

線形代数の 3つの観点

金谷健一

大学のカリキュラムとしての線形代数の最大の問題点は、それを教養課程で、応用と切り離して教えていることであろう。そのために、大学一年生は何のために線形代数を学ぶのか理解できなったり、あるいは目的を誤解して、興味を失ってしまうことが多い。実際、私自身も初めて学んだ時はそうであり、線形代数の本当のおもしろさを知ったのは専門に進んだ後、ずっと後になってからであった(とはいえ、基礎的素養がないと応用にも入れず、応用は専攻によっても違うので、これは教える側のジレンマでもある)。

線形代数には次の3つの観点がある。

- A. ベクトルと行列の計算
- B. 線形空間と線形写像の代数
- C. ベクトル量とテンソル量の幾何

Aの観点からは、「ベクトル」とは数字(実数値または複素数値)が縦に並んだもの(列ベクトル)、あるいは横に並んだもの(行ベクトル)であり、「行列」とは数字が縦横に並んだものである。これらの間にいろいろな数値的演算が定義され、学生は演習問題を通してこれらの演算操作に習熟することが要求される。

Bの観点からは、ベクトルとは抽象的な公理によって定義された「ベクトル空間」の元であり、行列とはこれに作用する「線形写像」の表現である。学生は、列ベクトルや行列は“本当の”ベクトルや線形写像がある基底に関する成分として並べたものに過ぎず、その背後にある“本当の”数学的構造が大切なのだとさとされて、いろいろの抽象的な定理の証明を要求される。

Cの観点からは、ベクトルとは大きさや方向を持つ幾何学的対象であり、行列も複数の方向とある対称性を備えた幾何学的対象である。行列をこのように捉えるとき、これを(2階の)「テンソル」とよぶ。学生は、これらによって空間(一般には n 次元、代表的には3次元)の幾何学的関係を頭の中でイメージすることが要求される。

受験勉強に慣れた学生にはAの観点が一番分かり

やすい。機械的に丸暗記できるし、試験の点も取りやすい。だが、何のためにそのようなことをするのか理解していないと、試験がすんだ途端にすべてが頭から抜けてしまう(仕方がないとあきらめている教師も多い)。

そこで(数学が専門の熱意ある)教師がBの観点を導入すると、もういけない。学生はすっかり参ってしまう。数学者を志す少数の学生はその抽象的な数学的構造の美しさに魅了されるかもしれないが、大多数の学生にとって定理の証明は悪夢であり、線形代数を毛嫌いし完全に脱落するのはこの段階である。

しかし、物理学や工学を専攻する学生は、専門に進んでCの観点から改めて線形代数を見直した時、初めてその意義が理解でき、目の覚める思いがするのではないだろうか(私自身がそうであった)。なにしろ、ベクトルは速度や加速度、テンソルは応力や慣性モーメントなどの具体的物理量として理解することができるからである。

例えば、行列の標準形についての取り扱いでは、Aの観点からは、単に行列に演算操作を施して“見やすく”、“計算に都合のよい”形にすることであり、Bの観点からは“特殊な基底”を選んで、その基底に関して成分を表示することである(一般性の追求を使命とする数学者は“特殊な”ものをとることにあまり熱心ではない)。しかし、Cの観点からはその系の“固有な量”(固有振動数、主応力、主曲率など)と“固有な方向”(応力、慣性モーメントの主軸、曲面の主方向など)を求めることである。物理現象や工学的対象を記述するのにいろいろなパラメータの取り方があることは周知であるから、「座標や基底の変換に対する不変性」を、「どんなパラメータを用いても現象や対象そのものは変わらない」と理解できる。さらに、等価な記述の中でどれが最も“本質的”かを考えることで「標準形」の意義が分かる。

教養課程で挫折しそうな学生諸君は、後できっと展望が開けるのだと自分に言い聞かせて、希望を持って勉強してほしい。

(かなたに けんいち/群馬大学)