

高ノイズレベルにおける最尤楕円当てはめ

中川 裕介* 金谷 健一* 菅谷 保之†

* 岡山大学大学院自然科学研究科 † 豊橋技術科学大学情報工学系

高ノイズレベルにおいて画像上の点列に楕円を当てはめる厳密な最尤推定法を示す。これはデータ点から当てはめた楕円までの垂直距離の二乗和を厳密に最小にするものである。その計算は従来の低ノイズレベルに対する方法を反復するものであり、既存手法に比べて格段に単純な形をしている。しかし、実験によって低ノイズレベルに対する方法と解に意味のある差が現れないことを示し、従来の低ノイズレベルに対する方法で十分であることを示す。

Maximum Likelihood Ellipse Fitting in the Presence of Large Noise

Yuusuke Nakagawa*, Kenichi Kanatani*, and Yasuyuki Sugaya†

*Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

†Department of Information and Computer Sciences,
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

This paper presents an exact maximum likelihood computation for fitting an ellipse to points in the image in the presence of high level noise, minimizing the sum of square orthogonal distances from the data to the fitted ellipse. This can be done by iteratively applying the known method for low level noise, and the computation is extremely simple as compared with existing methods to the same purpose. However, we show by experiments that the high-level noise method and the low level-noise method do not produce any meaningful differences in the resulting solution and that the known low level method is sufficient in practice.

1. まえがき

シーン中の円形や球形の物体を撮影すると一般に楕円に投影され、その投影像からその物体の3次元位置が解析できる[8]。このため、画像から抽出した点列に円や楕円を当てはめることは視覚ロボットを含む広範な応用の基本的な処理の一つである。実際、画像から抽出したエッジ点列が楕円をなすかどうかを判定して、楕円弧を抽出する種々の研究がなされている(文献[18, 20]に詳細なリストがある)。筆者らはノイズを含むデータからの楕円当てはめの最適計算のさまざまな方法を提案し、その精度や計算効率を評価してきた[20, 21]。

これらは金谷の統計的最適化理論[12]に従うものであり、画像のノイズレベルが0の近傍での摂動解析[15]に理論的な基礎を置いている。実際問題では楕円を当てはめる点列は通常、エッジ検出によって得られるのでその不確定(以下「ノイズ」と呼ぶ)は

高々数画素であり、この定式化はよく適合している。

一方、各点の位置がそれ以上にずれるとすれば、それは通常は画像処理の誤差によるものではなく、アウトライア(別の物体の属するなど、本来楕円上にない点)を誤って検出する場合である。したがって、アウトライアを除去するロバスト推定が必要となり、その手法もいろいろ開発されている[17, 18]。そのような処理を行わずに、ノイズが非常に大きい標準偏差をもつ厳密な正規分布に従うとして理論的に最適な楕円を当てはめても、画像による計測や視覚ロボットの制御などの実際問題に対して意味がない。

しかし、これを実際に計算してみることは、従来の低ノイズレベルに対する最適解法がどの程度のノイズまで有効であるのかを確認する手段となる。本論文ではこの観点から高ノイズレベルにおける理想的な条件のもとでの最適に楕円を当てはめる新しい計算法を提案し、その精度と効率を従来の低ノイズレベルに対する方法と比較する。

高ノイズレベルにおいて楕円を最適に当てはめる試みは従来から存在した。各点のノイズが期待値0、

*700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173

{nakagawa, kanatani}@suri.it.okayama-u.ac.jp

†441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1, (0532)44-6760

sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

同一標準偏差の正規分布に従うとすれば、最尤推定の意味で最適な楕円当てはめは、当てはめた楕円の各点からの垂直距離の二乗和を最小にするものであり、Hartley ら [7] は「黄金基準」と呼んだ。これは複雑な非線形最適化問題であり、いろいろな形の数値計算法が考えられている [1, 5, 6, 19]。しかし、そのようにして得られる楕円が従来の低ノイズレベルに対する最適解法とどれだけ違うのかは定量的に評価されていなかった。

本論文では高ノイズレベルにおける楕円の最尤当てはめに従来の低ノイズレベルに対する方法を反復適用する新しい計算法を提案し、精度が低ノイズレベル法とどれだけ変化するかを実験的に評価する。提案手法は従来手法 [1, 5, 6, 19] に比べて著しく単純である。

以下、まず楕円当てはめの数学的枠組みを述べ、次にシミュレーションおよび実画像データに適用し、結果として高ノイズレベル法を用いても低ノイズレベル法に比べて精度に意味のある差が現れないことを示す。これにより、従来の低ノイズレベルに対する方法で十分であることが結論される。

2. 楕円の最適当てはめ

従来の定式化は次の通りである [12, 20, 21]。

2.1 楕円の表現

楕円は次のように表せる [8, 10]。

$$(x, Qx) = 0 \quad (1)$$

以下、ベクトル a, b の内積を (a, b) と書く。また、 x, Q はそれぞれ次の 3 次元ベクトルおよび 3×3 対称行列である。

$$x = \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \quad (2)$$

ただし、 f_0 は任意の定数である¹。式 (1) を行列 Q の要素を用いて書くと次のようになる。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2f_0(Dx + Ey) + f_0^2F = 0 \quad (3)$$

