

# 幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の統一的計算法

金谷 健一\*

菅谷 保之†

\* 岡山大学大学院自然科学研究科

† 豊橋技術科学大学情報工学系

本論文では幾何学的当てはめの厳密な最尤推定の計算法を統一的に示す。従来はデータを計算に都合のよい形に変換した空間において正規分布に従うノイズが仮定されていたが、本論文では元のデータ空間での正規分布ノイズを仮定する。そして、その最尤推定の計算を従来の方法の反復に帰着させる統一的な手法を提案する。例としてこれを楕円の当てはめと基礎行列の計算に適用する。さらに、この方法が最適補正にも応用可能であり、楕円への垂線やステレオ画像からの三角測量の計算法が得られることを示す。過去にはこれらは個別に研究されていたが、本論文によってこれらが統一的に導かれることが示される。

## Unified Computation of Strict Maximum Likelihood for Geometric Fitting

Kenichi Kanatani\* and Yasuyuki Sugaya†

\*Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

†Department of Information and Computer Sciences,  
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

A new numerical scheme is presented for strictly computing maximum likelihood (ML) of geometric fitting problems. While conventional methods first transform the data into a computationally convenient form and then assume Gaussian noise in the transformed space, our method assumes Gaussian noise in the original data space. It is shown that the strict ML solution can be computed by iteratively using conventional methods. Then, our method is applied to ellipse fitting and fundamental matrix computation. Our method also encompasses optimal correction, computing, e.g., perpendiculars to an ellipse and triangulating stereo images. In the past, such applications have been studied individually. Our method generalizes them from a unified point of view.

### 1. まえがき

本論文では「幾何学的当てはめ [9]」と呼ばれるコンピュータビジョンによく現れる計算の厳密な最尤推定の計算法を統一的に示す。「厳密な」というのは、従来はデータを計算に都合のよい形に変換した空間において正規分布に従うノイズが仮定されていたが [11, 19, 22], 本論文では元のデータ空間での正規分布ノイズを仮定するという意味である。「統一的に」というのは、過去に個々の問題ごとに得られていた結果が本論文の一般論の特別な場合として得られるという意味である。例として、本論文の一般論から楕円の当てはめの中川ら [18] の方法や基礎行列の計算の金谷ら [14] の方法が得られることを示す。

さらに、本論文の一般論は「最適補正 [9]」と呼ばれる問題をも包括している。最適補正の応用としては、楕円への垂線やステレオ画像からの三角測量の

計算法が菅谷ら [20] や金谷ら [15] によって個別に研究されているが、これらも本論文の一般論から導かれることを示す。以下、まず 2, 3, 4 節で従来の定式化を整理する。5 節からが本論文の新提案である。

### 2. 幾何学的当てはめ

「幾何学的当てはめ」とは誤差のあるベクトルデータ  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  にパラメータ  $u$  を含む陰関数の拘束条件

$$F(x; u) = 0 \quad (1)$$

を当てはめる問題である [9]。具体的には

$$F(x_\alpha; u) \approx 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (2)$$

となる  $u$  を求めることである。コンピュータビジョンの多くの問題は、このようにして求めた  $u$  から画像中の物体の位置や形状や運動を推定するという定式化がなされている。

式 (1) 中の  $F(x; u)$  は一般に  $x$  の複雑な非線形関数であるが、未知パラメータ  $u$  に関しては線形であっ

\*700-8530 岡山市津島中 3-1-1, (086)251-8173

kanatani@suri.cs.okayama-u.ac.jp

†441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1, (0532)44-6760

sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

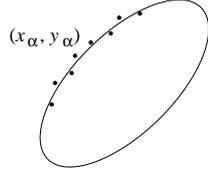


図 1: 点列に楕円を当てはめる

たり, パラメータをつけ直して線形に表せることが多い. そのような場合は式 (1) が次の形に表せる.

$$(\xi(x), u) = 0 \quad (3)$$

ただし, 以下ベクトル  $a, b$  の内積を  $(a, b)$  と書く. ベクトル  $\xi(x)$  の各要素  $\xi_i(x)$  はパラメータ  $u_i$  のかかっている  $x$  の (非線形) 項をまとめたものである. 式 (1) にパラメータのかかっていない  $x$  の項が足されている場合も, 形式的に値 1 がかかっているとみなして, その 1 を  $u$  の最終成分とみなす. その結果, 式 (3) はパラメータ  $u$  を定数倍しても同じ意味を持つ. このため必ずしも  $u$  の最終成分を 1 とする必要はなく, 任意に正規化してよい (例えば  $\|u\| = 1$ ).

【例 1】 (楕円の当てはめ) とえられた点  $(x_\alpha, y_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  に楕円

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey) + F = 0 \quad (4)$$

を当てはめる問題を考える (図 1).  $\xi(x, y), u$  を

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= (x^2 \ 2xy \ y^2 \ 2x \ 2y \ 1)^\top, \\ u &= (A \ B \ C \ D \ E \ F)^\top \end{aligned} \quad (5)$$

と定義すると, 式 (4) は式 (3) の形になる [22].

【例 2】 (基礎行列の計算) 同一シーンを異なる位置から撮影した 2 画像において, 第 1 画像の点  $(x, y)$  が第 2 画像の点  $(x', y')$  に対応しているとき, 両者は次の「エピ極線方程式」を満たす [8].

