高ノイズレベルにおける基礎行列の最尤推定

金谷 健一 * 菅谷 保之 †

* 岡山大学大学院自然科学研究科 † 豊橋技術科学大学情報工学系

2 画像間の対応点から基礎行列を計算するさまざまな手法が提案されているが，本論文では高ノイズレベルにおける画像面上の最尤推定を厳密に計算する新しい方法を示す．これは従来のような仮の3 次元復元を介する高次元空間の探索とは異なり，低ノイズレベルに対する方法を反復適用するものであり，計算が単純である．この方法をシミュレーションおよび実画像データに適用し，低ノイズレベル法に比べて精度に意味のある差が現れないことを示す．これにより，従来の低ノイズレベルに対する方法で十分であることが結論される．

Maximum Likelihood Estimation of the Fundamental Matrix in the Presence of Large Noise

Kenichi Kanatani* and **Yasuyuki Sugaya†**

*Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

†Department of Information and Computer Sciences,
Toyohashi University of Technology, Toyohashi, Aichi 441-8580 Japan

Many methods have been proposed for computing the fundamental matrix from noisy point correspondences over two images. This paper presents a new method for computing exact maximum likelihood in the image plane for high noise level. Unlike existing such methods, our method iteratively applies a simple method for low noise level, greatly simplifies the computation. Using simulated and real images, we show that no significant accuracy improvement is observed as compared with the low noise level method, concluding that the low noise level method is sufficient for practical applications.

1. まえがき

画像間の特徴点の対応から基礎行列を計算することはカメラ校正，密な対応探索，3 次元形状復元，新しい視点からの画像生成など多くの処理の出発点である [6]．筆者らはノイズを含むデータからの基礎行列の最適計算のさまざまな方法を提案し，その精度や計算効率を評価してきた [13, 18, 19, 20]．

これらは金谷の統計的最適化理論 [9] に従うものであり，画像のノイズレベルが 0 の近傍での摂動解析 [12] に理論的な基礎を置いている．実際問題では精度よく得られた対応点の位置の不確定（以下,「ノイズ」と呼ぶ）はサブ画素から数画素の範囲であり，この定式化はよく適合している．

もし不確定が十数画素に及ぶとすれば，そもそも対応関係が正しいか疑われ，誤対応を除去するロバスト推定が必要となる．また，そのような高ノイズレベルのもとで求めた精度の低い基礎行列からは意味のあるカメラ校正や3 次元復元が期待できない．このため，高ノイズレベルのもとで誤対応がないと仮定し，ノイズが厳密な正規分布に従うとして理論的に最適な基礎行列を計算しても，実際問題としてあまり意味がない．

しかし，これを実際に計算してみることは，従来の低ノイズレベルに対する最適解法がどの程度のノイズまで有効であるのかを確認する手段となる．本論文ではこの観点から高ノイズレベルにおける理想的な条件のもとでの最適な基礎行列を計算法する新しい方法を提案し，その精度と効率を従来の低ノイズレベルに対する方法と比較する．

高ノイズレベルにおける基礎行列を最尤推定する試みは従来から存在した．その基本的な手段は「バンドル調整」と呼ばれ，仮の 3 次元復元を行ない，3 次元構造と各フレームに対するカメラの内部および外部パラメータをすべて未知数とするパラメータ空間を探索して，計算した 3 次元構造を計算したカメラの内部および外部パラメータによって画像面に投影した像とその観測位置とのずれの二乗和が最小に

*700-8530 岡山市津島中 3–1–1, (086)251-8173
kanatani@suri.it.okayama-u.ac.jp
†441-8580 豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1–1
sugaya@iim.ics.tut.ac.jp

なるようにするものである [1, 16, 17, 21]．その最小化には通常は LM（レーベンバーグ・マーカート）法が用いられる．このような方法は手間がかかるが，その精度は他の簡易解法の比較基準になるという意味で，Hartley ら [6] は「黄金基準」と呼んだ．

本論文ではバンドル調整によらず，“基礎行列のみ”を未知数とし，しかもバンドル調整と等価な解を計算する新しい手法を提案する．これは低ノイズレベルに対する方法を反復適用するものであり，計算が非常に単純になる．しかも，結果は黄金基準に一致する．

以下では，まず高ノイズレベルにおける基礎行列の最尤推定について述べ，次のその解法を示す．そして，シミュレーションおよび実画像データに適用し，低ノイズレベル法に比べて精度に意味のある差が現れないことを示す．これにより，従来の低ノイズレベルに対する方法で十分であることが結論される．

2. 基礎行列の最適計算

従来の定式化は次の通りである [13, 18, 19, 20].

2.1 エピ極線方程式

同一シーンを異なる位置から撮影した 2 画像において，第 1 画像の点 (x, y) と第 2 画像の点 (x', y') がシーンの同一点であれば，次の「エピ極線方程式」が成り立つ [6].

