアクティブビジョン, 日本ロボット学会誌, **15**-2 (1997), 268–274.

[14] K. Kanatani and S. Takeda, 3-D motion analysis of a planar surface by renormalization. *IEICE Trans. Inf. & Syst.* **E 78-D**-8 (1995), 1074–1079.

[15] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Infinity and planarity test for stereo vision, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, **E80-D**-8 (1997) to appear.

[16] Y. Leedan and P. Meer, Estimation with bilinear constraints in computer vision, *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, January 1998, Bombay, India, to appear.

[17] R. Lenz, Some applications of representations of Lie algebras and Lie groups, in G. Sommer and J. J. Koenderink (Eds.), *Algebraic Frames for the Perception-Action Cycle*, Lecture Notes in Computer Science 1315, Springer, Berlin, 1997, pp. 114–125.

[18] 太田直哉, 金谷健一, ３次元回転の最適推定と信頼性評価, 電子情報通信学会パターン認識・メディア理解研究会, PRMU97 (1997-10).

[19] 太田直哉, 金谷健一, 木村和広, しきい値を用いないオプティカルフローからの移動物体検出, 情報処理学会コンピュータビジョンとイメージメディア研究会, 97-CVIM-105 (1997), 55–60.

[20] C. Tomasi and K. Kanade, Shape and motion from image system streams under orthography—A factorization method, *Int. J. Comput. Vision*, **9**-2 (1993), 137–154.

[21] P. H. S. Torr and A. Zissermann, Performance characterization of fundamental matrix estimation under image degradation, *Machine Vision Appl.*, **9** (1997), 321–333.

[22] P. H. S. Torr, An assessment of information criteria for motion model selection, *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition*, June 1997, Puerto Rico, pp. 47–53.

[23] P. H. S. Torr, A. FitzGibbon and A. Zisserman, Maintaining multiple motion model hypotheses through many views to recover matching and structure, *Proc. Int. Conf. Computer Vision*, January 1998, Bombay, India, to appear.

[24] P. H. S. Torr, Geometric motion segmentation and model selection, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, *A-356* (1998), to appear.

[25] 都筑広行, 太田直哉, 金谷健一, 最適なロボットの位置決めとその信頼性評価: 一般の運動, 情報処理学会コンピュータビジョンとイメージメディア研究会, 97-CVIM-108 (1997-11).

[26] Z. Zhang, Parameter estimation techniques: A tutorial with application to conic fitting, *Image Vision Comput.*, **15** (1997), 59–76.

---

[24]統計的最適化はアウトライアがないという前提に立っている。本論文でもアウトライア除去の手法について述べたが、従来アウトライアとは仮定した分布 “以外” の分布に従うデータとみなされてきた。そのようなあいまいな定義では効果も限定される。最近では、より効果を高めるためにそれ “以外” の分布をモデル化し、情報量基準などのよる「モデル選択」に帰着させることが試みられている [23, 24]。