6 次元ベクトル u, ξ を

$$u = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \end{pmatrix}^\top \quad (4)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} x^2 & 2xy & y^2 & 2f_0x & 2f_0y & f_0^2 \end{pmatrix}^\top \quad (5)$$

¹スケールをそろえる目的である。本論文の実験では $f_0 = 600$ としたが、 $f_0 = 1$ としても実際的な問題はない。

と置けば、式 (3) は次のように書ける。

$$(u, \xi) = 0 \quad (6)$$

ベクトル u の大きさは不定であるから $\|u\| = 1$ と正規化する。

式 (3) で表されるのは楕円とは限らず、放物線、双曲線、およびそれらの退化も含み、総称して「コニック」(「円錐曲線」とも呼ばれる [8, 10])。実際、誤差が大きいと楕円上の点列に双曲線が当てはまったりする。それを防ぐ方法もあるが [4]、本論文ではそのような場合も解とみなす。

2.2 KCR の下界

データベクトル ξ_α を次のように書く。

$$\xi_\alpha = \bar{\xi}_\alpha + \Delta\xi_\alpha \quad (7)$$

ここに $\bar{\xi}_\alpha$ は誤差のない理想値であり、 $\Delta\xi_\alpha$ は誤差項である。 ξ_α の共分散行列を次のように定義する。

$$V[\xi_\alpha] = E[\Delta\xi_\alpha \Delta\xi_\alpha^\top] \quad (8)$$

式中の $E[\cdot]$ は誤差分布に関する期待値である。各点の各座標に期待値 0、標準偏差 σ の誤差が独立に加わるとき、式 (5) より、共分散行列 $V[\xi_\alpha]$ は $O(\sigma^4)$ の項を除いて次のように書ける [20, 21]。

$$V[\xi_\alpha] = 4\sigma^2 \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{x}_\alpha^2 + \bar{y}_\alpha^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 \\ 0 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{y}_\alpha^2 & 0 & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 \\ f_0 \bar{x}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4\sigma^2 V_0[\xi_\alpha] \quad (9)$$

ただし、 $V_0[\xi_\alpha]$ は $V[\xi_\alpha]$ から $4\sigma^2$ を除いたものであり、「正規化共分散行列」と呼ぶ。これは点の配置のみによる幾何学的な量であり、これによって統計的な性質と幾何学的な性質が分離される。式 (9) 中の $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ はデータ点 (x_α, y_α) の真の位置 (未知) であり、計算過程では (x_α, y_α) に置き換える²。

推定値 \hat{u} の共分散行列 $V[\hat{u}]$ を次のように定義する。

$$V[\hat{u}] = E[(P_u \hat{u})(P_u \hat{u})^\top] \quad (10)$$

ここに P_u は次の射影行列である (I は単位行列)。

$$P_u = I - uu^\top \quad (11)$$

²そうしても計算結果はほとんど左右されないことがシミュレーションで確認される。

これを作用させるのは、 \mathbf{u} が単位ベクトルに正規化されているため、その定義域が \mathcal{R}^6 の単位（超）球面であり、これを真値 \mathbf{u} における接平面に射影して、その接平面上で誤差を評価するという意味である。

このとき、式 (7) の $\Delta\xi_\alpha$ を期待値 $\mathbf{0}$ 、式 (9) の共分散行列をもつ独立な正規分布に従うとみなすと、 $\hat{\mathbf{u}}$ の任意の不偏推定量に対して次の不等式が成り立つ [11, 12, 14] .

$$V[\hat{\mathbf{u}}] \succ \sigma^2 \left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \right)_5^{-1} \quad (12)$$

ただし、 \succ は左辺から右辺を引いたものが半正値対称行列であることを意味し、 $(\cdot)_r^{-1}$ はランク r の Moore-Penrose の一般逆行列を表す³ . Chernov ら [2] は式 (12) の右辺を「KCR (Kanatani-Cramer-Rao) 下界」と呼んだ . そして、 $\hat{\mathbf{u}}$ が不偏推定量でなくても、 $\sigma \rightarrow 0$ で $\hat{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{u}$ であれば $O(\sigma^4)$ を除いて上式 (12) が成立することを示した .

2.3 楕円当てはめの最尤推定

ノイズ $\Delta\xi_\alpha$ の分布を期待値 $\mathbf{0}$ 、共分散行列 $V[\xi_\alpha] = 4\sigma^2 V_0[\xi_\alpha]$ の独立な正規分布とみなすと、この問題の最尤推定は、制約条件 $(\mathbf{u}, \bar{\xi}_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, \dots, N$ のもとでマハラノビス距離の二乗和

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V_0[\xi_\alpha]_2^{-1} (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (13)$$

を最小にすることである⁴ . これは ξ に対応する 6 次元空間 \mathcal{R}^6 に N 点 $\{\xi_\alpha\}$ が与えられたとき、式 (6) で表される超平面を各点からのマハラノビス距離の二乗和が最小になるように当てはめる問題と解釈できる⁵ .

ラグランジュ乗数を導入して制約条件を除去すれば、式 (13) は次式となる [12, 15, 20, 21].