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}') = 0 \tag{1}$$

ただし，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と書く．そして，点 $(x, y), (x', y')$ を次のベクトルで表す．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x/f_0 \\ y/f_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x'/f_0 \\ y'/f_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

ここに，f_0 は任意の定数である[1]．行列 $\boldsymbol{F} = (F_{ij})$ は「基礎行列」と呼ばれ，2 台のカメラの相対的位置とそれらの内部パラメータのみによって定まる（シーンにはよらない）ランク 2 の行列である．

新しいベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}$ を

$$\boldsymbol{u} = (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33})^\top \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\xi} = (xx', xy', xf_0, yx', yy', yf_0, f_0x', f_0y', f_0^2)^\top \tag{4}$$

と置けば，式 (1) は次のように書ける．

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{5}$$

[1] 数値計算の安定性のためのスケールの調節である [5]．本論文の実験では $f_0 = 600$ とした．

明らかに $\boldsymbol{u}$ の大きさは不定であり，以後 $\|\boldsymbol{u}\| = 1$ と正規化する．

ノイズを含む N 組の対応点 (x_α, y_α), (x'_α, y'_α) が得られたとき，それらを式 (4) によって 9 次元ベクトルに変換したものを $\{\boldsymbol{\xi}_\alpha\}$ とする．基礎行列の計算は $\{\boldsymbol{\xi}_\alpha\}$ から式 (5) を満たす 9 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$ を推定する問題となる．

2.2 解の共分散行列

各データベクトル $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ を $\boldsymbol{\xi}_\alpha = \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ と書き，$\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ はノイズを含まない値，$\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ はノイズの項とする．この $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の共分散行列を次のように定義する．

$$V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = E[\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha \Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top] \tag{6}$$

ここに，$E[\cdot]$ はノイズの分布に関する期待値を表す．各対応点の各座標に期待値 0, 標準偏差 σ のノイズが独立に加わっているとき，式 (4), (6) から共分散行列 $V[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ は $O(\sigma)^4$ を除いて $V[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \sigma^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ と書ける．ただし，$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ を次のように置き,「正規化共分散行列」と呼ぶ．

$$V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha] = \begin{pmatrix}
x_\alpha^2 + x'^2_\alpha & x'_\alpha y'_\alpha & f_0 x'_\alpha & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & f_0 x_\alpha & 0 & 0 \\
x'_\alpha y'_\alpha & x_\alpha^2 + y'^2_\alpha & f_0 y'_\alpha & 0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & f_0 x_\alpha & 0 \\
f_0 x'_\alpha & f_0 y'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_\alpha y_\alpha & 0 & 0 & y_\alpha^2 + x'^2_\alpha & x'_\alpha y'_\alpha & f_0 x'_\alpha & f_0 y_\alpha & 0 & 0 \\
0 & x_\alpha y_\alpha & 0 & x'_\alpha y'_\alpha & y_\alpha^2 + y'^2_\alpha & f_0 y'_\alpha & 0 & f_0 y_\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & f_0 x'_\alpha & f_0 y'_\alpha & f_0^2 & 0 & 0 & 0 \\
f_0 x_\alpha & 0 & 0 & f_0 y_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\
0 & f_0 x_\alpha & 0 & 0 & f_0 y_\alpha & 0 & 0 & f_0^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \tag{7}$$

2.3 KCR 下界

ノイズを含むデータから計算した推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{u}}]$ を次のように定義する [13, 19].

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] = E[(\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}\hat{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}\hat{\boldsymbol{u}})^\top] \tag{8}$$

ここに $\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}$ は 9 次元パラメータ空間において $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, $\det \boldsymbol{F} = 0$ の定める多様体 $\mathcal{U}$ への射影行列である [18, 19]．これは，$\boldsymbol{u}$ が単位ベクトルに正規化され，かつランク拘束を満たすので，解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ を多様体 $\mathcal{U}$ の真値 $\boldsymbol{u}$ における接空間に射影して，その接空間上で誤差を評価するという意味である．

ノイズ $\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の分布を期待値 $\mathbf{0}$，共分散行列 $\sigma^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ の独立な正規分布とみなせば，$\hat{\boldsymbol{u}}$ の任意の不偏推定量に対して次の不等式が成り立つ[2][8, 9, 11].

$$V[\hat{\boldsymbol{u}}] \succ \sigma^2\Big(\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)(\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)^\top}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})}\Big)^-_8 \tag{9}$$

ただし，$\succ$ は左辺から右辺を引いたものが半正値対称行列であることを意味し，$(\cdot)^-_r$ はランク r の一般逆行列[3]を表す．Chernov ら [2] は式 (9) の右辺を「KCR (Kanatani-Cramer-Rao) 下界」と呼んだ．そして，$\hat{\boldsymbol{u}}$ が不偏推定量でなくても，$\sigma \to 0$ で $\hat{\boldsymbol{u}} \to \boldsymbol{u}$ であれば $O(\sigma^4)$ を除いて式 (9) が成立することを示した．

2.4 基礎行列の最尤推定

ノイズ $\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の分布を期待値 $\mathbf{0}$，共分散行列 $\sigma^2 V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ の独立な正規分布とみなすと，この問題の最尤推定は，制約条件 $(\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, ..., N$ のもとでマハラノビス距離の二乗和

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]^-_2(\boldsymbol{\xi}_\alpha - \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)) \tag{10}$$

を最小にする $\boldsymbol{u}$, $\bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ を計算することである[4]．ラグランジュ乗数を導入して制約条件を除去すれば，式 (10) は次式となる [9, 11].

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{11}$$

最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$ はこれを条件 $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, $(\boldsymbol{u}^\dagger, \boldsymbol{u}) = 0$ のもとで最小にするものである．その計算法としては次のものが代表的である [20].