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

ただし,  $F$  はそれぞれの画像を撮影したカメラの相対位置や内部パラメータに依存する (シーンや各点の位置には依らない) ランク 2 の行列であり, 「基礎行列」と呼ばれる. これを画像中の対応点から計算することにより, カメラ位置やシーンの 3 次元形状を計算することができる [12] (図 2). このとき,

$$\begin{aligned} \xi(x, y, x', y') &= (xx' \ xy' \ xyx' \ yy' \ yx' \ y'1)^\top, \\ u &= (F_{11} \ F_{12} \ F_{13} \ F_{21} \ F_{22} \ F_{23} \ F_{31} \ F_{32} \ F_{33})^\top \end{aligned} \quad (7)$$

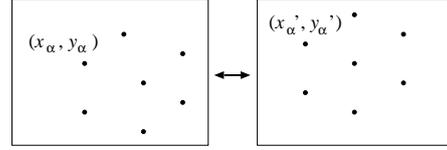


図 2: 2 画像の対応点から基礎行列を計算する

と定義すると, 式 (6) は式 (3) の形になる [19].

### 3. $\xi$ 空間の正規分布モデル

ノイズを含むデータから最適な推定を行うためには, 次の二つを指定する必要がある.

- ノイズモデル: ノイズがどのような統計的な性質を持つと考えるか.
- 最適性の基準: どのような解を最適と考えるか.

式 (3) の形の拘束条件のもとでよく用いられるノイズモデルは,  $x_\alpha$  を変換した  $\xi_\alpha = \xi(x_\alpha)$  を, その真値  $\bar{\xi}_\alpha$  に期待値 0, 共分散行列  $V[\xi_\alpha]$  の正規分布に従うノイズが独立に加わったものとみなすものである. 例えば, 元のデータ  $x_\alpha$  が真値  $\bar{x}_\alpha$  に期待値 0, 共分散行列  $V[x_\alpha]$  のノイズを独立に加えたものであるとき, 変換した  $\xi_\alpha = \xi(x_\alpha)$  の共分散行列  $V[\xi_\alpha]$  を次のように評価する.

$$V[\xi_\alpha] = \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha V[x_\alpha] \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top \quad (8)$$

ただし,  $(\partial \xi / \partial x)$  は写像  $\xi(x)$  のヤコビ行列であり,  $(\partial \xi / \partial x)_\alpha$  は  $x = x_\alpha$  を代入することを意味する.

【例 3】 (楕円の当てはめ) 各点  $(x_\alpha, y_\alpha)$  の  $x$  座標,  $y$  座標に独立に期待値 0, 標準偏差  $\sigma$  のノイズが加わると, 式 (5) によって変換した  $\xi_\alpha$  の共分散行列は次のように書ける [22].

$$V[\xi_\alpha] = 4\sigma^2 \begin{pmatrix} x_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & 0 & x_\alpha & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 & x_\alpha y_\alpha & y_\alpha & x_\alpha & 0 \\ 0 & x_\alpha y_\alpha & y_\alpha^2 & 0 & y_\alpha & 0 \\ x_\alpha & y_\alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_\alpha & y_\alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

【例 4】 (基礎行列の計算) 各対応点  $(x_\alpha, y_\alpha)$ ,  $(x'_\alpha, y'_\alpha)$  の  $x$  座標,  $y$  座標に独立に期待値 0, 標準偏差  $\sigma$  のノイズが加わると, 式 (7) によって変換した  $\xi_\alpha$  の共分散行列は次のように書ける [19].

$$V[\xi_\alpha] = \sigma^2 \times$$

$$\begin{pmatrix} x_\alpha^2 + x_\alpha'^2 & x_\alpha y_\alpha & x_\alpha y_\alpha' & x_\alpha' & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & x_\alpha & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha'^2 & x_\alpha y_\alpha' & 0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & x_\alpha & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & y_\alpha' & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & y_\alpha^2 + x_\alpha'^2 & x_\alpha y_\alpha' & x_\alpha' & y_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & x_\alpha y_\alpha' & y_\alpha^2 + y_\alpha'^2 & y_\alpha' & 0 & y_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_\alpha' & y_\alpha' & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_\alpha & 0 & 0 & y_\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_\alpha & 0 & 0 & y_\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

#### 4. $\xi$ 空間の最尤推定

ノイズモデルが与えられたとき，最適性の基準としてよく用いられるのは「最尤推定」である．これは確率密度にデータを代入して得られる尤度を最大にするものであり，高次の誤差項を除いて精度の理論限界（「KCR 下界 [10]」）を達成するという利点がある [10]．尤度を最大にする代わりにその対数の符号を換えたものを最小化してもよい．

ノイズモデルとして前節の  $\xi$  空間での正規分布を仮定すると，最尤推定は次の「マハラノビス距離」(の二乗和) の最小化となる．

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V[\xi_\alpha]^{-1} (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (11)$$

これを拘束条件

$$(\bar{\xi}_\alpha, \mathbf{u}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (12)$$

のもとで最小にする  $\bar{\xi}_\alpha, \mathbf{u}$  を求める．式 (12) は  $\bar{\xi}_\alpha$  に関して線形であるから，ラグランジュ乗数を導入してこれを消去することができる．その結果，式 (11) は次式となる<sup>1</sup>[11]．

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\xi_\alpha, \mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}, V[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \quad (13)$$

この定式化がよく行われるのは，式 (13) を最小化する数値計算法が確立しているからである [11]．代表的なものは Chojnacki ら [3] の「FNS 法」，Leedan ら [16] の「HEIV 法」，および「射影的ガウス・ニュートン法」 [19, 22] がある．これらはパラメータ  $\mathbf{u}$  に特別の制約がない場合であるが，基礎行列  $F$  の計算では  $F$  がランク 2 という制約がある．そのような制約のある場合に式 (13) を最小化する方法として FNS

