因子分解を用いない因子分解法: 複数物体分離

金谷 健一

群馬大学工学部情報工学科

376-8515 桐生市天神町 1–5–1 群馬大学工学部情報工学科

Tel: (0277)30-1842 Fax: (0277)30-1844, 1801 kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

本論文では画像列から因子分解法を利用して複数物体の分離を行うと称する Costeira-Kanade 法の証明が不完全であることを指摘し、問題をより抽象的に一般化した上で完全な証明を与える。その結果、問題が特異値分解や行列の因子分解法とはまったく無関係であることがわかり、因子分解法とは関係ない一般的な数学的定理が得られる。これは画像列からの複数物体の分離だけでなく種々の問題に転用できる。また、本論文に示す証明により問題の数学的構造が明らかになるとともに、定理が適用できない退化の幾何学的意味がより明確になる。最後に、画像に誤差がある場合の Costeira-Kanade 法の解の厳密な統計的解析を行うとともに、誤差の大きさが未知でも幾何学的 AIC によって物体の分離が判定できることを示す。

キーワード: 因子分解法, 3 次元運動解析, 複数物体分離, 動画像, 統計的誤差解析, 幾何学的 AIC

Factorization without Factorization:Multibody Segmentation

Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Gunma University, Kiryu, Gunma 376-8515 Japan

Tel: +81(277)30-1842 Fax: +81(277)30-1844, 1801 kanatani@cs.gunma-u.ac.jp

We point out that the proof of the Costeira-Kanade algorithm for motion segmentation, supposedly by means of the so called "factorization method", is incomplete and unable to justify the algorithm. We give a complete proof, establishing in effect a general mathematical theorem. It turns out that the theorem has nothing to do with the matrix factorization or the SVD on which it is based. Our proof enables us to understand more clearly the geometry of degenerate cases where the theorem does not hold. Finally, we give a rigorous statistical analysis for the Costeira-Kanade algorithm in the presence of noise. We also give a model selection criterion for multibody segmentation using the geometric AIC, which can be applied even if the magnitude of image noise is unkonwn.

Key words: factorization, structure from motion, multibody segmentation, motion images, statistical error analysis, geometric AIC

1. 序論

Tomasi と Kanade [13] によって考案された因子分解法はその単純さのため、画像列から 3 次元復元を行う最も基本的な手法の一つとみなされている [3, 9, 11]。しかし、撮像を平行投影で近似する必要があること、およびシーンが単一の剛体から成っている必要があることの制限があった。前者に対しては最近透視変換への拡張が最近さまざまな形でなされている [2, 12, 14, 15]。後者の制限を除く工夫は Costeira と Kanade [1] によって提案された。これは非常に単純な方法であり、誤差がない場合には正しく複数物体が分離され、その原理は Tomasi-Kanade の因子分解法に基くとされている。

本論文ではまず Costeira と Kanade の原論文 [1] に与えられている証明が不完全であり、そのままの形では理論的に正当化されないことを指摘する。そして問題を抽象的に拡張した上で、一つの数学的定理として完全な証明を与える。その結果、問題が特異値分解や行列の因子分解法とはまったく無関係であることがわかり、画像列からの複数物体の分離だけでなく種々の問題に転用できることを示す。また定理が適用できない退化の幾何学的意味がより明確になる。

最後に、画像に誤差がある場合の統計的解析を行う。これにより Costeira-Kanade 法の判定条件に用いるしきい値の妥当性が統計的に評価できる。一方、これを補完する形で、物体が分離しているかどうかを判定する幾何学的 AIC によるモデル選択の基準を示す。これによって、誤差の大きさが未知の場合でも物体の分離が判定できる。

2. Costeira-Kanade 法

Costeira と Kanade [1] の主張は次のようにまとめられる。静止したカメラ座標系に対して二つの物体が運動しているとする[1](物体が三つ以上あっても議論は同じ)。M 枚の画像中に N 個の特徴点 p_α, $\alpha = 1, ..., N$ を追跡し、その内の N_1 個が物体 1 に、N_2 $(= N - N_1)$ 個が物体 2 に属するとする。特徴点 p_α の第 κ 画像中の画像座標を $(x_{\kappa\alpha}, y_{\kappa\alpha})$ とする。これを $\kappa = 1, ..., M$ に渡って並べた $2M$ 次元ベクトル $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $2M \times N$ 観測行列を次のように定義する。

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \begin{pmatrix} x_{1\alpha} \\ y_{1\alpha} \\ x_{2\alpha} \\ y_{2\alpha} \\ \vdots \\ y_{M\alpha} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_N \end{pmatrix} \tag{1}$$

(第 2 式の右辺はベクトル $\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_N$ をこの順に列とする行列を意味する)。$\boldsymbol{W}$ に次のように特異値分解を施す。

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\top \tag{2}$$

ただし、$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ はそれぞれは 8 本の直交する列をもつ $2M \times 8$ 行列および $N \times 8$ 行列であり[2]、$\top$ は転置を表す。$\boldsymbol{\Sigma}$ は 8 個の正の特異値を対角要素とする 8×8 対角行列である[3]。次の $N \times N$ 形状作用行列 $\boldsymbol{Q} = (Q_{\alpha\beta})$ を定義する。

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^\top \tag{3}$$

Costeira と Kanade の主張は特徴点 p_α と p_β が異なる物体に属するとき $Q_{\alpha\beta} = 0$ になり、したがって物体の形状や運動に無関係に二つの物体が分離できるというものである (二個以上の物体でも同様)。