事後補正法: まずランク拘束を考慮しない解を計算し（金谷 [7, 9, 10] の「くりこみ法」，Chojnacki ら [3] の「FNS 法」，Leedan ら [14] の「HEIV 法」，菅谷ら [18] の「射影ガウス・ニュートン法」などを用いる），次にその解をランク拘束満たすように補正する [9, 15, 18, 19, 20].

内部接近法: 基礎行列を 7 パラメータで表して式 (11) を最小値を直接探索する [19, 20].

外部接近法: ランク拘束を考慮した固有値問題の反復を行う [4, 13].

これらによって得られる解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ の共分散行列 $V[\hat{\boldsymbol{u}}]$ は KCR の下界（式 (9) の右辺）に $O(\sigma^4)$ を除いて一致する [9, 11].

菅谷ら [20] の実験評価によると，事後補正法を初期値して基礎行列の特異値分解に基づいた 7 パラメータ表現を LM 法によって最小化する内部探索法 [19] と「拡張 FNS 法」[13] と呼ぶ外部接近法とが最も高い精度を与えた（両者の精度に優劣はない）.

2.5 高ノイズレベルにおける最尤推定

前節の解析は厳密であり，何の近似も用いていない．例えば式 (10) から式 (11) への変形は厳密である．しかし，高ノイズレベルにおいて問題になるのは "最尤推定" の解釈である．式 (11) の最小化は式 (10) の（二乗）マハラノビス距離 J の最小化と同値であるが，マハラノビス距離の最小化が最尤推定であるのはノイズが正規分布のときのみである．なぜなら，そのときのみ尤度関数が $e^{-J/\mathrm{const.}}$ に比例するからである．

しかし，xy 画像面でのノイズが正規分布だとしても，式 (4) によって変換した $\boldsymbol{\xi}$ 空間のノイズはもやや厳密な正規分布とは限らない．したがって 2.4 節冒頭の「ノイズ $\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ が... 正規分布とみなすと」が厳密には成立しない．同様に式 (9) の KCR 下界も，それを導く仮定「ノイズ $\Delta\boldsymbol{\xi}_\alpha$ の分布を... 正規分布とみなせば」が厳密には成立しない，

そこで次節で xy 画像面でマハラノビス距離を直接に最小化する方法を示し，$\boldsymbol{u}$ 空間でのマハラノビス距離の最小化と比較する．

3. 画像面での最尤推定

画像面上の各点のノイズが期待値 0 で各方向に一定の標準偏差を持つ正規分布であれば，マハラノビス距離はユークリッド距離そのものになる．ゆえに，データ点 (x_α, y_α), (x'_α, y'_α), $\alpha = 1, ..., N$ を式 (2) のベクトルの形に $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ で表し，その真の位置を $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ とすると，問題はエピ極線方程式

$$(\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{F}\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha) = 0, \quad \alpha = 1, ..., N \tag{12}$$

のもとで次式（「再投影誤差」）を最小にする真の位置 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ および $\boldsymbol{F}$ を求めることである．

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N}\Big(\|\boldsymbol{x}_\alpha - \bar{\boldsymbol{x}}_\alpha\|^2 + \|\boldsymbol{x}'_\alpha - \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha\|^2\Big) \tag{13}$$

---

[2] この KCR 下界は微小ノイズ，無限データ数の近似であるという誤解があるが，統計学におけるクラメル・ラオ (CR) 下界と意味的に同じ厳密式であり，何らの近似も用いていない．ノイズレベルやデータ数に無関係である．

[3] スペクトル分解して大きい r 個の固有値を逆数に置き換え，残りの固有値を 0 に置き換えた行列．

[4] 9 次元空間 $\mathcal{R}^9$ の N 点 $\{\boldsymbol{\xi}_\alpha\}$ に式 (5) の超平面を各点の共分散行列 $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ に反比例する重み付き距離の二乗和が最小になるように当てはめる問題と解釈できる．

3.1 第1 近似

真の位置 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ を直接に推定する代わりに

$$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \quad \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \boldsymbol{x}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha \tag{14}$$

と書き，補正量 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ を推定する．上式を式 (13) に代入すると次のようになる．

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N}\Bigl(\|\Delta\boldsymbol{x}_\alpha\|^2 + \|\Delta\boldsymbol{x}'_\alpha\|^2\Bigr) \tag{15}$$

エピ極線方程式 (12) は次のようになる．

$$(\boldsymbol{x}_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}'_\alpha - \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha)) = 0 \tag{16}$$

第1 近似としてノイズの 2 次の項を無視すると次式を得る．

$$(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha, \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha) = (\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha) \tag{17}$$

ノイズは画像面内に生じるので $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ の第 3 成分は 0 である．すなわち

$$(\boldsymbol{k}, \Delta\boldsymbol{x}_\alpha) = 0, \qquad (\boldsymbol{k}, \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha) = 0 \tag{18}$$

である．ただし，$\boldsymbol{k} = (0,0,1)^\top$ と定義する．拘束条件 (14), (18) にラグランジュ乗数を導入すると，式 (15) を最小化する $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ は次のようになる（途中計算省略）．

$$\Delta\boldsymbol{x}_\alpha = \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha)\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha}{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha)},$$
$$\Delta\boldsymbol{x}'_\alpha = \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha)\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha}{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha)} \tag{19}$$