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha)^2}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \quad (14)$$

これを最小にする解 $\hat{\mathbf{u}}$ の共分散行列 $V[\hat{\mathbf{u}}]$ は式 (12) の右辺の KCR の下界に $O(\sigma^4)$ の項を除いて一致する [12, 15].

³6 次元ベクトル \mathbf{u} が単にベクトルに正規化されているため、ランクが 5 に低下する .

⁴正規化共分散行列 $V_0[\xi_\alpha]$ は 6×6 行列であるが、各データ点 (x_α, y_α) は x, y の 2 方向へしか変動できないので、 $V_0[\xi_\alpha]$ のランクは 2 である .

⁵6 次元空間 \mathcal{R}^6 の N 点 $\{\xi_\alpha\}$ に式 (6) の超平面を各点の正規化共分散行列 $V_0[\xi_\alpha]$ に反比例する重み付き距離の二乗和が最小になるように当てはめるという意味である .

式 (14) の最小化には従来からさまざまな計算法が考えられている . 代表的なものは金谷 [9, 12, 13] の「くりこみ法」、Chojnacki ら [3] の「FNS 法」、Leedan ら [16] の「HEIV 法」、山田ら [21] の「射影ガウス・ニュートン法」である . これらによって得られる解 $\hat{\mathbf{u}}$ の共分散行列 $V[\hat{\mathbf{u}}]$ は KCR の下界 (式 (12) の右辺) に $O(\sigma^4)$ を除いて一致する [12, 15].

3. 高ノイズレベルにおける楕円当てはめ

前節の解析は厳密であり、何の近似も用いていない . 例えば式 (13) から式 (14) への変形は厳密である . しかし、高ノイズレベルにおいて問題になるのは“最尤推定”の解釈である . 式 (14) の最小化は式 (13) の (二乗) マハラノビス距離 J の最小化と同値であるが、マハラノビス距離の最小化が最尤推定であるのはノイズが正規分布のときのみである . なぜなら、そのときのみ尤度関数が $e^{-J/\text{const.}}$ に比例するからである .

しかし、 xy 画像面でのノイズが正規分布だとしても、式 (5) によって変換した ξ 空間のノイズはもはや厳密な正規分布とは限らない . したがって 2.3 節冒頭の「ノイズ $\Delta\xi_\alpha$ が... 正規分布とみなすと」が厳密には成立しない . 同様に式 (12) の KCR 下界も、それを導く仮定「ノイズ $\Delta\xi_\alpha$ の分布を... 正規分布とみなせば」が厳密には成立しない .

そこで次節で xy 画像面でマハラノビス距離を直接に最小化する方法を示し、 \mathbf{u} 空間でのマハラノビス距離の最小化と比較する .

4. 画像面での最尤推定

画像面上の各点のノイズが期待値 $\mathbf{0}$ で各方向に一定の標準偏差を持つ正規分布であれば、マハラノビス距離はユークリッド距離そのものになる . ゆえに、データ点 (x_α, y_α) を式 (2) のベクトルの形に \mathbf{x}_α で表し、その真の位置を $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$ とすると、問題は

$$(\bar{\mathbf{x}}_\alpha, \mathbf{Q}\bar{\mathbf{x}}_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (15)$$

のもとで次の「再投影誤差」を最小にする真の位置 $\bar{\mathbf{x}}_\alpha$ および \mathbf{Q} を求めることに等しい .

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \|\mathbf{x}_\alpha - \bar{\mathbf{x}}_\alpha\|^2 \quad (16)$$

言い換えれば、データ点から当てはめた楕円に下した垂線の長さの二乗和を最小になるような楕円を当てはめることである .

4.1 第1近似

真の位置 \bar{x}_α を直接に推定する代わりに

$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha - \Delta x_\alpha \quad (17)$$

と書き, 補正量 Δx_α を推定する. 式 (16) は次のようになる.

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \|\Delta x_\alpha\|^2 \quad (18)$$

楕円の式 (15) は次のようになる.

$$(x_\alpha - \Delta x_\alpha, Q(x_\alpha - \Delta x_\alpha)) = 0 \quad (19)$$

展開し, 第1近似としてノイズの2次の項を無視すると次式を得る.

$$(Qx_\alpha, \Delta x_\alpha) = \frac{1}{2}(x_\alpha, Qx_\alpha) \quad (20)$$

ノイズは画像面内に生じるので Δx_α の第3成分は0である. すなわち

$$(k, \Delta x_\alpha) = 0 \quad (21)$$

である. ただし, $k = (0, 0, 1)^\top$ と定義する. 制約条件 (17), (21) にラグランジュ乗数を導入すると, 式 (18) を最小化する Δx_α は次のようになる (付録 A).

$$\Delta x_\alpha = \frac{(x_\alpha, Qx_\alpha)P_k Qx_\alpha}{2(Qx_\alpha, P_k Qx_\alpha)} \quad (22)$$

ただし $P_k = \text{diag}(1, 1, 0)$ と定義する ($\text{diag}(\dots)$ は \dots を対角要素とする対角行列). 上式を式 (18) に代入すると次のようになる⁶ (付録 A).