Costeira と Kanade [1] は次のような証明を与えている。もし $p_1, ..., p_{N_1}$ が物体 1 に、$p_{N_1+1}, ..., p_N$ が物体 2 に属するなら、それぞれの観測行列を $\boldsymbol{W}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_{N_1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{W}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{N_1+1} \cdots \boldsymbol{p}_N \end{pmatrix}$ とし、それぞれに特異値分解を施すと次のようになる[4]。

$$\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\Sigma}_1\boldsymbol{V}_1^\top, \quad \boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{\Sigma}_2\boldsymbol{V}_2^\top \tag{4}$$

ここで

$$\boldsymbol{W}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{W}_1 \, \boldsymbol{W}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_1 \, \boldsymbol{U}_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \\ & \boldsymbol{\Sigma}_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{V}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}_1 & \\ & \boldsymbol{V}_2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

と定義すると、式 (4) は次のように書ける[5]。

$$\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{U}^*\boldsymbol{\Sigma}^*\boldsymbol{V}^{*\top} \tag{6}$$

Costeira と Kanade [1] はまず

$$\boldsymbol{Q}^* = \boldsymbol{V}^*\boldsymbol{V}^{*\top} \tag{7}$$

に対して主張が正しいことを示した。そして、$\boldsymbol{V}^*$ は行の置換を除いて $\boldsymbol{V}$ と等しく、したがって $\boldsymbol{Q}^*$ は行と列の置換を除いて $\boldsymbol{Q}$ に等しいから主張が成り立つと主張した。

しかし、これは文字通りには正しくない。なぜなら式 (6) は行列 $\boldsymbol{Q}^*$ 特異値分解ではないからである。特異値分解なら行列 $\boldsymbol{U}^*$ の列も行列 $\boldsymbol{V}^*$ も互いに直交していなければならない。行列 $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$ はそれぞれ行列 $\boldsymbol{W}_1$, $\boldsymbol{W}_2$ の特異値分解によって定義されているから $\boldsymbol{U}_1$ と $\boldsymbol{U}_2$ はそれぞれ直交する列をもつが、一般にはそれら同士は直交しない。したがって $\boldsymbol{V}^*$ は行の置換を除いても $\boldsymbol{V}$ と異なり、$\boldsymbol{Q}^*$ も行と列の置換を除いても $\boldsymbol{Q}$ とは異なる。

それでも Costeira と Kanade の主張自体は正しい。これを証明するにはいくつかの補足が必要であり、Costeira と Kanade も当然それを承知していたのであろう。ただ、

[1] 単一物体の場合は物体が静止してカメラが移動すると考えてもカメラが静止して物体が移動すると考えても同じことであるが、複数物体の場合は静止カメラ系に対して各物体が独立に運動すると考える。

[2] ランクが 8 になる理由は次節で述べる。

[3] Costeira と Kanade は式 (2) に対応する “因子分解” $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{S}$ を定義している。

[4] Costeira と Kanade は式 (4) に対応する “因子分解” $\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{M}_2\boldsymbol{S}_2$ を定義している。

[5] Costeira と Kanade は式 (6) に対応する “因子分解” $\boldsymbol{W}^* = \boldsymbol{M}^*\boldsymbol{S}^*$ を定義している。

それが明確に記述できなかった理由は、無意識にそれを Tomasi-Kanade の “因子分解法” の一つの応用、発展と位置づけて、それと結び付けようとしたためであると思われる。しかし、冷静に吟味すると Costeira-Kanade 法は “因子分解法” とは全く無関係な数学的事実を述べているに過ぎない。したがって、これを簡明に説明するには “因子分解法” を持ち出さないのがよい (Costeira と Kanade はそれを持ち出したためにわかりにくくなった)。

3. 部分空間の分離

まず単一物体の運動を考える。静止したカメラ座標系を世界座標系と同一視し、 XY 面を画像面、 Z 軸をカメラの光軸とみなす。物体に任意に物体座標系を固定し、 α 番目の特徴点 p_α の物体座標系に関する座標を $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$ とする。時刻 κ での物体座標系の原点の位置と各座標基底ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{t}_\kappa$、 $\{\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{k}_\kappa\}$ とすると、特徴点 p_α の時刻 κ における位置 $\boldsymbol{r}_{\kappa\alpha}$ は次のように書ける。

$$\boldsymbol{r}_{\kappa\alpha} = \boldsymbol{t}_\kappa + a_\alpha \boldsymbol{i}_\kappa + b_\alpha \boldsymbol{j}_\kappa + c_\alpha \boldsymbol{k}_\kappa \tag{8}$$

平行投影を仮定すると、点 $\boldsymbol{r} = (X, Y, Z)^\top$ の画像座標は (X, Y) である。ベクトル $\boldsymbol{t}_\kappa, \boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{k}_\kappa$ の投影、すなわち Z 座標を取り除いた 2 次元ベクトルをそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{t}}_\kappa, \tilde{\boldsymbol{i}}_\kappa, \tilde{\boldsymbol{j}}_\kappa, \tilde{\boldsymbol{k}}_\kappa$ とし、それらを $\kappa = 1, ..., M$ に渡って縦に並べた $2M$ 次元ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3$ とすると、式 (1) で定義した $2M$ 次元ベクトル $\boldsymbol{p}_\alpha$ が次のように表せる。

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \boldsymbol{m}_0 + a_\alpha \boldsymbol{m}_1 + b_\alpha \boldsymbol{m}_2 + c_\alpha \boldsymbol{m}_3 \tag{9}$$