<sup>1</sup>式 (5), (7) のように  $\xi$  が定数の成分を含むと，式 (9), (10) のように共分散行列  $V[\xi_\alpha]$  は特異行列となる．このときは式 (11) 中の  $V[\xi_\alpha]^{-1}$  を一般逆行列に置きかえれば， $\xi_\alpha$  の誤差の生じる成分のみ考えることになる．その場合でも式 (13) が成り立つ [9]．

法を拡張した Chojnacki ら [4] の「CFNS 法<sup>2</sup>」や金谷ら [13] の「拡張 FNS」法がある．

#### 5. $x$ 空間の最尤推定

前節の定式化は数値計算や理論解析 [11] には適しているが，ノイズモデルが必ずしも適切ではない．例えば例 1 の楕円当てはめでは，各点  $(x_\alpha, y_\alpha)$  の各座標に独立な正規分布に独立なノイズが加わっているとみなすのが自然である．しかし，式 (5) のようにそれを非線形変換した  $\xi_\alpha$  のノイズはもはや厳密には正規分布ではない．また，例 2 の基礎行列の計算でも，各対応点  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  の各座標に独立な正規分布に独立なノイズが加わっているとみなすのが自然であるが，式 (7) のように非線形変換した  $\xi_\alpha$  のノイズは厳密には正規分布ではない．

そこで，本論文では元のデータ  $x_\alpha$  をその真値  $\bar{x}_\alpha$  に期待値 0，共分散行列  $V[x_\alpha]$  の正規分布に従う独立なノイズが加わったものとみなし， $x$  空間の最尤推定を考える．これが本論文の定式化の従来方法との最大の相違点である．

本論文で考える問題は数学的には，条件

$$(\xi(\bar{x}_\alpha), \mathbf{u}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (14)$$

のもとで，マハラノビス距離 (の二乗和)

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (x_\alpha - \bar{x}_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} (x_\alpha - \bar{x}_\alpha)) \quad (15)$$

を最小にする  $\bar{x}_\alpha, \mathbf{u}$  を求めるものである<sup>3</sup>．以下ではこの  $E$  を便宜上「再投影誤差<sup>4</sup>」と呼ぶ．

この問題を一般的に解く方法はこれまで知られておらず，具体的な問題に即して対処されてきた．例えば例 1 の楕円当てはめでは真の位置  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$  と楕円のパラメータ  $\mathbf{u}$  のすべての未知数の空間がさまざまな方法で数値的に探索されている [2, 5, 6, 17]．例 2 の基礎行列の計算では，仮定した基礎行列  $F$  から仮の 3 次元復元を行い，各点の 3 次元位置やカメラ位置，内部パラメータを調整して，各点を画像上に (再) 投影した位置がなるべくデータ点に近くなるような探索がされている [1]．このようなアプローチは「バンドル調整」と呼ばれている [21]．

<sup>2</sup>CFNS 法では必ずしも正しい解が得られないことが指摘されている [13]．

<sup>3</sup>以下の議論は式 (15) 中の  $V[x_\alpha]^{-1}$  が一般逆行列でも成立する [9]．その場合は導出の途中で適宜，射影行列を導入する必要があるが，最終結果は同じになる．そこで以下では簡単のために  $V[x_\alpha]^{-1}$  を使って説明する．

<sup>4</sup>元来は，画像面に投影された点から 3 次元形状を復元する問題で，求めたい 3 次元位置を (再び) 画像面に投影した  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$  のデータ点  $(x_\alpha, y_\alpha)$  からの距離の二乗和という意味．

これに対して最近, 中川ら [18] は  $xy$  空間の最尤推定による楕円当てはめ法を示し, 金谷ら [14] は  $xyx'y'$  空間の最尤推定による基礎行列の計算法を示した.

このように個別には厳密な最尤推定法が試みられているが, 本論文ではそれらを包括する, 式 (14) の拘束条件のもとで式 (15) の再投影誤差を最小化する統一的手続きが存在することを示す. これが本論文による新しい発見である.

## 6. 第 1 近似

真の位置  $\bar{x}_\alpha$  を直接に推定する代わりに

$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha - \Delta x_\alpha \quad (16)$$

と書き, 補正量  $\Delta x_\alpha$  を推定してもよい. このとき, 式 (15) は次のようになる.

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (\Delta x_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) \quad (17)$$

式 (14) は次のようになる.

$$(\xi(x_\alpha - \Delta x_\alpha), u) = 0 \quad (18)$$

$\xi_\alpha = \xi(x_\alpha)$  と置き, テイラー展開  $\xi(x_\alpha - \Delta x_\alpha) = \xi_\alpha - (\partial \xi / \partial x)_\alpha \Delta x_\alpha + \dots$  を代入し, 第 1 近似として補正項  $\Delta x_\alpha$  の 2 次の項を無視すると次式を得る.

$$\left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha \Delta x_\alpha, u \right) = (\xi_\alpha, u) \quad (19)$$

式 (8) と同様に,  $(\partial \xi / \partial x)_\alpha$  は写像  $\xi(x)$  のヤコビ行列に  $x = x_\alpha$  を代入したものである. 制約条件 (19) を消去するためにラグランジュ乗数  $\lambda_\alpha$  を導入して

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^N (\Delta x_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha \Delta x_\alpha, u \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^N (\Delta x_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha (\Delta x_\alpha, \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u) \end{aligned} \quad (20)$$

と置き,  $\Delta x_\alpha$  で微分して 0 と置くと次のようになる.

$$2V[x_\alpha]^{-1} \Delta x_\alpha - \lambda_\alpha \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u = 0 \quad (21)$$

これから次式を得る.