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(x_\alpha, Qx_\alpha)^2}{4(Qx_\alpha, P_k Qx_\alpha)} \quad (23)$$

これを最小にする $\|u\| = 1$ の行列 Q が求まったとして, それを \hat{Q} と置く. これを式 (22) に代入すると, 式 (17) から真の位置 \bar{x} は次のように推定される.

$$\hat{x}_\alpha = x_\alpha - \frac{(x_\alpha, \hat{Q}x_\alpha)P_k \hat{Q}x_\alpha}{2(\hat{Q}x_\alpha, P_k \hat{Q}x_\alpha)}, \quad (24)$$

4.2 第2近似

式 (24) で得られる \hat{x}_α は真の位置 \bar{x}_α の最適な推定値の第1近似である. そこで式 (17) の代わりに真の位置を

$$\bar{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha - \Delta \hat{x}_\alpha \quad (25)$$

と置き, 改めて補正量 $\Delta \hat{x}_\alpha$ を推定する. \hat{x}_α は真の位置 \bar{x}_α の第1近似であるから, 補正量 $\Delta \hat{x}_\alpha$ は式 (17) の補正量 Δx_α より高次の微小量である. 式 (25) を式 (17) に代入すると次のようになる.

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \|\hat{x}_\alpha + \Delta \hat{x}_\alpha\|^2 \quad (26)$$

ただし, 次のように置いた.

$$\tilde{x}_\alpha = x_\alpha - \hat{x}_\alpha \quad (27)$$

楕円の式 (9) は次のように書ける.

$$(\hat{x}_\alpha - \Delta \hat{x}_\alpha, Q(\hat{x}_\alpha - \Delta \hat{x}_\alpha)) = 0 \quad (28)$$

展開して高次の微小量 $\Delta \hat{x}_\alpha$ の2次の項を無視すると, 次のようになる.

$$(Q\hat{x}_\alpha, \Delta \hat{x}_\alpha) = \frac{1}{2}(\hat{x}_\alpha, Q\hat{x}_\alpha) \quad (29)$$

$\Delta \hat{x}_\alpha$ は Δx_α よりも高次の微小量であるから, その2次の項を無視した (29) は式 (20) に比べて楕円の式 (9) のより高次の近似である. 上式および制約条件

$$(k, \Delta \hat{x}_\alpha) = 0 \quad (30)$$

にラグランジュ乗数を導入すると, 式 (26) を最小にする $\Delta \hat{x}_\alpha$ は次のようになる (付録 B).

$$\Delta \hat{x}_\alpha = \frac{\left((\hat{x}_\alpha, Q\hat{x}_\alpha) + 2(Q\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha) \right) P_k Q\hat{x}_\alpha}{2(Q\hat{x}_\alpha, P_k Q\hat{x}_\alpha)} - \tilde{x}_\alpha \quad (31)$$

式 (31) を代入すると式 (26) は次のように書ける (付録 B).

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\left((\hat{x}_\alpha, Q\hat{x}_\alpha) + 2(Q\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha) \right)^2}{4(Q\hat{x}_\alpha, P_k Q\hat{x}_\alpha)} \quad (32)$$

これを最小にする $\|u\| = 1$ の行列 Q が求まったとして, それを \hat{Q} と置く. これを式 (31) に代入すると, 式 (25) から真の位置 \bar{x} は次のように推定される.

$$\hat{\hat{x}}_\alpha = x_\alpha - \frac{\left((\hat{x}_\alpha, \hat{Q}\hat{x}_\alpha) + 2(\hat{Q}\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha) \right) P_k \hat{Q}\hat{x}_\alpha}{2(\hat{Q}\hat{x}_\alpha, P_k \hat{Q}\hat{x}_\alpha)}, \quad (33)$$

このようにして得られた $\hat{\hat{x}}_\alpha$ は式 (24) の \hat{x}_α よりも \bar{x}_α のさらによい近似になっている. そこで, これを改めて \hat{x}_α と置き直して, さらに高次の補正量を推定して, これを収束するまで反復する.

⁶ 「Sampson 誤差」とも呼ばれる [7].

4.3 楕円の計算

残る問題は式 (23), (32) を最小にする $\|u\| = 1$ の行列 Q を求めることである。式 (4) の u と式 (5) の ξ と用いると、次式が恒等的に成り立つことがわかる。

$$(x_\alpha, Qx_\alpha) = \frac{1}{f_0^2}(u, \xi_\alpha) \quad (34)$$

$$(Qx_\alpha, P_k Qx_\alpha) = \frac{1}{f_0^2}(u, V_0[\xi_\alpha]u) \quad (35)$$

したがって、式 (12) は次のように書き直せる。

$$E = \frac{1}{4f_0^2} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha)^2}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} \quad (36)$$