すなわち各特徴点 p_α の “履歴” が $2M$ 次元空間 $\mathcal{R}^{2M}$ の 1 点として表せる。そして、 N 個の点 $\boldsymbol{p}_\alpha$ がベクトル $\{\boldsymbol{m}_0, \boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \quad \boldsymbol{m}_3\}$ の張る 4 次元部分空間 $\mathcal{L}$ に含まれることがわかる。

物体が二つあるとき、特徴点の番号の集合 $\mathcal{I} = \{1, ..., N\}$ を $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}, \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \emptyset$ と分割し、 $\{p_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{I}_1$ が物体 1、 $\{p_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{I}_2$ が物体 2 に属するとすると $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{I}_1$ がある 4 次元部分空間 $\mathcal{L}_1$ に、 $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{I}_2$ が別の 4 次元部分空間 $\mathcal{L}_2$ に含まれる。ゆえに、複数物体の分離は $2M$ 次元空間 $\mathcal{R}^{2M}$ の点集合を互いに異なる 4 次元部分空間に分割することと等価である。

$N \times N$ 計量行列 $\boldsymbol{G} = (G_{\alpha\beta})$ を次のように定義する[6]。

$$G_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta) \tag{10}$$

定義よりこれはランク 8 の半正値対称行列である [4]。その固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N$(最初の 8 個のみが非零) とし、対応する固有ベクトルの正規直交系を $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_N\}$ とする。 $N \times N$ 作用行列 $\boldsymbol{Q} = (Q_{\alpha\beta})$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{8} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\top \tag{11}$$

[6]本論文ではベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と表す。

【定 理 1】 $\alpha \in I_1, \beta \in I_2$ のとき

$$Q_{\alpha\beta} = 0 \tag{12}$$

以下ではこれを具体的な複数物体の分離問題として直接に証明するのではなく、より一般的な記述に抽象化し、一つの数学的定理として証明する。

4. 一般化

n 次元空間 $\mathcal{R}^n$ の N 点 $\boldsymbol{p}_\alpha, \alpha = 1, ..., N$ を考え、添え字集合 $\mathcal{I} = \{1, ..., N\}$ を次のように m 個の部分集合に分割する。

$$\mathcal{I}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{I}_m = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{I}_m = \emptyset \tag{13}$$

したがって $|I_i| = N_i$ とすれば $\sum_{i=1}^m N_i = N$ である[7]。第 i 集合 $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{I}_i$ の張る部分空間を $\mathcal{L}_i$ とし、その次元を r_i とする。そして $r = \sum_{i=1}^m r_i$ と置き、 m 個の部分空間 $\mathcal{L}_i$, $i = 1, ..., m$ は互いに線形独立であると仮定する。すなわち、直和空間 $\mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_m$ は $\mathcal{R}^n$ の r 次元部分空間であるとする。

$N \geq r$ と仮定し、 $N \times N$ 計量行列 $\boldsymbol{G} = (G_{\alpha\beta})$ を次のように定義する。

$$G_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta) \tag{14}$$

定義よりこれはランク r の半正値対称行列である [4]。その固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_N$ (最初の r 個のみが非零) とし、対応する固有ベクトルの正規直交系を $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_N\}$ とする。そして $N \times N$ 作用行列 $\boldsymbol{Q} = (Q_{\alpha\beta})$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^\top \tag{15}$$

【定 理 2】 $\alpha \in \mathcal{I}_i, \beta \in \mathcal{I}_j, i \neq j$ のとき

$$Q_{\alpha\beta} = 0 \tag{16}$$

5. 定理 2の証明

$m = 2$ の場合を証明すれば十分である ($m > 2$ でも証明は同じ)。まず $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ は “順序よく” 並んでいるとする。すなわち $\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_{N_1} \in \mathcal{L}_1, \boldsymbol{p}_{N_1+1}, ..., \boldsymbol{p}_N \in \mathcal{L}_2$ であるとする。部分空間 $\mathcal{L}_1$ の次元が r_1 であるから、 $n \times N_1$ 行列 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_{N_1} \end{pmatrix}$ のランク (独立な列の数) は r_1 である。ゆえにこの行列は $\mathcal{R}^{N_1}$ から $\mathcal{R}^n$ へのランク r_1 の写像を定義し、その零空間 $\mathcal{N}_1$ (0 に写像される $\mathcal{R}^{N_1}$ の部分空間) の次元は $\nu_1 = N_1 - r_1$ である。その零空間の任意の正規直交基底を $\{\boldsymbol{n}_1, ..., \boldsymbol{n}_{\nu_1}\}$ とする (各 $\boldsymbol{n}_i$ は N_1 次元ベクトルである)。同様に $n \times N_2$ 行列 $\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_{N_1} & \cdots & \boldsymbol{p}_N \end{pmatrix}$ は $\mathcal{R}^{N_2}$ から $\mathcal{R}^n$ へのランク r_2 の写像を定義し、それ零空間 $\mathcal{N}_2$ の次元は $\nu_2 = N - r_2$ である。その零空間の任意の正規直交基底を $\{\boldsymbol{n}'_1, ..., \boldsymbol{n}'_{\nu_2}\}$ とする (各 $\boldsymbol{n}_i$ は N_2 次元ベクトルである)。

[7]$|\cdot|$ は集合の濃度、すなわち元の数を表す。

ベクトル $\{\boldsymbol{n}_i\},\ \{\boldsymbol{n}'_i\}$ に 0 成分を付け加えて次の N 次元ベクトル $\{\tilde{\boldsymbol{n}}_i\},\ i=1,..,\nu_1,\ \{\tilde{\boldsymbol{n}}'_i\},\ i=1,..,\nu_2$ を作る。

$$\tilde{\boldsymbol{n}}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_i\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{n}}'_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{n}'_i\end{pmatrix}. \tag{17}$$