$$\Delta x_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2} V[x_\alpha] \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u \quad (22)$$

これを式 (19) に代入すると次のようになる.

$$\frac{\lambda_\alpha}{2} \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha V[x_\alpha] \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u, u \right) = (\xi_\alpha, u) \quad (23)$$

式 (8) の関係を用いると,  $\lambda_\alpha$  が次のように定まる.

$$\lambda_\alpha = \frac{2(\xi_\alpha, u)}{(u, V[\xi_\alpha]u)} \quad (24)$$

式 (22) を式 (17) に代入すると次のようになる.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha^2 (V[x_\alpha] \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u, \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha^2 (u, \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha V[x_\alpha] \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top u) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha^2 (u, V[\xi_\alpha]u) \end{aligned} \quad (25)$$

これに式 (24) を代入すると, 再投影誤差  $E$  が次のように書ける.

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\xi_\alpha, u)^2}{(u, V[\xi_\alpha]u)} \quad (26)$$

これは式 (13) と同じ形をしている. したがって, FNS 法などの既存の方法によってこれを最小にする  $u$  が計算できる. その解を  $\hat{u}$  とすると, 式 (16), (22), (24) から真値  $\bar{x}$  は次のように推定される.

$$\hat{x}_\alpha = x_\alpha - \frac{(\xi_\alpha, \hat{u}) V[x_\alpha] \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha^\top \hat{u}}{(\hat{u}, V[\xi_\alpha] \hat{u})} \quad (27)$$

## 7. 高次の補正

式 (27) で得られる  $\hat{x}_\alpha$  は真値  $\bar{x}_\alpha$  の第 1 近似である. そこで式 (16) の代わりに真値を

$$\bar{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha - \Delta \hat{x}_\alpha \quad (28)$$

と置き, 改めて補正量  $\Delta \hat{x}_\alpha$  を推定する.  $\hat{x}_\alpha$  は真値  $\bar{x}_\alpha$  の第 1 近似であるから, 補正量  $\Delta \hat{x}_\alpha$  は式 (16) の補正量  $\Delta x_\alpha$  より高次の微小量である. 式 (28) を式 (15) に代入すると次のようになる.

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (\hat{x}_\alpha + \Delta \hat{x}_\alpha, V[x_\alpha]^{-1} (\hat{x}_\alpha + \Delta \hat{x}_\alpha)) \quad (29)$$

ただし, 次のように置いた.

$$\tilde{x}_\alpha = x_\alpha - \hat{x}_\alpha \quad (30)$$

拘束条件 (14) は次のように書ける.

$$(\xi(\hat{x}_\alpha - \Delta \hat{x}_\alpha), u) = 0 \quad (31)$$

$\xi(\hat{x}_\alpha - \Delta \hat{x}_\alpha)$  をテイラー展開して高次の微小量  $\Delta \hat{x}_\alpha$  の 2 次の項を無視すると, 次のようになる.

$$\left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_\alpha \Delta \hat{x}_\alpha, u \right) = (\hat{\xi}_\alpha, u) \quad (32)$$

ただし,  $\hat{\xi}_\alpha = \xi(\hat{x}_\alpha)$  であり,  $(\partial\hat{\xi}/\partial x)_\alpha$  は写像  $\xi(x)$  のヤコビ行列に  $x = \hat{x}_\alpha$  を代入したものである. 式 (28) 中の  $\Delta\hat{x}_\alpha$  は式 (16) 中の  $\Delta x_\alpha$  よりも高次の微小量であるから, 式 (32) は式 (14) の式 (19) よりもよい近似である.

制約条件 (32) を消去するためにラグランジュ乗数  $\lambda_\alpha$  を導入して,

$$\sum_{\alpha=1}^N (\tilde{x}_\alpha + \Delta\hat{x}_\alpha, V[x_\alpha]^{-1}(\tilde{x}_\alpha + \Delta\hat{x}_\alpha)) - \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha \left( \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha \Delta\hat{x}_\alpha, \mathbf{u} \right) \quad (33)$$

を  $\Delta\hat{x}_\alpha$  で微分して 0 と置くと次のようになる.

$$2V[x_\alpha]^{-1}(\tilde{x}_\alpha + \Delta\hat{x}_\alpha) - \lambda_\alpha \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u} = 0 \quad (34)$$

これから次式を得る.

$$\Delta\hat{x}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{2} V[x_\alpha] \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u} - \tilde{x}_\alpha \quad (35)$$

これを式 (32) に代入すると次のようになる.

$$\left( \frac{\lambda_\alpha}{2} \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top V[x_\alpha] \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u} - \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \tilde{x}_\alpha, \mathbf{u} \right) = (\hat{\xi}_\alpha, \mathbf{u}) \quad (36)$$

これから  $\lambda_\alpha$  が次のように定まる.

$$\lambda_\alpha = \frac{2(\hat{\xi}_\alpha, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, (\partial\hat{\xi}/\partial x)_\alpha^\top \tilde{x}_\alpha)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} = \frac{2(\hat{\xi}_\alpha^*, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \quad (37)$$

ただし,  $V[\hat{\xi}_\alpha]$  は式 (8) の  $V[\xi_\alpha]$  に含まれる  $x_\alpha$  を  $\hat{x}_\alpha$  に置き換えたものであり,  $\hat{\xi}_\alpha^*$  を次のように定義した.

$$\hat{\xi}_\alpha^* = \hat{\xi}_\alpha + \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \tilde{x}_\alpha \quad (38)$$

式 (35) を式 (29) に代入すると次のようになる.