これは定数倍を除いて式 (14) そのものである。したがって、これを最小にする $\|u\| = 1$ となる Q は従来の方法 (FNS 法 [3], HEIV 法 [16], 射影ガウス・ニュートン法 [21] など) で計算できる。一方、ベクトル $\hat{\xi}_\alpha$ を

$$\hat{\xi}_\alpha = \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha^2 + 2\hat{x}_\alpha\tilde{x}_\alpha \\ 2(\hat{x}_\alpha\hat{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha\tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha\tilde{y}_\alpha) \\ \hat{y}_\alpha^2 + 2\hat{y}_\alpha\tilde{y}_\alpha \\ 2f_0(\hat{x}_\alpha + \tilde{x}_\alpha) \\ 2f_0(\hat{y}_\alpha + \tilde{y}_\alpha) \\ f_0^2 \end{pmatrix} \quad (37)$$

と定義すると、次のように書き直せる。

$$(\hat{x}_\alpha, Q\hat{x}_\alpha) + 2(Q\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha) = \frac{1}{f_0^2}(u, \hat{\xi}_\alpha) \quad (38)$$

$$(Q\hat{x}_\alpha, P_k Q\hat{x}_\alpha) = \frac{1}{f_0^2}(u, V_0[\hat{\xi}_\alpha]u) \quad (39)$$

ただし、 $V_0[\hat{\xi}_\alpha]$ は式 (9) において、 x_α, y_α をそれぞれ $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha$ に置き換えたものである。上式を用いると式 (32) は次のように書き直せる。

$$E = \frac{1}{4f_0^2} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \hat{\xi}_\alpha)^2}{(u, V_0[\hat{\xi}_\alpha]u)} \quad (40)$$

これは定数倍を除いて (14) と同じ形をしているので、これを最小にする $\|u\| = 1$ となる Q は従来の方法で計算できる。

4.4 計算の手順

以上より、次の手順が得られる。

1. 6次元ベクトル u_0 を $u_0 = 0$ と置く。
2. 次のように置く ($\alpha = 1, \dots, N$)。

$$\hat{x}_\alpha = x_\alpha, \hat{y}_\alpha = y_\alpha, \tilde{x}_\alpha = \tilde{y}_\alpha = 0 \quad (41)$$

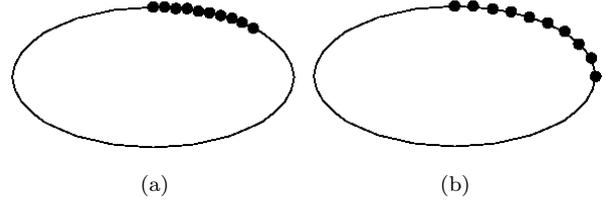


図 1: 10 個の点を通る楕円。(a) 短い弧。(b) 長い弧。

3. 式 (37) の $\hat{\xi}_\alpha$ を計算する ($\alpha = 1, \dots, N$)。
4. 式 (9) において、 x_α, y_α をそれぞれ $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha$ に置き換えた $V_0[\hat{\xi}_\alpha]$ を計算する ($\alpha = 1, \dots, N$)。
5. 次式を最小にする 6次元単位ベクトル u を計算する。

$$E = \frac{1}{4f_0^2} \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \hat{\xi}_\alpha)^2}{(u, V_0[\hat{\xi}_\alpha]u)} \quad (42)$$

6. 符号を除いて $u \approx u_0$ なら u を返して終了する。そうでなければ $\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha$ を次のように更新する。

$$\tilde{x}_\alpha \leftarrow \frac{(u, \hat{\xi}_\alpha) P_k Q \hat{x}_\alpha}{2(u, V_0[\hat{\xi}_\alpha]u)}, \quad (43)$$

7. $u_0, \hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha$ を次のように更新してステップ 3 に戻る。

$$u_0 \leftarrow u, \hat{x}_\alpha \leftarrow x_\alpha - \tilde{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha \leftarrow y_\alpha - \tilde{y}_\alpha \quad (44)$$

これは従来の方法 [1, 5, 6, 19] と数学的に等価であるが、従来の複雑な数値的探索手法に比べると著しく単純な形である。

以下、区別のために、2 節に述べた ξ 空間で式 (13) のマハラノビス距離を最小にする (すなわち式 (14) を最小にする) 方法を「低ノイズレベル法」、本節の xy 画像面で式 (16) のマハラノビス距離 (= 再投影誤差) を最小にする方法を「高ノイズレベル法」と呼ぶ。

上記の手順から、低ノイズレベル法はステップ 5 で計算を終了することに相当し、それ以降の反復は先に指摘したように、 ξ 空間における“ノイズの非正規性を補正する手段であると解釈できる。

5. 実験

5.1 設定

図 1 は 10 点を通る楕円を示す。図 1(a) は 10 点が短い弧上に密集しており、図 1(b) では長い弧上に分散している。楕円は長軸半径、短軸半径がそれぞれ 100 画素、50 画素と想定している。各点の x, y 座標

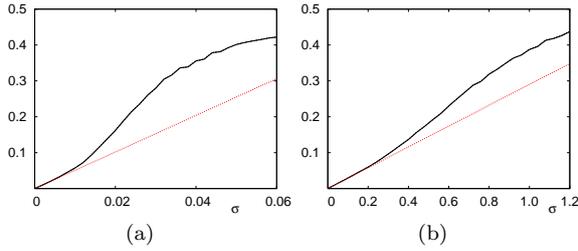


図 2: 図 1(a),(b) に対する解の平方平均二乗誤差。横軸はノイズの標準偏差 σ 。高ノイズレベル法 (実線) と低ノイズレベル法 (破線) のプロットは重なる。点線: KCR 下界。