ただし $\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} = \mathrm{diag}(1,1,0)$ と定義する（$\mathrm{diag}(\cdots)$ は $\cdots$ を対角要素とする対角行列）．上式を式 (15) に代入すると次のようになる[5]（途中計算省略）．

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha)^2}{(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha)} \tag{20}$$

これを最小にする $\|\boldsymbol{F}\| = 1, \det\boldsymbol{F} = 0$ の行列 $\boldsymbol{F}$ が求まったとして，それを $\hat{\boldsymbol{F}}$ と置く．これを式 (19) に代入すると，式 (14) から真の位置 $\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}'$ は次のように推定される．

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{x}'_\alpha)\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{x}'_\alpha}{(\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{x}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{x}'_\alpha) + (\hat{\boldsymbol{F}}^\top\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}^\top\boldsymbol{x}_\alpha)},$$
$$\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \boldsymbol{x}'_\alpha - \frac{(\boldsymbol{x}_\alpha, \hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{x}'_\alpha)\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}^\top\boldsymbol{x}_\alpha}{(\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{x}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{x}'_\alpha) + (\hat{\boldsymbol{F}}^\top\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}^\top\boldsymbol{x}_\alpha)} \tag{21}$$

[5]これは「Sampson 誤差」とも呼ばれる [6].

3.2 第2 近似

式 (21) で得られる $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ は真の位置 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ の最適な推定値の第1 近似である．そこで式 (14) の代わりに真の位置を

$$\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha = \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha - \Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \quad \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha - \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha \tag{22}$$

と置き，改めて補正量 $\Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ を推定する．$\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ は真の位置 $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ の第1 近似であるから，補正量 $\Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ は式 (14) の補正量 $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ より高次の微小量である．式 (22) を式 (14) に代入すると次のようになる．

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N}\Bigl(\|\tilde{\boldsymbol{x}}_\alpha + \Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha\|^2 + \|\tilde{\boldsymbol{x}}'_\alpha + \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha\|^2\Bigr) \tag{23}$$

ただし，次のように置いた．

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \qquad \tilde{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \boldsymbol{x}'_\alpha - \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha \tag{24}$$

エピ極線方程式 (12) は次のように書ける．

$$(\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha - \Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha - \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha)) = 0 \tag{25}$$

展開して高次の微小量 $\Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ の 2 次の項を無視すると，次のようになる．

$$(\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) = (\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) \tag{26}$$

$\Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ は $\Delta\boldsymbol{x}_\alpha, \Delta\boldsymbol{x}'_\alpha$ よりも高次の微小量であるから，その 2 次の項を無視した (26) は式 (17) に比べてエピ極線方程式 (12) のより高次の近似である．上式および拘束条件

$$(\boldsymbol{k}, \Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha) = 0, \qquad (\boldsymbol{k}, \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) = 0 \tag{27}$$

にラグランジュ乗数を導入すると，式 (20) を最小にする $\Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ は次のようになる（途中計算省略）．

$$\Delta\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha = \frac{e_\alpha\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha}{(\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)} - \tilde{\boldsymbol{x}}_\alpha,$$
$$\Delta\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha = \frac{e_\alpha\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha}{(\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)} - \tilde{\boldsymbol{x}}'_\alpha \tag{28}$$

ただし，次のように置いた．

$$e_\alpha = (\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) + (\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \tilde{\boldsymbol{x}}_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \tilde{\boldsymbol{x}}'_\alpha) \tag{29}$$

式 (28) を代入すると式 (23) は次のように書ける．

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{e_\alpha^2}{(\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)} \tag{30}$$

これを最小にする $\|\boldsymbol{F}\| = 1, \det\boldsymbol{F} = 0$ の行列 $\boldsymbol{F}$ が求まったとして，それを $\hat{\boldsymbol{F}}$ と置く．これを式 (28) に代入すると，式 (22) から真の位置 $\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}}'$ は次のように推定される．

$$\hat{\hat{\boldsymbol{x}}}_\alpha = \boldsymbol{x}_\alpha - \frac{\hat{e}_\alpha \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} \hat{\boldsymbol{F}} \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha}{(\hat{\boldsymbol{F}}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) + (\hat{\boldsymbol{F}}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)},$$
$$\hat{\hat{\boldsymbol{x}}}'_\alpha = \boldsymbol{x}'_\alpha - \frac{\hat{e}_\alpha \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}} \hat{\boldsymbol{F}}^\top \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha}{(\hat{\boldsymbol{F}}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha) + (\hat{\boldsymbol{F}}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\hat{\boldsymbol{F}}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha)} \tag{31}$$

ただし，$\hat{e}_\alpha$ は式 (29) において $\boldsymbol{F}$ を $\hat{\boldsymbol{F}}$ に置き換えたものである．このようにして得られた $\hat{\hat{\boldsymbol{x}}}_\alpha, \hat{\hat{\boldsymbol{x}}}'_\alpha$ は式 (21) の $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ よりも $\bar{\boldsymbol{x}}_\alpha, \bar{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ のさらによい近似になっている．そこで，これを改めて $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha, \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ と置き直して，さらに高次の補正量を推定して，これを収束するまで反復する．

3.3 基礎行列の計算

残る問題は式 (20)，式 (30) を最小にする $\|\boldsymbol{F}\| = 1, \det\boldsymbol{F} = 0$ の行列 $\boldsymbol{F}$ を求めることである．式 (3) の $\boldsymbol{u}$ と式 (4) の $\boldsymbol{\xi}$ と用いると次のように書ける．

$$(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha) = \frac{1}{f_0^2}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha) \tag{32}$$

$$(\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}'_\alpha) + (\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\boldsymbol{x}_\alpha) = \frac{1}{f_0^2}(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u}) \tag{33}$$