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\lambda_\alpha^2}{4} (V[x_\alpha] \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u}, V[x_\alpha]^{-1} V[x_\alpha] \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \mathbf{u}) \\ = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha^2 (\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u}) \quad (39)$$

これに式 (36) を代入すると, 再投影誤差  $E$  が次のように書ける.

$$E = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\hat{\xi}_\alpha^*, \mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \quad (40)$$

これは式 (13) と同じ形をしている. したがって, FNS 法などの既存の方法によってこれを最小にする  $\mathbf{u}$  が計

算できる. その解を  $\hat{\mathbf{u}}$  とすると, 式 (28), (30), (35), (37) から真値  $\tilde{x}$  は次のように推定される.

$$\hat{x}_\alpha = \hat{x}_\alpha - \frac{\lambda_\alpha}{2} V[x_\alpha] \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \hat{\mathbf{u}} + \tilde{x}_\alpha \\ = x_\alpha - \frac{(\hat{\xi}_\alpha^*, \hat{\mathbf{u}}) V[x_\alpha] \left( \frac{\partial\hat{\xi}}{\partial x} \right)_\alpha^\top \hat{\mathbf{u}}}{(\hat{\mathbf{u}}, V[\hat{\xi}_\alpha] \hat{\mathbf{u}})} \quad (41)$$

これは式 (27) と同じ形をしている. そして, 得られる  $\hat{x}_\alpha$  は式 (27) の  $\hat{x}_\alpha$  よりも  $\tilde{x}_\alpha$  のさらによい近似である. そこで, これを改めて  $\hat{x}_\alpha$  と置き, さらに高次の補正量を推定し, これを収束するまで反復する. 最終的には式 (31) の  $\Delta\hat{x}_\alpha$  が 0 になる.

## 8. 厳密な最尤推定の手順の例

以上より, データ  $x_\alpha$  のノイズモデルに基づくという意味で厳密な最尤推定の手順が得られた. 特にノイズが画像面上の各点の  $x$  座標,  $y$  座標に独立な期待値 0, 標準偏差  $\sigma$  のノイズが加わるとするとき, 楕円当てはめと基礎行列の計算について具体的に示す.

なお, ノイズの標準偏差  $\sigma$  は未知でよい. なぜなら, 式 (15) の最小化は  $V[x_\alpha]$  を正数倍しても影響しないからである. したがって  $\sigma = 1$  とみなせばよい.

**【例 5】** (楕円の当てはめ) 点列  $(x_\alpha, y_\alpha)$  に当てはまる楕円の式 (5) のパラメータ  $\mathbf{u}$  を計算する手順は次のようになる. ただし  $\mathbf{u}$  の符号の不定性を除くために  $\|\mathbf{u}\| = 1$  と正規化する.

1.  $E = \infty$  (十分大きい値) とし,  $\hat{x}_\alpha = x_\alpha, \hat{y}_\alpha = y_\alpha, \tilde{x}_\alpha = \tilde{y}_\alpha = 0$  と置く ( $\alpha = 1, \dots, N$ ).
2. 次の  $\xi_\alpha^*$  を計算する ( $\alpha = 1, \dots, N$ ).

$$\xi_\alpha^* = \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha^2 + 2\hat{x}_\alpha\tilde{x}_\alpha \\ 2(\hat{x}_\alpha\hat{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha\tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha\tilde{y}_\alpha) \\ \hat{y}_\alpha^2 + 2\hat{y}_\alpha\tilde{y}_\alpha \\ 2(\hat{x}_\alpha + \tilde{x}_\alpha) \\ 2(\hat{y}_\alpha + \tilde{y}_\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

3. 式 (9) の  $V[\xi_\alpha]$  において  $x_\alpha, y_\alpha$  をそれぞれ  $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha$  に置き換え,  $\sigma = 1$  と置いたものを  $V[\hat{\xi}_\alpha]$  とする ( $\alpha = 1, \dots, N$ ).
4. 次の関数を最小にする 6 次元単位ベクトル  $\mathbf{u} = (u_i)$  を計算する (例えば FNS 法を用いる [22]).

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)^2}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \quad (43)$$

5.  $\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha$  を次のように更新する.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_\alpha \\ \tilde{y}_\alpha \end{pmatrix} \leftarrow \frac{2(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

6.  $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha$  を次のように更新する .

$$\hat{x}_\alpha \leftarrow x_\alpha - \tilde{x}_\alpha, \quad \hat{y}_\alpha \leftarrow y_\alpha - \tilde{y}_\alpha \quad (45)$$

7. 再投影誤差  $E$  を次のように計算する .

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (\tilde{x}_\alpha^2 + \tilde{y}_\alpha^2) \quad (46)$$

8.  $E \approx E_0$  なら  $\mathbf{u}$  を返して終了する<sup>5</sup> . そうでなければ,  $E_0 \leftarrow E$  として更新してステップ 2 に戻る .

この反復の初回のステップ 4 で得られる値 (第 1 近似) が従来の方法 ( $\xi$  空間の最尤推定) であり, 式 (13) の最小化に相当する . 山田ら [22] が実験的比較を行ったのもこの方法である . 厳密な最尤推定は既に中川ら [18] によって行われているが, これが本論文の一般論の特別の場合として導かれる .

ただし, 中川ら [18] は実験によって, 厳密な最尤推定と従来の方法との解が実質的に同等であることを示している . すなわち, 上記の反復は 4, 5 回で終了し, 有効数字のかなり下位しか解が改良しない . したがって, 実用的には従来の方法でも十分である .