この定義より $N-r$ 本のベクトル $\{\tilde{\boldsymbol{n}}_1,\ ...,\ \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1},\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1,\ ...,\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\}$ は $\mathcal{R}^N$ の正規直交系であり、すべて $n\times N$ 行列 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1\cdots\boldsymbol{p}_N\end{pmatrix}$ の零空間 $\mathcal{N}$ に属している。行列 $\boldsymbol{P}$ のランクは仮定により $r_1+r_2\ (=r)$ であるからその零空間 $\mathcal{N}$ は次元 $\nu=N-r$ を持つ。したがって $\{\tilde{\boldsymbol{n}}_1,\ ...,\ \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1},\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1,\ ...,\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\}$ は零空間 $\mathcal{N}$ の正規直交基底である。

式 (14) は $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{P}^\top\boldsymbol{P}$ を表しているから、$\{\tilde{\boldsymbol{n}}_1,\ ...,\ \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1},\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1,...,\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\}$ は行列 $\boldsymbol{G}$ の固有値 0 に対する固有ベクトルの正規直交系である。行列 $\boldsymbol{G}$ の固有値 0 に対する固有ベクトルの正規直交系として別のもの $\{\boldsymbol{v}_{r+1},\ ...,\ \boldsymbol{v}_N\}$ をとると、ν^2 個の定数 $\{c_{ij}\},\ i,j=1,\ ...,\ \nu$ が存在して次の関係が成り立つ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{r+1}&=c_{11}\tilde{\boldsymbol{n}}_1+\cdots+c_{1\nu_1}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}+c_{1(\nu_1+1)}\tilde{\boldsymbol{n}}'_1+\cdots+c_{1\nu}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_2}\\
\boldsymbol{v}_{r+2}&=c_{21}\tilde{\boldsymbol{n}}_1+\cdots+c_{2\nu_1}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}+c_{2(\nu_1+1)}\tilde{\boldsymbol{n}}'_1+\cdots+c_{2\nu}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_2}\\
&\vdots\\
\boldsymbol{v}_N&=c_{\nu1}\tilde{\boldsymbol{n}}_1+\cdots+c_{\nu\nu_1}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}+c_{\nu(\nu_1+1)}\tilde{\boldsymbol{n}}'_1+\cdots+c_{\nu\nu}\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_2}
\end{aligned} \tag{18}$$

これは次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_{r+1}\cdots\boldsymbol{v}_N\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&c_{21}&\cdots&c_{\nu1}\\ c_{12}&c_{22}&\cdots&c_{\nu2}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ c_{1\nu}&c_{2\nu}&\cdots&c_{\nu\nu}\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{19}$$

$\{\boldsymbol{v}_{r+1},\ ...,\ \boldsymbol{v}_N\}$ も $\{\tilde{\boldsymbol{n}}_1,\ ...,\ \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1},\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1,\ ...,\ \tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_2}\}$ も正規直交系であるから $\nu\times\nu$ 行列 (c_{ij}) は直交行列である。

$N\times\nu$ 行列 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_{r+1}\cdots\boldsymbol{v}_N\end{pmatrix}$ の第 α 行と第 β 行との内積を $(\alpha\beta)$ 要素とする次の $\nu\times\nu$ 行列を考える。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_{r+1}\cdots\boldsymbol{v}_N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_{r+1}\cdots\boldsymbol{v}_N\end{pmatrix}^\top\\
&=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&c_{21}&\cdots&c_{\nu1}\\ c_{12}&c_{22}&\cdots&c_{\nu2}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ c_{1\nu}&c_{2\nu}&\cdots&c_{\nu\nu}\end{pmatrix}\\
&\quad\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1\nu}\\ c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2\nu}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ c_{\nu1}&c_{\nu2}&\cdots&c_{\nu\nu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\end{pmatrix}^\top\\
&=\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\end{pmatrix}^\top
\end{aligned} \tag{20}$$

この変形に (c_{ij}) が直交行列であることを用いた。$\{\tilde{\boldsymbol{n}}_i\}$ と $\{\tilde{\boldsymbol{n}}_i\}$ の定義より、行列 $\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\end{pmatrix}$ は次の形を持っている。

$$\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_1\cdots\boldsymbol{n}_{\nu_1}&\boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\cdots\boldsymbol{0}&\boldsymbol{n}'_1\cdots\boldsymbol{n}'_{\nu_2}\end{pmatrix} \tag{21}$$

したがって次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{n}}_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}_{\nu_1}\ \tilde{\boldsymbol{n}}'_1\cdots\tilde{\boldsymbol{n}}'_{\nu_2}\end{pmatrix}^\top\\
&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{n}_1^\top&\boldsymbol{0}^\top\\ \vdots&\vdots\\ \boldsymbol{n}_{\nu_1}^\top&\boldsymbol{0}^\top\\ \boldsymbol{0}^\top&\boldsymbol{n}_1'^\top\\ \vdots&\vdots\\ \boldsymbol{0}^\top&\boldsymbol{n}_{\nu_2}'^\top\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&\boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O}&\dagger\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{22}$$

ここに $(*),\ (\dagger)$ はそれぞれ $\nu_1\times\nu_1,\ \nu_2\times\nu_2$ の部分行列である。これから $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば行列 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_{r+1}\cdots\boldsymbol{v}_N\end{pmatrix}$ の第 α 行と第 β 行は直交することがわかる。行列 $\boldsymbol{G}$ の非零の固有値に対する固有ベクトルの任意の正規直交系を $\{\boldsymbol{v}_1,\ ...,\ \boldsymbol{v}_r\}$ とし、これと $\{\boldsymbol{v}_{r+1},\ ...,\ \boldsymbol{v}_N\}$ を合わせると行列 $\boldsymbol{G}$ のすべての固有値に対する固有ベクトルの正規直交系 $\{\boldsymbol{v}_1,\ ...,\ \boldsymbol{v}_N\}$ が得られ、$N\times N$ 行列