ただし $V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]$ は式 (7) の正規化共分散行列である．式 (32), (33) より，式 (20) は次のように書き直せる．

$$J = \frac{1}{f_0^2}\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{u}, V_0[\boldsymbol{\xi}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{34}$$

これは定数倍を除いて式 (11) そのものである．したがって，これを最小にする $\|\boldsymbol{F}\| = 1, \det\boldsymbol{F} = 0$ となる $\boldsymbol{F}$ は従来の方法（LM 法 [19]，拡張 FNS 法 [13] など）で計算できる．一方，ベクトル $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ を

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha = \begin{pmatrix} \hat{x}_\alpha\hat{x}'_\alpha + \hat{x}'_\alpha\tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha\tilde{x}'_\alpha \\ \hat{x}_\alpha\hat{y}'_\alpha + \hat{y}'_\alpha\tilde{x}_\alpha + \hat{x}_\alpha\tilde{y}'_\alpha \\ f_0(\hat{x}_\alpha + \tilde{x}_\alpha) \\ \hat{y}_\alpha\hat{x}'_\alpha + \hat{x}'_\alpha\tilde{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha\tilde{x}'_\alpha \\ \hat{y}_\alpha\hat{y}'_\alpha + \hat{y}'_\alpha\tilde{y}_\alpha + \hat{y}_\alpha\tilde{y}'_\alpha \\ f_0(\hat{y}_\alpha + \tilde{y}_\alpha) \\ f_0(\hat{x}'_\alpha + \tilde{x}'_\alpha) \\ f_0(\hat{y}'_\alpha + \tilde{y}'_\alpha) \\ f_0^2 \end{pmatrix} \tag{35}$$

と定義すると，式 (29) の e_α は次のように書ける．

$$e_\alpha = \frac{1}{f_0^2}(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha) \tag{36}$$

したがって，式 (30) は次のように書き直せる．

$$J = \frac{1}{f_0^2}\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{u}, V_0[\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{37}$$

ただし，$V_0[\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha]$ は式 (7) において，$x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha$ をそれぞれ $\hat{x}_\alpha, \hat{y}'_\alpha, \hat{x}'_\alpha, \hat{y}'_\alpha$ に置き換えたものである．これは (11) と同じ形をしているので，これを最小にする $\|\boldsymbol{F}\| = 1, \det\boldsymbol{F} = 0$ となる $\boldsymbol{F}$ は従来の方法で計算できる．

3.4 計算の手順

以上より，次の手順が得られる．

1. 9 次元ベクトル $\boldsymbol{u}_0$ を $\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{0}$ と置く．
2. 次のように置く（$\alpha = 1, ..., N$）．

$$\hat{x}_\alpha = x_\alpha,\ \ \hat{y}_\alpha = y_\alpha,\ \ \hat{x}'_\alpha = x'_\alpha,\ \ \hat{y}'_\alpha = y'_\alpha,$$
$$\tilde{x}_\alpha = \tilde{y}_\alpha = \tilde{x}'_\alpha = \tilde{y}'_\alpha = 0 \tag{38}$$

3. 式 (35) の $\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha$ を計算する（$\alpha = 1, ..., N$）．
4. 式 (7) において，$x_\alpha, y_\alpha, x'_\alpha, y'_\alpha$ をそれぞれ $\hat{x}_\alpha, \hat{y}'_\alpha, \hat{x}'_\alpha, \hat{y}'_\alpha$ に置き換えた $V_0[\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha]$ を計算する（$\alpha = 1, ..., N$）．
5. 次式を最小にする $\|\boldsymbol{F}\| = 1, \det\boldsymbol{F} = 0$ となる 9 次元単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を計算する．

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)^2}{(\boldsymbol{u}, V_0[\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{39}$$

6. 符号を除いて $\boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{u}_0$ なら $\boldsymbol{u}$ を返して終了する．そうでなければ $\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\alpha, \tilde{x}'_\alpha, \tilde{y}'_\alpha$ を次のように更新する．

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_\alpha \leftarrow \frac{(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha}{(\boldsymbol{u}, V_0[\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha]\boldsymbol{u})},$$
$$\tilde{\boldsymbol{x}}'_\alpha \leftarrow \frac{(\boldsymbol{u}, \hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha)\boldsymbol{P}_{\mathbf{k}}\boldsymbol{F}^\top\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha}{(\boldsymbol{u}, V_0[\hat{\boldsymbol{\xi}}_\alpha]\boldsymbol{u})} \tag{40}$$

7. $\boldsymbol{u}_0, \hat{x}_\alpha, \hat{y}_\alpha, \hat{x}'_\alpha, \hat{y}'_\alpha$ を次のように更新してステップ 3 に戻る．

$$\boldsymbol{u}_0 \leftarrow \boldsymbol{u}, \quad \hat{x}_\alpha \leftarrow x_\alpha - \tilde{x}_\alpha,\ \ \hat{y}_\alpha \leftarrow y_\alpha - \tilde{y}_\alpha,$$
$$\hat{x}'_\alpha \leftarrow x'_\alpha - \tilde{x}'_\alpha,\ \ \hat{y}'_\alpha \leftarrow y'_\alpha - \tilde{y}'_\alpha \tag{41}$$

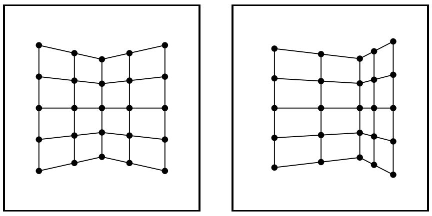

図 1: 2 枚の平面格子シミュレーション画像.