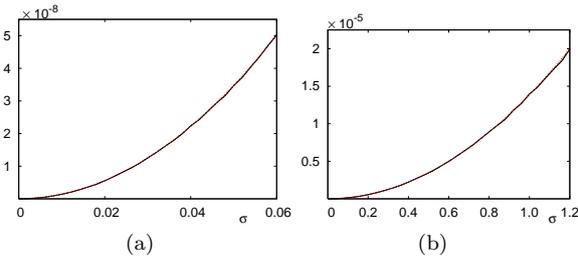


図 3: 図 1(a),(b) に対する解の平均再投影誤差。高ノイズレベル法 (実線) と低ノイズレベル法 (破線) のプロットは重なる。点線: $(N-5)\sigma^2/f_0^2$ 。鎖線: Sampson 誤差の平均。

に平均 0, 標準偏差 σ 画素の正規分布に従う乱数ノイズを独立に加え, これに楕円を当てはめた。

実験では, 4.4 節の手順のステップ 5 の式 (42) の最小化に Chojnacki ら [3] の FNS 法を変形したものをを用いた。この変形とは, 反復過程で現在の値 u から次の u' が得られたとき, これを用いるのではなく両者の平均 $(u + u')/2$ を単位ベクトルに正規化したものを次の値として反復するものである。実験によって, これによってノイズが大きいときに収束性が改善されることが確認された。これを仮に「安定化 FNS 法」と呼ぶ。初期値には精度がよいことで知られる Taubin 法を用い [15, 21], 反復の終了条件は Q の更新量がノルムで測って 10^{-6} 以下とした。

5.2 精度の比較

図 2 は精度の評価尺度として, 各 σ に対して 10,000 回の独立に試行し, 式 (10) に対応する次の平方平均二乗誤差 D を調べたものである。

$$D = \sqrt{\frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \|P_u \hat{u}^{(a)}\|^2} \quad (45)$$

ここに, $\hat{u}^{(a)}$ は a 回目の試行の解 $\hat{Q}^{(a)}$ のベクトル表現である。実線が高ノイズレベル法, 破線が低ノイズレベル法であり, グラフが完全に重なっている

(数値はわずかに異なる)。点線は対応する KCR 下界 (= 式 (12) の右辺のトレース) である。

5.3 再投影誤差の比較

図 3 の実線はデータ x_α の推定した真の位置 \hat{x}_α の再投影誤差 (= 当てはめた楕円までの垂線の長さの二乗和)

$$\hat{E} = \sum_{\alpha=1}^N \|x_\alpha - \hat{x}_\alpha\|^2 \quad (46)$$

の 10,000 回の平均値をプロットしたものである。

破線は低ノイズレベル法の再投影誤差 (= 低ノイズレベル法で当てはめた楕円までのデータ x_α からの垂線の長さの二乗和) の平均値である。これは次のようにして計算した。低ノイズレベル法は 4.4 節の手順のステップ 5 で終了することに相当し, その後, 計算された楕円 Q を更新せず, ステップ 3~7 を反復して楕円の式を満たす \hat{x}_α を計算し, 式 (46) を評価した。これによって, データからその楕円に下した垂線の長さの二乗和が計算される。

さらに 4.4 節の手順のステップ 5 で第 1 近似を計算した段階での (40) の E の値 (「Sampson 誤差」と呼ばれる) の平均を鎖線でプロットした。そして, 比較として点線で $(N-5)\sigma^2/f_0^2$ (N は対応点数) を示した。これは $f_0^2 E/4\sigma^2$ が第 1 近似として自由度 $N-5$ の χ^2 分布に従い, したがって E はその期待値 $(N-5)\sigma^2/f_0^2$ にほぼ等しいと期待されるからである。

図からわかるように, 高ノイズレベル法の再投影誤差も低ノイズレベル法の再投影誤差も Sampson 誤差もグラフが一致する (数値はわずかに異なる)。

5.4 解の変動

図 2, 3 では図 1(a), (b) のそれぞれに対して横軸を $\sigma = 0 \sim 0.06, 0 \sim 1.2$ としているが, これは十分広い誤差範囲であり, 図 2 からわかるように, 当てはめた楕円の誤差が 0.5 近くまで達している。楕円 (3×3 行列表示 Q あるいは 6 次元ベクトル表示 u) はノルム 1 に正規化されているから, 誤差が 0.5 ということは約 50% の誤差を含むということであり, そのような楕円からロボットを制御したり, 物体の 3 次元位置を計算しても意味がない。したがって, これ以上大きなノイズを与えて調べる必要はないと考えられる。