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_r\ \boldsymbol{v}_{r+1}\cdots\boldsymbol{v}_N\end{pmatrix} \tag{23}$$

は直交行列となる。したがって N 個の行は互いに直交する。ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ の第 α 要素を $v_{\alpha i}$ と書くと、行列 $\boldsymbol{V}$ の第 α 行は $(v_{\alpha1},...,v_{\alpha N})$ であり、第 β 行は $(v_{\beta1},...,v_{\beta N})$ である。ゆえに $\alpha\neq\beta$ のとき

$$v_{\alpha1}v_{\beta1}+\cdots+v_{\alpha r}v_{\beta r}+v_{\alpha(r+1)}v_{\beta j(r+1)}+\cdots+v_{\alpha N}v_{\beta N}=0 \tag{24}$$

である。既に示したように $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば $v_{\alpha(r+1)}v_{\beta(r+1)}+\cdots+v_{\alpha N}v_{\beta N}=0$ である。したがって、$\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば

$$v_{\alpha1}v_{\beta1}+\cdots+v_{\alpha r}v_{\beta r}=0 \tag{25}$$

である。このことは $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば $N\times n$ 行列

$$\boldsymbol{V}_r=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_r\end{pmatrix} \tag{26}$$

の第 α 行と第 β 行とが直交することを意味する。行列 $\boldsymbol{V}_r$ の第 α 行と第 β 行の内積を $(\alpha\beta)$ 要素とする $N\times N$ 行列は

$$\boldsymbol{V}_r\boldsymbol{V}_r^\top=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_r\end{pmatrix}^\top=\sum_{i=1}^r\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^\top=\boldsymbol{Q} \tag{27}$$

である。ゆえに $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ が異なる部分空間に属せば作用行列 $\boldsymbol{Q}$ の第 $(\alpha\beta)$ 要素は 0 となる。

以上では $\boldsymbol{p}_1,\ ...,\ \boldsymbol{p}_{N_1}\in\mathcal{L}_1,\ \boldsymbol{p}_{N_1+1},\ ...,\ \boldsymbol{p}_N\in\mathcal{L}_2$ と仮定したが、$\boldsymbol{p}_1,\ ...,\ \boldsymbol{p}_N$ を任意に置換しても結論は同じであ

る。なぜなら、 $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ を交換すると行列 $\boldsymbol{G}$ の第 α 行と第 β が、そして第 α 列と第 β 列がそれぞれ交換される。その結果 α 番目の固有ベクトルと β 番目の固有ベクトルが固有値は同じままで入れ替るので、行列 $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_r \end{pmatrix}$ の第 α 行と第 β 行とが入れ替る。したがって、作用行列 $\boldsymbol{Q}$ の第 α 行と第 β 行が、そして第 α 列と第 β 列がそれぞれ入れ替る。$\boldsymbol{p}_1,\ ...,\ \boldsymbol{p}_N$ の任意の置換は交換の組み合わせで得られるから、任意の置換で定理が成立する。二つ以上の部分空間がある場合も同様に証明できる。 □

6. 退化の発生

Costeira と Kanade [1] によって指摘されているように、定理 1を用いて複数物体の分離を行うためには次の条件が満たされる必要がある。

1. ベクトル $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ が 4 次元部分空間を張る。すなわち、より低い次元の部分空間に含まれてはならない[8]。
2. 異なる物体に対する部分空間は互いに線形独立である。すなわち、$\boldsymbol{0}$ 以外に共通の元を含んではならない。

第 1 点より、特に $\boldsymbol{m}_0,\ ...,\ \boldsymbol{m}_3$ のどれも $\boldsymbol{0}$ になってはならない。特に物体が画像面に直交する軸の周りに回転してはならない。なぜなら物体座標系の第 3 基底をその軸の方向に選べば常に $\boldsymbol{k}_\kappa = (0,0,1)^\top$ となり、 $\tilde{\boldsymbol{k}}_\kappa = \boldsymbol{0}$、したがって $\boldsymbol{m}_3 = \boldsymbol{0}$ となるからである。また、物体座標系の原点がカメラの光軸上に留まってはならない。なぜなら、常に $\tilde{\boldsymbol{t}}_\kappa = \boldsymbol{0}$ となるので $\boldsymbol{m}_0 = \boldsymbol{0}$ となるからである。

第 2 点より、二つの物体が回転軸を共有してはならない。なぜなら、それぞれの物体座標系の第 3 基底をその軸の方向に選べば常に $\tilde{\boldsymbol{k}}_\kappa = \tilde{\boldsymbol{k}}'_\kappa$ となり、したがって $\boldsymbol{m}_3 = \boldsymbol{m}'_3$ となるからである。これから回転ジョイントで結ばれた物体には適用できないことがわかる [10]。さらに、二つの物体の運動がまったく同一であったり、回転が同一であったり、並進が同一であったりしてはならないこともわかる。

7. 計量行列の誤差

ベクトル $\boldsymbol{p}_\alpha$ は真の値 $\bar{\boldsymbol{p}}_\alpha$ に誤差が加わったものとし、

$$\boldsymbol{p}_\alpha = \bar{\boldsymbol{p}}_\alpha + \Delta\boldsymbol{p}_\alpha \tag{28}$$