**【例 6】** (基礎行列の計算) 対応点  $(x_\alpha, y_\alpha), (x'_\alpha, y'_\alpha)$  に対する基礎行列  $F$  を表す式 (7) のベクトル  $\mathbf{u}$  は次のように計算される . ただし  $\mathbf{u}$  の符号の不定性を除くために  $\|\mathbf{u}\| = 1$  と正規化する .

1.  $E = \infty$  (十分大きい値) とし,  $\hat{x}_\alpha = x_\alpha, \hat{y}_\alpha = y_\alpha, \hat{x}'_\alpha = x'_\alpha, \hat{y}'_\alpha = y'_\alpha, \tilde{x}_\alpha = \tilde{y}_\alpha = \tilde{x}'_\alpha = \tilde{y}'_\alpha = 0$  と置く ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) .
2. 次の  $\xi_\alpha^*$  を計算する ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) .

$$\xi_\alpha^* = \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha \hat{x}'_\alpha + \hat{x}'_\alpha \tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha \tilde{x}'_\alpha \\ \hat{x}_\alpha \hat{y}'_\alpha + \hat{y}'_\alpha \tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha \tilde{y}'_\alpha \\ \hat{x}_\alpha + \tilde{x}_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \hat{x}'_\alpha + \hat{x}'_\alpha \tilde{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha \tilde{x}'_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \hat{y}'_\alpha + \hat{y}'_\alpha \tilde{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha \tilde{y}'_\alpha \\ \hat{y}_\alpha + \tilde{y}_\alpha \\ \hat{x}'_\alpha + \tilde{x}'_\alpha \\ \hat{y}'_\alpha + \tilde{y}'_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

3. 式 (10) の  $V[\xi_\alpha]$  において  $x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha$  をそれぞれ  $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha, \hat{x}'_\alpha, \hat{y}'_\alpha$  に置き換え,  $\sigma = 1$  と置いたものを  $V[\hat{\xi}_\alpha]$  とする ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) .
4. 次の関数を最小にする 9 次元単位ベクトル  $\mathbf{u} = (u_i)$  を, それが定義する基礎行列  $F$  の行列式が

<sup>5</sup>計算した  $\mathbf{u}$  が前回の  $\mathbf{u}$  の値と符号を除いてほぼ一致することを終了条件にしてもよい .

0 であるように計算する (例えば拡張 FNS 法を用いる [13]) .

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)^2}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \quad (48)$$

5.  $\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha, \tilde{x}'_\alpha, \tilde{y}'_\alpha$  を次のように更新する .

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_\alpha \\ \tilde{y}_\alpha \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}'_\alpha \\ \hat{y}'_\alpha \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'_\alpha \\ \tilde{y}'_\alpha \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\mathbf{u}, \xi_\alpha^*)}{(\mathbf{u}, V[\hat{\xi}_\alpha] \mathbf{u})} \begin{pmatrix} u_1 & u_4 & u_7 \\ u_2 & u_5 & u_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha \\ \hat{y}_\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

6.  $\hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha, \hat{x}'_\alpha, \hat{y}'_\alpha$  を次のように更新する .

$$\begin{aligned} \hat{x}_\alpha &\leftarrow x_\alpha - \tilde{x}_\alpha, & \hat{y}_\alpha &\leftarrow y_\alpha - \tilde{y}_\alpha, \\ \hat{x}'_\alpha &\leftarrow x'_\alpha - \tilde{x}'_\alpha, & \hat{y}'_\alpha &\leftarrow y'_\alpha - \tilde{y}'_\alpha \end{aligned} \quad (50)$$

7. 再投影誤差  $E$  を次のように計算する .

$$E = \sum_{\alpha=1}^N (\tilde{x}_\alpha^2 + \tilde{y}_\alpha^2 + \tilde{x}'_\alpha^2 + \tilde{y}'_\alpha^2) \quad (51)$$

8.  $E \approx E_0$  なら  $\mathbf{u}$  を返して終了する<sup>6</sup> . そうでなければ,  $E_0 \leftarrow E$  としてステップ 2 に戻る .

楕円の場合と同様に, 反復の初回のステップ 4 で得られる値 (第 1 近似) が従来の方法 ( $\xi$  空間の最尤推定) であり, 式 (13) の最小化に相当する . 菅谷ら [19] が実験的比較を行ったのもこの方法である . 厳密な最尤推定は既に金谷ら [14] によって行われているが, これが本論文の一般論の特別の場合として導かれる .

ただし, 金谷ら [14] は実験によって, 同様に厳密な最尤推定と従来の方法との解が実質的に同等であることを示している . すなわち, 反復は 4, 5 回で終了し, 有効数字のかなり下位しか解が改良しない . したがって, 実用的には従来の方法でも十分である .

## 9. 最適補正への応用

本論文の厳密な最尤推定の計算の一般論は最適補正の問題をも包括している . 「最適補正 [9]」とは誤差のあるベクトルデータ  $\mathbf{x}$  を拘束条件

$$F(\mathbf{x}; \mathbf{u}) = 0 \quad (52)$$

が満たされるように最適に補正する問題である . ただし, パラメータ  $\mathbf{u}$  は与えられ, 固定されている . 式

<sup>6</sup>計算した  $\mathbf{u}$  が前回の  $\mathbf{u}$  の値と符号を除いてほぼ一致することを終了条件にしてもよい .

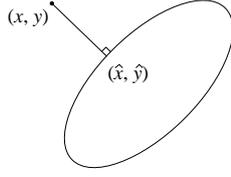


図 3: 与えられた点から楕円に垂線を下ろす

(47) が式 (3) のように書けるとき, この最尤推定は制約条件

$$(\xi(\bar{x}), u) = 0 \quad (53)$$

のもとで再投影誤差

$$E = (x - \bar{x}, V[x]^{-1}(x - \bar{x})) \quad (54)$$

を最小にする  $\bar{x}$  を求めよという問題となる. したがって, 前節までの結果で  $u$  の計算に関する部分を除けば, そのまま最適補正の最尤推定の手順が得られる.