以下，区別のために，2 節に述べた $\boldsymbol{\xi}$ 空間で式 (11) のマハラノビス距離を最小にする（すなわち式 (11) を最小にする）方法を「低ノイズレベル法」，本節の xy 画像面で式 (13) のマハラノビス距離（＝再投影誤差）を最小にする方法を「高ノイズレベル法」と呼ぶ.

上記の手順から，低ノイズレベル法はステップ 5 で計算を終了することに相当し，それ以降の反復は先に指摘したように，$\boldsymbol{\xi}$ 空間における "ノイズの非正規性" を補正する手段であると解釈できる.

4. シミュレーション実験

図 1 はシーン中で角度 60° をなす 2 枚の平面格子を異なる 2 方向から見た画像である．これは 600×600 画素を想定し，焦点距離は 1200 画素である．画像中の格子点を特徴点として，各点の x, y 座標に平均 0，標準偏差 σ 画素の正規分布に従う乱数ノイズを独立に加え，これから基礎行列を計算した.

実験では，3.4 節の手順のステップ 5 の式 (39) の最小化に金谷ら [13] の拡張 FNS 法を用いた．ただし，これが一定回数（実験では 100 回とした）で収束しなければ，ランク拘束のない解を菅谷ら [18] の射影的ガウス・ニュートン法で計算し[6]，それを最適補正したものを初期値として，ランク拘束した菅谷ら [19] の LM 法を適用した．反復の終了条件は $\boldsymbol{F}$ の更新量がノルムで測って 10^{-6} 以下とした.

図 2 は精度の評価尺度として，各 σ に対して 10000 回の独立に試行し，式 (8) に対応する次の平方平均二乗誤差 D を調べたものである.

$$D = \sqrt{\frac{1}{10000}\sum_{a=1}^{10000} \|\boldsymbol{P}_{\mathcal{U}}\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}\|^2} \tag{42}$$

ここに，$\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}$ は a 回目の試行の解 $\hat{\boldsymbol{F}}^{(a)}$ のベクトル表現である．低ノイズレベル法のグラフと高ノイズレベル法のグラフを重ねているが，完全に重なっている．点線は対応する KCR 下界（＝式 (9) の右辺のトレース）である.

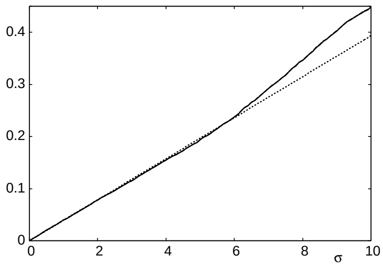

図 2: 図 1 に対する解の平方平均二乗誤差．横軸はノイズの標準偏差 σ．高ノイズレベル法と低ノイズレベル法のプロットは重なる．点線: KCR 下界.

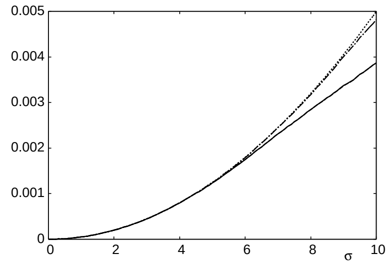

図 3: 図 1 に対する解の平均再投影誤差．高ノイズレベル法と低ノイズレベル法のプロットは重なる．点線: $(N-7)\sigma^2/f_0^2$．鎖線: 近似的再投影誤差の平均.

図 3 はデータ $\boldsymbol{x}_\alpha$, $\boldsymbol{x}'_\alpha$ の推定した真の位置 $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ の再投影誤差

$$\hat{J} = \sum_{\alpha=1}^{N}\Bigl(\|\boldsymbol{x}_\alpha - \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha\|^2 + \|\boldsymbol{x}'_\alpha - \hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha\|^2\Bigr) \tag{43}$$

の 10000 回の平均値をプロットしたものである．これも低ノイズレベル法のグラフと高ノイズレベル法のグラフを重ねているが，完全に重なっている．なお，比較として点線で $(N-7)\sigma^2/f_0^2$（N は対応点数）を示す．これは $f_0^2 J/\sigma^2$ が第1 近似として自由度 $N-7$ の χ^2 分布に従い，したがって J はその期待値 $(N-7)\sigma^2/f_0^2$ にほぼ等しいと期待されるからである.

低ノイズレベル法は 3.4 節の手順のステップ 5 で終了することに相当し，その段階での近似的な再投影誤差が式 (11) の J に等しい．その後，計算された基礎行列 $\boldsymbol{F}$ を更新せず，ステップ 3〜7 を反復して $\boldsymbol{F}$ に関するエピ極線方程式を満たす $\hat{\boldsymbol{x}}_\alpha$, $\hat{\boldsymbol{x}}'_\alpha$ を計算して式 (43) を評価した．これによって，データからその $\boldsymbol{F}$ のエピ極線方程式を満たす最も近い位置までの距離の二乗和が計算される.