と書き、 $\boldsymbol{p}_\alpha$ と $\boldsymbol{p}_\beta$ の共分散行列を次のように定義する。

$$V[\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta] = E[\Delta\boldsymbol{p}_\alpha \Delta\boldsymbol{p}_\beta^\top] \tag{29}$$

誤差は各点で期待値 $\boldsymbol{0}$、各方向に標準偏差 σ の独立な正規分布に従うものとする。したがって

$$V[\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta] = \sigma^2 \delta_{\alpha\beta} \boldsymbol{I} \tag{30}$$

[8] $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ が低次元 (例えば 3 次元) 部分空間に含まれていても、そのことが既知ならそれを前提とする定理が成立するので問題はない。

となる[9]。計量行列 $\boldsymbol{G} = (G_{\alpha\beta})$ の共分散テンソルを次のように定義する[10]。

$$\mathcal{V}[\boldsymbol{G}] = E[\Delta\boldsymbol{G} \otimes \Delta\boldsymbol{G}] \tag{31}$$

計量行列 $\boldsymbol{G}$ の定義より、その誤差 $\Delta G_{\alpha\beta}$ は第一近似において次のように表せる。

$$\Delta G_{\alpha\beta} = (\Delta\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta) + (\boldsymbol{p}_\alpha, \Delta\boldsymbol{p}_\beta) \tag{32}$$

したがって次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\Delta G_{\alpha\beta}\Delta G_{\gamma\delta} \\
&= \big((\Delta\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta) + (\boldsymbol{p}_\alpha, \Delta\boldsymbol{p}_\beta)\big)\big((\Delta\boldsymbol{p}_\gamma, \boldsymbol{p}_\delta) + (\boldsymbol{p}_\gamma, \Delta\boldsymbol{p}_\delta)\big) \\
&= (\Delta\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta)(\Delta\boldsymbol{p}_\gamma, \boldsymbol{p}_\delta) + (\Delta\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta)(\boldsymbol{p}_\gamma, \Delta\boldsymbol{p}_\delta) \\
&\quad + (\boldsymbol{p}_\alpha, \Delta\boldsymbol{p}_\beta)(\Delta\boldsymbol{p}_\gamma, \boldsymbol{p}_\delta) + (\boldsymbol{p}_\alpha, \Delta\boldsymbol{p}_\beta)(\boldsymbol{p}_\gamma, \Delta\boldsymbol{p}_\delta) \\
&= \boldsymbol{p}_\beta^\top \Delta\boldsymbol{p}_\alpha \Delta\boldsymbol{p}_\gamma^\top \boldsymbol{p}_\delta + \boldsymbol{p}_\beta^\top \Delta\boldsymbol{p}_\alpha \Delta\boldsymbol{p}_\delta^\top \boldsymbol{p}_\gamma \\
&\quad + \boldsymbol{p}_\alpha^\top \Delta\boldsymbol{p}_\beta \Delta\boldsymbol{p}_\gamma^\top \boldsymbol{p}_\delta + \boldsymbol{p}_\alpha^\top \Delta\boldsymbol{p}_\beta \Delta\boldsymbol{p}_\delta^\top \boldsymbol{p}_\gamma
\end{aligned} \tag{33}$$

これから共分散テンソル $\mathcal{V}[\boldsymbol{G}]$ が次の形で表せる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}[\boldsymbol{G}]_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \boldsymbol{p}_\beta^\top E[\Delta\boldsymbol{p}_\alpha \Delta\boldsymbol{p}_\gamma^\top]\boldsymbol{p}_\delta + \boldsymbol{p}_\beta^\top E[\Delta\boldsymbol{p}_\alpha \Delta\boldsymbol{p}_\delta^\top]\boldsymbol{p}_\gamma \\
&\quad + \boldsymbol{p}_\alpha^\top E[\Delta\boldsymbol{p}_\beta \Delta\boldsymbol{p}_\gamma^\top]\boldsymbol{p}_\delta + \boldsymbol{p}_\alpha^\top E[\Delta\boldsymbol{p}_\beta \Delta\boldsymbol{p}_\delta^\top]\boldsymbol{p}_\gamma \\
&= \sigma^2 \big(\delta_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{p}_\beta, \boldsymbol{p}_\delta) + \delta_{\alpha\delta}(\boldsymbol{p}_\beta, \boldsymbol{p}_\gamma) + \delta_{\beta\gamma}(\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\delta) \\
&\quad + \delta_{\beta\delta}(\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\gamma)\big) \\
&= \sigma^2 \left(\delta_{\alpha\gamma} G_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} G_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma} G_{\alpha\delta} + \delta_{\beta\delta} G_{\alpha\gamma}\right)
\end{aligned} \tag{34}$$

8. 固有ベクトルの誤差

行列 $\boldsymbol{G}$ の非負の固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ とし、対応する固有ベクトルの正規直交系を $\{\boldsymbol{v}_1,\ ...,\ \boldsymbol{v}_n\}$ とする。これに固有値 0 の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{n+1},\ ...,\ \boldsymbol{v}_N$ を加えて $\{\boldsymbol{v}_1,\ ...,\ \boldsymbol{v}_n,\ \boldsymbol{v}_{n+1},\ ...,\ \boldsymbol{v}_N\}$ が正規直交系をなすようにする。そして

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n & \boldsymbol{v}_{n+1} & \cdots & \boldsymbol{v}_N \end{pmatrix} \tag{35}$$