【例 7】(楕円への垂線) 式 (2) で表される楕円が与えられたとき, 与えられた点  $(x, y)$  からこの楕円に下した垂線の足を計算したい(図 3). これは次のように求まる ( $u$  は式 (5) で定義).

1.  $E = \infty$  (十分大きい値) とし,  $\hat{x} = x, \hat{y} = y, \tilde{x} = \tilde{y} = 0$  と置く.
2. 次の  $\xi^*$  を計算する.

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \hat{x}^2 + 2\hat{x}\tilde{x} \\ 2(\hat{x}\hat{y} + \hat{y}\tilde{x} + \hat{x}\tilde{y}) \\ \hat{y}^2 + 2\hat{y}\tilde{y} \\ 2(\hat{x} + \tilde{x}) \\ 2(\hat{y} + \tilde{y}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

3. 式 (9) の  $V[\xi_\alpha]$  において  $x_\alpha, y_\alpha$  をそれぞれ  $\hat{x}, \hat{y}$  に置き換え,  $\sigma = 1$  と置いたものを  $V[\hat{\xi}]$  とする.
4.  $\tilde{x}, \tilde{y}$  を次のように更新する.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \leftarrow \frac{2(u, \xi^*)}{(u, V[\hat{\xi}]u)} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (56)$$

5.  $\hat{x}, \hat{y}$  を次のように更新する.

$$\hat{x} \leftarrow x - \tilde{x}, \quad \hat{y} \leftarrow y - \tilde{y} \quad (57)$$

6. 再投影誤差  $E$  を次のように計算する.

$$E = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \quad (58)$$

7.  $E \approx E_0$  なら  $(\hat{x}, \hat{y})$  を返して終了する. そうでなければ,  $E_0 \leftarrow E$  としてステップ 2 に戻る.

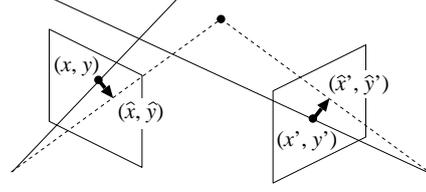


図 4: 2 画像の対応点から 3 次元位置を計算する

楕円への垂線の足は代数方程式を連立させて解けば求まるが, このような単純な方法は過去には知られていなかったようである. 反復は 3, 4 回で収束するが, 第 1 回の解 (第 1 近似) でも十分な精度がある. この方法は最近, 菅谷ら [20] によって画像中の楕円の検出に用いられている.

【例 8】(三角測量) 基礎行列  $F$  が既知のとき, 誤差のある対応点  $(x, y), (x', y')$  を式 (6) のエビ極線方程式が満たされるように補正することによって, その点の 3 次元位置が定まる<sup>7</sup> (図 4).  $(x, y), (x', y')$  の移動距離の 2 乗和が最小になるように補正は次のように計算される ( $u$  は式 (7) で定義).

1.  $E = \infty$  (十分大きい値) とし,  $\hat{x} = x, \hat{y} = y, \hat{x}' = x', \hat{y}' = y', \tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{x}' = \tilde{y}' = 0$  と置く.
2. 次の  $\xi^*$  を計算する.

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \hat{x}\hat{x}' + \hat{x}'\tilde{x} + \hat{x}\tilde{x}' \\ \hat{x}\hat{y}' + \hat{y}'\tilde{x} + \hat{x}\tilde{y}' \\ \hat{x} + \tilde{x} \\ \hat{y}\hat{x}' + \hat{x}'\tilde{y} + \hat{y}\tilde{x}' \\ \hat{y}\hat{y}' + \hat{y}'\tilde{y} + \hat{y}\tilde{y}' \\ \hat{y} + \tilde{y} \\ \hat{x}' + \tilde{x}' \\ \hat{y}' + \tilde{y}' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (59)$$

3. 式 (10) の  $V[\xi_\alpha]$  において  $x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha$  をそれぞれ  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}', \hat{y}'$  に置き換え,  $\sigma = 1$  と置いたものを  $V[\hat{\xi}]$  とする.
4.  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{x}', \tilde{y}'$  を次のように更新する.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(u, \xi^*)}{(u, V[\hat{\xi}]u)} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(u, \xi^*)}{(u, V[\hat{\xi}]u)} \begin{pmatrix} u_1 & u_4 & u_7 \\ u_2 & u_5 & u_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (60)$$

5.  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}', \hat{y}'$  を次のように更新する.

$$\begin{aligned} \hat{x} &\leftarrow x - \tilde{x}, & \hat{y} &\leftarrow y - \tilde{y}, \\ \hat{x}' &\leftarrow x' - \tilde{x}', & \hat{y}' &\leftarrow y' - \tilde{y}' \end{aligned} \quad (61)$$

<sup>7</sup>対応点  $(x, y), (x', y')$  の定義する視線が 1 点で交わる必要十分条件は式 (6) のエビ極線方程式が満たされることである [8].

6. 再投影誤差  $E$  を次のように計算する .

$$E = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2 \quad (62)$$

7.  $E \approx E_0$  なら  $(\hat{x}, \hat{y}), (\hat{x}', \hat{y}')$  を返して終了する .  
そうでなければ,  $E_0 \leftarrow E$  としてステップ 2 に戻る .