図 3 中には比較のために式 (11) の近似的再投影誤差を鎖線で示している．図からわかるように，$(N-$

[6] これは Chojnacki ら [3] の FNS 法，Leedan ら [14] の HEIV 法でも収束すれば同じ解が得られるが，実験的に比較すると菅谷ら [18] の射影的ガウス・ニュートン法の最も大きなノイズレベルに対して収束した.

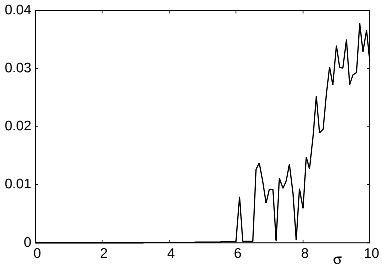

図 4: 図 1 に対する高ノイズレベル法と低ノイズレベル法の解の差の平方平均二乗．横軸はノイズの標準偏差 σ．

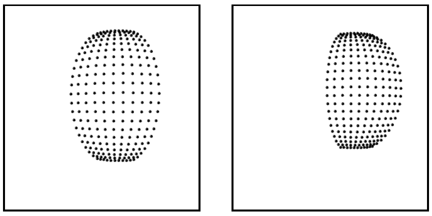

図 5: 2 枚の球面格子シミュレーション画像．

$7)\sigma^2/f_0^2$ にほぼ近い値になっている．そして σ が小さいとき（この例では $\sigma = 6$ 程度まで），近似的再投影誤差（第 1 近似）と真の再投影誤差とは一致し，それを超えると次第に差が生じてくる．しかし，図 3, 5 からわかるように，近似的再投影誤差を最小にしても真の再投影誤差を最小にしても解の精度に変化が見られない．

ただし，解がまったく同じというわけではない．図 4 は式 (42) 中の $\hat{\boldsymbol{u}}^{(a)}$ を低ノイズレベル法と高ノイズレベル法の解の差に置き換えて計算した両者の差の比較である．ノイズが小さいところでは解が一致しているが，$\sigma = 6$ あたりから両者に差が生じている．しかし，差は非常に小さく (図 4 はスケールを拡大している)，その挙動はランダムに近い．

どんな方法で計算しても，データにノイズがある限り解には KCR 下界で表される誤差が必然的に生じる．しかし，上の結果からは低ノイズレベル法と高ノイズレベル法の解の差はそれよりはるかに小さく，必然的な誤差の中に埋もれてしまっている．この例では $\sigma = 6$ を超えると，計算した基礎行列が 20 ～ 30%の誤差を含むのに，両者の差は高々3%である．

図 5 は球面上の格子パタンを 2 方向からみたシミュレーション画像である（サイズ 600×600，焦点距離 1200）．この場合の図 2, 3, 4 に対応する結果が図 6, 7, 8 である．この例についても傾向は同じである．

図 9 は図 1，5 に対して，各 σ に対する式 (39) の最小化の平均の反復回数をプロットしたものである．このように，反復自体は 2 ～ 4 回で収束している．しかし，ノイズが増えるとともに，式 (39) の最小化に

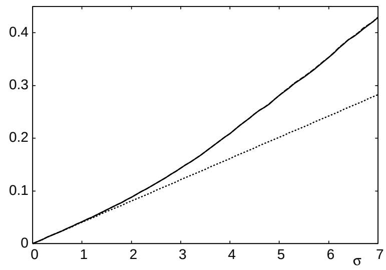

図 6: 図 5 に対する解の平方平均二乗誤差．横軸はノイズの標準偏差 σ．実線: 高ノイズレベル法．破線: 低ノイズレベル法．点線: KCR 下界．

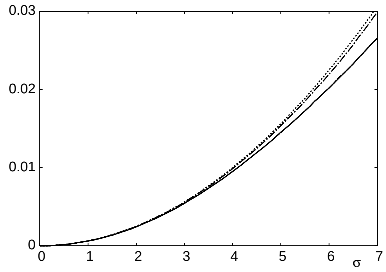

図 7: 図 5 に対する解の平均再投影誤差．横軸はノイズの標準偏差 σ．実線: 高ノイズレベル法．破線: 低ノイズレベル法．点線: $(N-7)\sigma^2/f_0^2$．鎖線: 近似的再投影誤差の平均．

次第に多くの実行時間を必要とするようになる．それにもかかわらず精度の向上が見られないのであるから，1 回の低レベルノイズ法の計算で十分であると結論される．

5. 実画像実験

図 10 の 2 画像から図中に示した 100 個の対応点を手動で選び，それから基礎行列を計算した．表 1 は低ノイズレベル法と高ノイズレベル法の再投影誤差 J と実行時間（秒）を比較したものである．CPU には Core2Duo E6700 2.66GHz，主メモリ 4GB，OS には Linux を用いた．両者に違いが見られない．

6. まとめ

本論文では 2 画像間の対応点から基礎行列を計算する問題に対して，高ノイズレベルにおける画像面上の最尤推定を厳密に計算する新しい方法を示した[7]．これは従来のような仮の 3 次元復元を介する高次元空間の探索ではなく，低ノイズレベルに対する方法を反復適用するものである．この方法をシミュレーションおよび実画像データに適用し，非常に広いノイズレベルに渡り，精度は低ノイズレベル法と区別できる差がないことを確認した．

