「画像の認識・理解シンポジウム (MIRU2008)」2008 年 7 月

Small Algorithm for Fundamental Matrix Computation

Kenichi KANATANI† and Yasuyuki SUGAYA††

††Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

†Department of Information and Computer Sciences,

Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

E-mail: †kanatani@suri.cs.okayama-u.ac.jp, ††sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

Abstract We present a new algorithm for computing the fundamental matrix $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ from corresponding points (x_α, y_α), (x'_α, y'_α), $\alpha = 1, ..., N$, over two images.

2 画像上の対応点 (x_α, y_α), (x'_α, y'_α), $\alpha = 1, ..., N$ が与えられたとき，求める基礎行列 $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ を次のように 6 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ で表し，その「余因子ベクトル」$\boldsymbol{u}^\dagger$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}^\dagger \equiv \mathcal{N}[\begin{pmatrix} u_5u_9 - u_8u_6 \\ u_6u_7 - u_9u_4 \\ u_4u_8 - u_7u_5 \\ u_8u_3 - u_2u_9 \\ u_9u_1 - u_3u_7 \\ u_7u_2 - u_1u_8 \\ u_2u_6 - u_5u_3 \\ u_3u_4 - u_6u_1 \\ u_1u_5 - u_4u_2 \end{pmatrix}] \tag{1}$$

ただし，$\mathcal{N}[\,\cdot\,]$ は単位ベクトルへの正規化を表す．そして，次の 9×9 射影行列を定義する．

$$\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}^\dagger} \equiv \boldsymbol{I} - \boldsymbol{u}^\dagger \boldsymbol{u}^{\dagger\top} \tag{2}$$

提案アルゴリズムは次の通りである．f_0 はスケール定数であり，ほぼ画像サイズにとる．

main

---

1. $\boldsymbol{u}$ に初期値を与え，$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$ と置く．
2. $\hat{x}_\alpha = x_\alpha$, $\hat{y}_\alpha = y_\alpha$, $\hat{x}'_\alpha = x'_\alpha$, $\hat{y}'_\alpha = y'_\alpha$, $\tilde{x}_\alpha = \tilde{y}_\alpha = \tilde{x}'_\alpha = \tilde{y}'_\alpha = 0$ と置く．
3. 次のベクトル $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ と行列 $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ を計算する．

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha\hat{x}'_\alpha + \hat{x}'_\alpha\tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha\tilde{x}'_\alpha \\ \hat{x}_\alpha\hat{y}'_\alpha + \hat{y}'_\alpha\tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha\tilde{y}'_\alpha \\ f_0(\hat{x}_\alpha + \tilde{x}_\alpha) \\ \hat{y}_\alpha\hat{x}'_\alpha + \hat{x}'_\alpha\tilde{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha\tilde{x}'_\alpha \\ \hat{y}_\alpha\hat{y}'_\alpha + \hat{y}'_\alpha\tilde{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha\tilde{y}'_\alpha \\ f_0(\hat{y}_\alpha + \tilde{y}_\alpha) \\ f_0(\hat{x}'_\alpha + \tilde{x}'_\alpha) \\ f_0(\hat{y}'_\alpha + \tilde{y}'_\alpha) \\ f_0^2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha^2 + \hat{x}'^2_\alpha & \hat{x}'_\alpha\hat{y}'_\alpha & f_0\hat{x}'_\alpha & \hat{x}_\alpha\hat{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0\hat{x}_\alpha & 0 & 0 \\ \hat{x}'_\alpha\hat{y}'_\alpha & \hat{x}_\alpha^2 + \hat{y}'^2_\alpha & f_0\hat{y}'_\alpha & 0 & \hat{x}_\alpha\hat{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0\hat{x}_\alpha & 0 \\ f_0\hat{x}'_\alpha & f_0\hat{y}'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{x}_\alpha\hat{y}_\alpha & 0 & 0 & \hat{y}_\alpha^2 + \hat{x}'^2_\alpha & \hat{x}'_\alpha\hat{y}'_\alpha & f_0\hat{x}'_\alpha & f_0\hat{y}_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \hat{x}_\alpha\hat{y}_\alpha & 0 & \hat{x}'_\alpha\hat{y}'_\alpha & \hat{y}_\alpha^2 + \hat{y}'^2_\alpha & f_0\hat{y}'_\alpha & 0 & f_0\hat{y}_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_0\hat{x}'_\alpha & f_0\hat{y}'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ f_0\hat{x}_\alpha & 0 & 0 & f_0\hat{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0\hat{x}_\alpha & 0 & 0 & f_0\hat{y}_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

4. サブプログラム *EFNS* を呼んで，$\boldsymbol{u}$ を更新する．
5. 符号を除いて $\boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{u}_0$ なら $\boldsymbol{u}$ を返して終了する．そうでなければ $\tilde{x}_\alpha$, $\tilde{y}_\alpha$, $\tilde{x}'_\alpha$, $\tilde{y}'_\alpha$ を次のように更新する．

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_\alpha \\ \tilde{y}_\alpha \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)}{(\boldsymbol{u}, V[\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha]\boldsymbol{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}'_\alpha \\ \hat{y}'_\alpha \\ f_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'_\alpha \\ \tilde{y}'_\alpha \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)}{(\boldsymbol{u}, V[\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha]\boldsymbol{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_4 & u_7 \\ u_2 & u_5 & u_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \\ f_0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

6. 次のように更新してステップ 3 に戻る．

$$\boldsymbol{u}_0 \leftarrow \boldsymbol{u}, \quad \hat{x}_\alpha \leftarrow x_\alpha - \tilde{x}_\alpha, \quad \hat{y}_\alpha \leftarrow y_\alpha - \tilde{y}_\alpha,$$
$$\hat{x}'_\alpha \leftarrow x'_\alpha - \tilde{x}'_\alpha, \quad \hat{y}'_\alpha \leftarrow y'_\alpha - \tilde{y}'_\alpha \tag{6}$$

ステップ 4 で呼ぶサブプログラム *EFNS* は次の通りである．

EFNS

---

1. 次の 9×9 行列 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{L}$ を計算する．

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\xi}_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha^\top}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})}, \quad \boldsymbol{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})^2} \tag{7}$$

2. 式 (1) の余因子ベクトル $\boldsymbol{u}^\dagger$ と式 (2) の射影行列 $\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}^\dagger}$ を計算する．
3. 次の 9×9 行列 $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ を計算する．

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{L}, \qquad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}_{\mathbf{u}^\dagger} \boldsymbol{X} \boldsymbol{P}_{\mathbf{u}^\dagger} \tag{8}$$

4. $\boldsymbol{Y}$ の絶対値が小さい二つの固有値に対する単位固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ とし，次のベクトルを計算する．

$$\hat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2 \tag{9}$$

5. 次のベクトルを計算する．

$$\boldsymbol{u}' = \mathcal{N}[\boldsymbol{P}_{\mathbf{u}^\dagger} \hat{\boldsymbol{u}}] \tag{10}$$

6. 符号を除いて $\boldsymbol{u}' \approx \boldsymbol{u}$ であれば $\boldsymbol{u}'$ を返して終了．そうでなければ $\boldsymbol{u} \leftarrow \mathcal{N}[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}']$ としてステップ 1 に戻る．