と置く。固有ベクトル $\boldsymbol{v}_\alpha$ と固有ベクトル $\boldsymbol{v}_\beta$ の共分散行列は次のように定義される。

$$V[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j] = E[\Delta\boldsymbol{v}_i \Delta\boldsymbol{v}_j^\top] \tag{36}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ の第 α 要素を $v_{\alpha i}$ と書く[11]。これは行列 $\boldsymbol{V}$ の (αi) 要素でもある。摂動定理により誤差 $\Delta\boldsymbol{v}_\alpha$ は第一近似において次のように表せる [5]。

$$\Delta\boldsymbol{v}_i = \sum_{j(\neq i)=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{v}_j, \Delta\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_i)}{\lambda_i - \lambda_j} \boldsymbol{v}_j \tag{37}$$

したがって

$$\Delta\boldsymbol{v}_i \Delta\boldsymbol{v}_j^\top = \sum_{j(\neq i)=1}^{N} \sum_{k(\neq j)=1}^{N} \frac{(\boldsymbol{v}_j, \Delta\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{v}_k, \Delta\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_j)}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_k)} \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_k^\top \tag{38}$$

[9] 記号 $\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカデルタであり、 $\alpha = \beta$ のとき 1、それ以外で 0 をとる。

[10] 記号 $\otimes$ はテンソル積を表す。右辺の $(\alpha\beta\gamma\delta)$ 要素は $E[\Delta G_{\alpha\beta}\Delta G_{\gamma\delta}]$ である。

[11] したがって、式 (36) の右辺の $(\alpha\beta)$ 要素は $E[\Delta v_{\alpha i}\Delta v_{\beta j}]$ である。

となり、次の共分散行列が得られる。

$$V[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j] = \sum_{k(\neq i),l(\neq j)=1}^{N} \frac{D_{kilj}\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_l^\top}{(\lambda_i-\lambda_k)(\lambda_j-\lambda_l)} \tag{39}$$

ここにテンソル $\mathcal{D} = (D_{ijkl})$ を次のように定義した[12]。

$$\begin{aligned}
D_{ijkl} &= E[(\boldsymbol{v}_i, \Delta\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{v}_k, \Delta\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_l)] \\
&= E[\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} \Delta G_{\alpha\beta}\Delta G_{\gamma\delta} v_{\alpha i}v_{\beta j}v_{\gamma k}v_{\delta l}] \\
&= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} \mathcal{V}[\boldsymbol{G}]_{\alpha\beta\gamma\delta} v_{\alpha i}v_{\beta j}v_{\gamma k}v_{\delta l} \\
&= \sigma^2 \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{N} (\delta_{\alpha\gamma}G_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}G_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma}G_{\alpha\delta} \\
&\quad +\delta_{\beta\delta}G_{\alpha\gamma})\, v_{\alpha i}v_{\beta j}v_{\gamma k}v_{\delta l} \\
&= \sigma^2 \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{N} (G_{\beta\gamma}v_{\alpha i}v_{\beta j}v_{\alpha k}v_{\gamma l} + G_{\beta\gamma}v_{\alpha i}v_{\beta j}v_{\gamma k}v_{\alpha l} \\
&\quad +G_{\alpha\gamma}v_{\alpha i}v_{\beta j}v_{\beta k}v_{\gamma l} + G_{\alpha\gamma}v_{\alpha i}v_{\beta j}v_{\gamma k}v_{\beta l}) \\
&= \sigma^2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\delta_{ik}G_{\alpha\beta}v_{\alpha j}v_{\beta l} + \delta_{il}G_{\alpha\beta}v_{\alpha j}v_{\beta k} \\
&\quad +\delta_{jk}G_{\alpha\beta}v_{\alpha i}v_{\beta l} + \delta_{jl}G_{\alpha\beta}v_{\alpha i}v_{\beta k}) \\
&= \sigma^2\,(\delta_{ik}(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_l) + \delta_{il}(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_k) + \delta_{jk}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_l) \\
&\quad +\delta_{jl}(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{G}\boldsymbol{v}_k))
\end{aligned} \tag{40}$$

9. 作用行列の誤差

作用行列 $\boldsymbol{Q} = (Q_{\alpha\beta})$ の共分散テンソルを次のように定義する[13]。

$$\mathcal{V}[\boldsymbol{Q}] = E[\Delta\boldsymbol{Q} \otimes \Delta\boldsymbol{Q}] \tag{41}$$

行列 $\boldsymbol{Q}$ の $(\alpha\beta)$ 要素は $\sum_{i=1}^{r} v_{\alpha i}v_{\beta i}$ と書けるから、第一近似において誤差項 $\Delta Q_{\alpha\beta}$ は次のように書ける。

$$\Delta Q_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{r} (\Delta v_{\alpha i}v_{\beta i} + v_{\alpha i}\Delta v_{\beta i}) \tag{42}$$

したがって次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\Delta Q_{\alpha\beta}\Delta Q_{\gamma\delta} \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} (\Delta v_{\alpha i}v_{\beta i} + v_{\alpha i}\Delta v_{\beta i})(\Delta v_{\gamma j}v_{\delta j} + v_{\gamma j}\Delta v_{\delta j}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} (\Delta v_{\alpha i}\Delta v_{\gamma j}v_{\beta i}v_{\delta j} + \Delta v_{\alpha i}\Delta v_{\delta j}v_{\beta i}v_{\gamma j} \\
&\quad +\Delta v_{\beta i}\Delta v_{\gamma j}v_{\alpha i}v_{\delta j} + \Delta v_{\beta i}\Delta v_{\delta j}v_{\alpha i}v_{\gamma j})
\end{aligned} \tag{43}$$