[7] 以下にプログラムを公開している．
`http://www.iim.ics.tut.ac.jp/~sugaya/public.php`

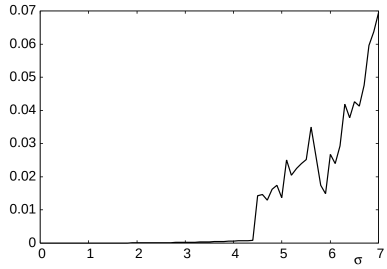

図 8: 図 5 に対する高ノイズレベル法と低ノイズレベル法の解の差の平方平均二乗．横軸はノイズの標準偏差 σ．

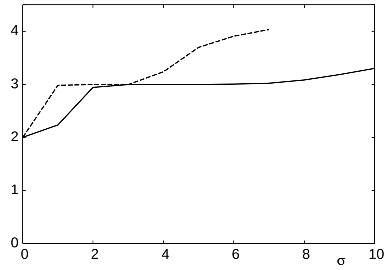

図 9: 図 1，5 に対する高ノイズレベル法の平均反復回数．横軸はノイズの標準偏差 σ．実線は図 1 の例．破線は図 5 の例．

したがって，実際問題では低ノイズレベル法で十分であり，$\boldsymbol{\xi}$ 空間のノイズの非正規性は考慮する必要がない．精度向上に必要なものは厳密な最尤推定ではなく，対応探索の精度向上やアウトライアを除去するロバスト推定であろう．

高ノイズレベル法と低ノイズレベル法に差がほとんどない理由はエピ極線方程式 (1) が双1 次形式であり，$\boldsymbol{x}$ についても $\boldsymbol{x}'$ についても線形であるためと思われる．このため2 次の誤差項はそれぞれの誤差の積のみであり，プラスマイナスがバランスして平均的には偏差を生じない．幾何学的には式 (1) は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}'$ の直積空間で双曲線織面を定義し，その $\boldsymbol{x}$ 空間との切り口も $\boldsymbol{x}'$ 空間との切り口も直線（エピ極線）である．したがって，各データ点の近傍における線形近似が非常によい精度で成立すると考えられる．

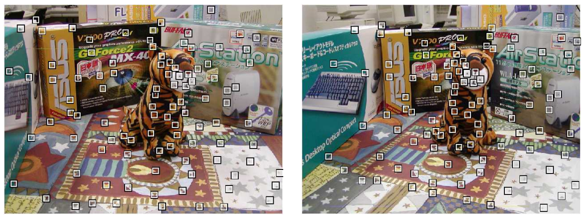

図 10: 実画像と対応点（100 個）．

表 1: 図 10 の実画像の対応点から求めた基礎行列の再投影誤差と実行時間．

	再投影誤差	実行時間（秒）
低ノイズレベル法	43.400	.01948
高ノイズレベル法	43.400	.03016

参考文献

[1] A. Bartoli and P. Sturm, Nonlinear estimation of fundamental matrix with minimal parameters, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **26**-3 (2004-3), 426–432.

[2] N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47**-4 (2004-11), 713–728.

[3] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000-11), 1294–1303.

[4] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, A new constrained parameter estimator for computer vision applications¡/A¿, *Image Vis. Comput.*, **22**-2 (2004-2), 85–91.

[5] R. I. Hartley, In defense of the eight-point algorithm, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19**-6 (1997-6), 580–593.

[6] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000.

[7] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994-2), 201–209.

[8] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36**-8 (1995-8), 1865–1873.

[9] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, 2005.

[10] 金谷 健一, くりこみ法その後: 波紋と発展, 情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-139-5 (2003-7), 33–40.

[11] 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.

[12] 金谷 健一, 幾何学的当てはめの高次誤差解析, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-156-18 (2006-11), 147–154.

[13] 金谷健一, 菅谷保之, 制約付きパラメータ推定のための拡張 FNS 法, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-158-4 (2007-3), pp. 25–32.

[14] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37**-2 (2000-6), 127–150.

[15] J. Matei and P. Meer, Estimation of nonlinear errors-in-variables models for computer vision applications, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **28**-10 (2006-10), 1537–1552.

[16] 右田剛史, 天野 晃, 浅田尚紀, 3 次元形状・運動復元のための高速非線形最適化計算法, 情報処理学会論文誌, **44**-11 (2003-11), 2864–2872.

[17] 椋木雅之, 右田剛史, 青山正人, 浅田尚紀, 非線形最適化による建物画像列からの全周形状一括復元のための初期値設定法, 情報処理学会論文誌, **45**-SIG 13 (2004-12), 64–73.

[18] 菅谷保之, 金谷健一, 基礎行列の高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-153-32 (2006-3), 207–214.

[19] 菅谷保之, 金谷健一, 効率的探索によるランク拘束した基礎行列の高精度計算, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-158-3 (2007-3), pp. 17–24.

[20] 菅谷保之, 金谷健一, 最高精度の基礎行列計算法, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-159-29 (2007-5), pp. 225–232.

[21] B. Triggs, P. F. McLauchlan, R. I. Hartley, and A. Fitzgibbon, Bundle adjustment—A modern synthesis, in B. Triggs, A. Zisserman, and R. Szeliski (Eds.), *Vision Algorithms: Theory and Practice*, Lecture Notes in Computer Science, No. 1883, Springer, Berlin, 2000.