注意すべきことは図 2 の「平均平方二乗誤差」は当てはめた楕円の「標準偏差」に相当するものであ

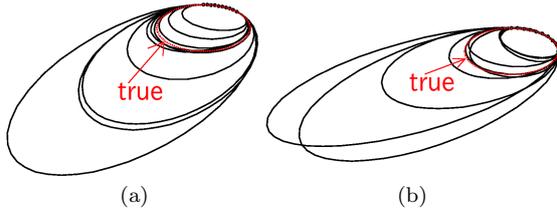


図 4: 図 1 のデータ (a) に対して $\sigma = 0.05$, (b) に対して $\sigma = 1.0$ のノイズをランダムに加えて得られた楕円 10 例．点線は真の楕円形状．



図 5: 円形物体をわずかに含む画像から検出したエッジ画像 (左), および楕円弧をなす 148 点に当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したもの (右). 細線は最小二乗法, 白線は Taubin 法, 太線は最尤推定解．

る．すなわちノイズによっては正しい楕円が当てはまることもあり, またかけ離れた楕円が当てはまることもあり, この程度の変動をするという意味である．このような変動はデータにノイズが含まれる限り避けることができず, その理論的な下界が KCR 下界である．

この変動を具体的に見るために図 1(a), (b) のデータ点にそれぞれ $\sigma = 0.05$, $\sigma = 1.0$ のノイズをランダムに加えて得られた 10 例の楕円を図 4(a), (b) に重ねて示す．図中の点線が真の楕円である．それぞれのノイズレベルではこれ以上よい精度の当てはめは原理的に不可能である．

5.5 実画像例

図 5 の左は円形物体をわずかに含む画像から岡部ら [18] の方法で検出したエッジ画像である．右はその楕円弧をなす 148 点に最小二乗法 [21], Taubin 法 [21], および最尤推定 (低ノイズレベル法も高ノイズレベル法も解は一致) で当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したものである．図 6 は円形物体を大きく含む画像 (414 点) の場合である．

6. まとめ

本論文では高ノイズレベルにおいて画像上の点列に楕円を当てはめる厳密な最尤推定法を示した．これはデータ点から当てはめた楕円までの垂直距離の二乗和を厳密に最小にするものであり, 従来の低ノイ



図 6: 円形物体を大きく含む画像から検出したエッジ画像 (左), および楕円弧をなす 414 点に当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したもの (右): 細線は最小二乗法, 白線は Taubin 法, 太線は最尤推定解．

ズレベルに対する方法を反復して実現される．これは既存手法に比べて格段に単純な形をしている．そして, シミュレーション実験によって次のことを確認した．

- 低ノイズレベル法 (Sampson 誤差の最小化) および高ノイズレベル法 (再投影誤差の最小化) によって当てはめた楕円に実質的な差がない．すなわち
- 6 次元データ ξ 空間でのマハラノビス距離の最小化も画像上でのマハラノビス距離の最小化も実質的な差がない．

したがって, 実際問題では低ノイズレベル法で十分であり, ξ 空間のノイズの非正規性は考慮する必要がない．精度向上に必要なものは厳密な最尤推定ではなく, 楕円弧以外の点 (アウトライア) が混入することを防ぐロバスト推定であろう．

参考文献

- [1] A. Björck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, PA, U.S.A., 1996.
- [2] N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47-4** (2004-11), 713–728.
- [3] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22-11** (2000-11), 1294–1303.
- [4] A. Fitzgibbon, M. Pilu and R. B. Fisher, Direct least square fitting of ellipses, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **21-5** (1999-5), 476–480.
- [5] W. Gander, H. Golub, and R. Strelbel, Least-squares fitting of circles and ellipses, *BIT*, **34-4** (1994-12), 558–578.
- [6] M. Harker and P. O’Leary, First order geometric distance (The myth of Sampson’s), *Proc. 17th Brit. Mach. Vis. Conf.*, September 2006, Edinburgh, U.K., Vol. 1, pp. 87–96.
- [7] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.
- [8] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [9] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35-2** (1994-2), 201–209.
- [10] 金谷健一, 「空間データの数理—3次元コンピューティングに向けて—」, 朝倉書店, 1995.

- [11] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36-8** (1995-8), 1865–1873.
- [12] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, 2005.
- [13] 金谷健一, くりこみ法その後: 波紋と発展, 情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-139-5 (2003-7), 33–40.
- [14] 金谷健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
- [15] 金谷健一, 幾何学的当てはめの高次誤差解析, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-156-18 (2006-11), 147–154.
- [16] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37-2** (2000-6), 127–150.
- [17] P. Meer, Robust techniques for computer vision, in G. Medioni and S. B. Kang (Eds.), *Emerging Topics in Computer Vision*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, U.S.A., 2004, pp. 107–190.
- [18] 岡部光生, 金谷健一, 太田直哉, 楕円成長法による円形物体の自動検出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J85-D-II-12** (2002-12), 1823–1831.
- [19] P. Sturm and P. Gargallo, Conic fitting using the geometric distance, *Proc. 8th Asian Conf. Comput. Vision (ACCV2007)*, November 2007, Tokyo, Japan, Vol. 2, pp. 784–795.
- [20] 山田純平, 金谷健一, 超精度の楕円当てはめ, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-151-15 (2005-11), 197–114.
- [21] 山田純平, 金谷健一, 菅谷保之, 楕円当てはめの高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-154-36 (2006-5), 339–346.