これは金谷ら [15] のステレオ画像の三角測量法に他ならない . 金谷ら [15] は実験により, これを用いると, 標準的に用いられている Hartley-Sturm 法 [7] と同じ解が得られ, かつ計算が圧倒的に効率化されることを示している .

## 10. まとめ

本論文では幾何学的当てはめ問題の厳密な最尤推定の計算法を統一的に示した . 従来はデータを計算に都合のよい形に変換した空間において正規分布に従うノイズが仮定されていたが, 本論文では元のデータ空間での正規分布ノイズを仮定した . そして, その最尤推定の計算を従来の方法を反復に帰着させる統一的な手法を提案した .

このような厳密な最尤推定は, 楕円の当てはめや基礎行列の計算問題に対しては中川ら [18] や金谷ら [14] によって個別に導出されていたが, 本論文ではそれらが本論文の一般論から統一的に導かれることが示された .

さらに, この方法が最適補正をも包括しており, 本論文の一般論の特別な場合として, 菅谷ら [20] の楕円への垂線の計算や金谷ら [15] のステレオ画像の三角測量法も得られることを示した .

このように本論文の一般論により, 過去に個別に考案されてきた手法が統一的に理解され, 非常に見通しがよくなったことはコンピュータビジョンの研究者に非常に助けになるものと思われる .

ただし, 中川ら [18] や金谷ら [14] が実験的に示しているように, 厳密な最尤推定 ( $x$  空間の最適化) は従来の方法 ( $\xi$  空間の最適化) と実質的に同等である . これは, 厳密には正規分布でない  $\xi$  空間の誤差を正規分布とみなしても, 共分散行列を正しく評価している限り, 解に実質的な相違が生じないことを意味している . このため, 現段階では本論文の一般論の直接に精度の向上に役立つ応用が見出されていない . しかし, 将来新たな応用につながる可能性があり, また本論文の一般論は, さまざまな手法の精度の比較, 例えば単純化や効率化のために導入した近似がどれだけ解に影響するかの評価基準として意義があると思われる .

## 参考文献

- [1] Bartoli, A. and Sturm, P.: Nonlinear estimation of fundamental matrix with minimal parameters, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, Vol.26, No.3, pp.426–432 (2004).
- [2] Björck, A.: *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, PA, U.S.A. (1996).
- [3] Chojnacki, W., Brooks, M.J., van den Hengel, A. and Gawley, D.: On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, Vol.22, No.11, pp.1294–1303 (2000).
- [4] Chojnacki, W., Brooks, M.J., van den Hengel, A. and Gawley, D.: A new constrained parameter estimator for computer vision applications, *Image Vis. Comput.*, Vol.22, No.2, pp.85–91 (2004).
- [5] Gander, W., Golub, H. and Strebel, R.: Least-squares fitting of circles and ellipses, *BIT*, Vol.34, No.4, pp.558–578 (1994).
- [6] Harker, M. and O’Leary, P.: First order geometric distance (The myth of Sampsonus), *Proc. 17th Brit. Mach. Vis. Conf.*, Edinburgh, U.K., Vol.1, pp.87–96 (2006).
- [7] Hartley, R.I. and Sturm, P.: Triangulation, *Comput. Vision Image Understand.*, Vol.68, No.2, pp.146–157 (1997).
- [8] Hartley, R. and Zisserman, A.: *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (2000).
- [9] Kanatani, K.: *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands (1996); Dover, New York (2005).
- [10] 金谷健一: 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8, pp.59–64 (2005).
- [11] 金谷健一: 幾何学的当てはめの高次誤差解析, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-156-18, pp.147–154 (2006).
- [12] 金谷健一, 三島等: 未校正カメラによる 2 画像からの 3 次元復元とその信頼性評価, 情報処理学会論文誌: コンピュータビジョンとイメージメディア, Vol.42, No.SIG 6, pp.1–8 (2001).
- [13] 金谷健一, 菅谷保之: 制約付きパラメータ推定のための拡張 FNS 法, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-158-4, pp.25–32 (2007).
- [14] 金谷健一, 菅谷保之: 高ノイズレベルにおける基礎行列の最尤推定, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-160-9, pp.49–56 (2007).
- [15] 金谷健一, 菅谷保之, 新妻弘崇: 2 画像からの三角測量: Hartley vs. 最適補正, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-54, pp.335–342 (2008).
- [16] Leedan, Y. and Meer, P.: Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, Vol.37, No.2, pp.127–150 (2000).
- [17] Sturm, P. and Gargallo, P.: Conic fitting using the geometric distance, *Proc. 8th Asian Conf. Comput. Vision (ACCV2007)*, Tokyo, Japan, Vol.2, pp.784–795 (2007).
- [18] 中川裕介, 金谷健一, 菅谷保之: 高ノイズレベルにおける最尤楕円当てはめ, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-10, pp.53–60 (2008).
- [19] 菅谷保之, 金谷健一: 基礎行列の高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-153-32, pp.207–214 (2006).
- [20] 菅谷保之, 福山治樹: エッジセグメントの分割と統合による楕円検出, 第 14 回画像センシングシンポジウム講演論文集, 横浜, pp.IN1-14-1–IN1-14-6 (2006).
- [21] Triggs, B., McLauchlan, P.F., Hartley, R.I. and Fitzgibbon, A.: Bundle adjustment—A modern synthesis, in Triggs, B., Zisserman, A. and Szeliski, R.: (Eds.), *Vision Algorithms: Theory and Practice*, Springer, Berlin (2000).
- [22] 山田純平, 金谷健一, 菅谷保之: 楕円当てはめの高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-154-36, pp.339–346 (2006).