付録 A

式 (20), (21) のもとで式 (18) を最小化するためにラグランジュ乗数 $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ を導入して

$$\sum_{\alpha=1}^N \|\Delta x_\alpha\|^2 - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha (Qx_\alpha, \Delta x_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^N \mu_\alpha (k, \Delta x_\alpha) \quad (47)$$

と置き, Δx_α で微分して 0 と置くと次のようになる.

$$2\Delta x_\alpha - \lambda_\alpha Qx_\alpha - \mu_\alpha k = 0 \quad (48)$$

両辺に $P_k = \text{diag}(1, 1, 0)$ を掛けると, $P_k \Delta x_\alpha = \Delta x_\alpha$, $P_k k = 0$ であるから, 次のようになる.

$$2\Delta x_\alpha - \lambda_\alpha P_k Qx_\alpha = 0 \quad (49)$$

ゆえに次のように書ける.

$$\Delta x_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2} P_k Qx_\alpha \quad (50)$$

これを式 (20) に代入すると次のようになる.

$$(Qx_\alpha, \frac{\lambda_\alpha}{2} P_k Qx_\alpha) = \frac{1}{2} (x_\alpha, Qx_\alpha) \quad (51)$$

すなわち次のようになる.

$$\lambda_\alpha = \frac{(x_\alpha, Qx_\alpha)}{(Qx_\alpha, P_k Qx_\alpha)} \quad (52)$$

したがって式 (50) は式 (22) のように書ける. それを式 (14) に代入すると, 次のようにして式 (23) が得られる.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\alpha=1}^N \left\| \frac{(x_\alpha, Qx_\alpha) P_k Qx_\alpha}{2(x_\alpha, QP_k Qx_\alpha)} \right\|^2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{(x_\alpha, Qx_\alpha)^2 \|P_k Qx_\alpha\|^2}{4(Qx_\alpha, P_k Qx_\alpha)^2} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(x_\alpha, Qx_\alpha)^2}{4(Qx_\alpha, P_k Qx_\alpha)} \end{aligned} \quad (53)$$

ただし, 式変形 $\|P_k Qx_\alpha\|^2 = (P_k Qx_\alpha, P_k Qx_\alpha) = (Qx_\alpha, P_k^2 Qx_\alpha) = (Qx_\alpha, P_k Qx_\alpha)$ を用いた.

付録 B

式 (29), (30) のもとで式 (26) を最小にするためにラグランジュ乗数 $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ を導入して

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^N \|\tilde{x}_\alpha + \Delta \tilde{x}_\alpha\|^2 - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha (Q\tilde{x}_\alpha, \Delta \tilde{x}_\alpha) \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^N \mu_\alpha (k, \Delta \tilde{x}_\alpha) \end{aligned} \quad (54)$$

と置き, $\Delta \tilde{x}_\alpha$ で微分して 0 と置くと次のようになる.

$$2(\tilde{x}_\alpha + \Delta \tilde{x}_\alpha) - \lambda_\alpha Q\tilde{x}_\alpha - \mu_\alpha k = 0 \quad (55)$$

両辺に P_k を掛けると, \tilde{x}_α は式 (27) の定義より $P_k \tilde{x}_\alpha = \tilde{x}_\alpha$ であるから, 次のようになる.

$$2\tilde{x}_\alpha + 2\Delta \tilde{x}_\alpha - \lambda_\alpha P_k Q\tilde{x}_\alpha = 0 \quad (56)$$

ゆえに次式を得る.

$$\Delta \tilde{x}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2} P_k Q\tilde{x}_\alpha - \tilde{x}_\alpha \quad (57)$$

これを式 (29) に代入すると次のようになる.

$$(Q\tilde{x}_\alpha, \frac{\lambda_\alpha}{2} P_k Q\tilde{x}_\alpha - \tilde{x}_\alpha) = \frac{1}{2} (\tilde{x}_\alpha, Q\tilde{x}_\alpha) \quad (58)$$

これから次式が得られる.

$$\lambda_\alpha = \frac{(\tilde{x}_\alpha, Q\tilde{x}_\alpha) + 2(Q\tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha)}{(Q\tilde{x}_\alpha, P_k Q\tilde{x}_\alpha)} \quad (59)$$

これを式 (57) に代入すると式 (31) が得られる. それを式 (26) に代入すると, 次のようにして式 (32) が得られる.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\alpha=1}^N \left\| \frac{((\tilde{x}_\alpha, Q\tilde{x}_\alpha) + 2(Q\tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha)) P_k Q\tilde{x}_\alpha}{2(Q\tilde{x}_\alpha, P_k Q\tilde{x}_\alpha)} \right\|^2 \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{((\tilde{x}_\alpha, Q\tilde{x}_\alpha) + 2(Q\tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha))^2 \|P_k Q\tilde{x}_\alpha\|^2}{4(Q\tilde{x}_\alpha, P_k Q\tilde{x}_\alpha)^2} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{((\tilde{x}_\alpha, Q\tilde{x}_\alpha) + 2(Q\tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha))^2}{4(Q\tilde{x}_\alpha, P_k Q\tilde{x}_\alpha)} \end{aligned} \quad (60)$$