これから共分散テンソル $\mathcal{V}[\boldsymbol{Q}]$ の $(\alpha\beta\gamma\delta)$ 要素が次のように書ける。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V}[\boldsymbol{Q}]_{\alpha\beta\gamma\delta} \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} (E[\Delta v_{\alpha i}\Delta v_{\gamma j}]v_{\beta i}v_{\delta j} + E[\Delta v_{\alpha i}\Delta v_{\delta j}]v_{\beta i}v_{\gamma j} \\
&\quad +E[\Delta v_{\beta i}\Delta v_{\gamma j}]v_{\alpha i}v_{\delta j} + E[\Delta v_{\beta i}\Delta v_{\delta j}]v_{\alpha i}v_{\gamma j}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{r} (V[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j]_{\alpha\gamma}v_{\beta i}v_{\delta j} + V[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j]_{\alpha\delta}v_{\beta i}v_{\gamma j} \\
&\quad +V[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j]_{\beta\gamma}v_{\alpha i}v_{\delta j} + V[\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j]_{\beta\delta}v_{\alpha i}v_{\gamma j})
\end{aligned} \tag{44}$$

10. 統計解析

添え字の集合 $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., N\}$ が次のように分割されているとする。

$$\mathcal{I}_1 = \{i_1, i_2, ..., i_{N_1}\}, \quad \mathcal{I}_2 = \{j_1, j_2, ..., j_{N_2}\} \tag{45}$$

$$\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \emptyset \tag{46}$$

これに伴って N 個の点 $p_1, ..., p_N \in \mathcal{R}^n$ が $\{p_\alpha\},\ \alpha \in \mathcal{I}_1$ と $\{p_\alpha\},\ \alpha \in \mathcal{I}_2$ に分離されているとすると、誤差がなければ N_1N_2 個の要素 $Q_{\alpha\beta},\ \alpha \in \mathcal{I}_1,\ \beta \in \mathcal{I}_2$ はすべて 0 である。誤差があると $Q_{\alpha\beta}$ には期待値 0、標準偏差 $\sqrt{\mathcal{V}[\boldsymbol{Q}]_{\alpha\beta\alpha\beta}}$ の誤差が入る。誤差の分布を正規分布で近似すれば、95% の信頼水準で

$$\left| \frac{Q_{\alpha\beta}}{\sqrt{\mathcal{V}[\boldsymbol{Q}]_{\alpha\beta\alpha\beta}}} \right| < \gamma_{2.5} \tag{47}$$

の範囲にある。ただし γ_a は標準正規分布の上 $a\%$ 点[14]である。したがって、2 点が異なる物体に属していてもこの程度の誤差は避けられない。ただし、これを識別のしきい値にとるのは厳し過ぎる。なぜなら、行列 $\boldsymbol{Q}$ の各要素は相関があるからである。

相関を評価するには共分散テンソルの逆テンソルを計算する必要がある。N_1N_2 個の要素 $Q_{\alpha\beta},\ \alpha \in \mathcal{I}_1,\ \beta \in \mathcal{I}_2$ を縦に一列に並べたベクトルを $\tilde{\boldsymbol{q}}$ とする[15]その $N_1N_2 \times N_1N_2$ 共分散行列を $V[\tilde{\boldsymbol{q}}]$ とする[16]。もし複数物体の分離が正しければ 2 次形式

$$S = (\tilde{\boldsymbol{q}}, V[\tilde{\boldsymbol{q}}]^{-1}\tilde{\boldsymbol{q}}) \tag{48}$$

は自由度 N_1N_2 の χ^2 分布に従うから、信頼水準 95% で

$$S < \chi^2_{N_1N_2,5} \tag{49}$$

の範囲にある。ただし $\chi^2_{r,a}$ は自由度 r の χ^2 分布の上 $a\%$ 点である[17]。したがってこれが満たされていないと、その分離には信頼性がおけないと判定できる。実際問題では、しきい値が小さいときは単一物体と判定されるから、例えばしきい値を次第に上げていき、二つの物体に分離していると判定されたらそのときの分離に対して式 (49) が成立しているかど

[12] 式中の変形において関係 $\sum_{\alpha=1}^{N} v_{\alpha i}v_{\beta j} = (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$ を用いた。

[13] 右辺の $(\alpha\beta\gamma\delta)$ 要素は $E[\Delta Q_{\alpha\beta}\Delta Q_{\gamma\delta}]$ である。

[14] 期待値 0、標準偏差 1 の正規分布に従う変数が区間 (a, ∞) に発生する確率。

[15] その l 番目の要素は $Q_{ab},\ a = i_{(I-1)\mathrm{div}N_2+1},\ b = j_{(I-1)\mathrm{mod}N_2+1}$ となる。ただし div, mod はそれぞれ整数商、整数剰余を表す。

[16] その (IJ) 要素は $\mathcal{V}[\boldsymbol{Q}]_{abcd},\ a = i_{(I-1)\mathrm{div}N_2+1},\ b = j_{(I-1)\mathrm{mod}N_2+1},\ c = i_{(J-1)\mathrm{div}N_2+1},\ d = j_{(J-1)\mathrm{mod}N_2+1}$ である。

[17] r が大きいとき (例えば $r > 30$)、標準正規分布の上側 $a\%$ 点 γ_a を用いて $\chi^2_{r,a} \approx (\gamma_a + \sqrt{2r-1})^2/2$ と近似できる。

うかを判定すればよい。もし成立していなければその分離は排除される[18]。

11. 幾何学的 AIC によるモデル選択

前節の解析には誤差の標準偏差 σ が必要である。しかし実際問題ではこれをあらかじめ見積もることが難しい場合も多い。その場合には "残差" に基いた幾何学的 AIC の適用が考えられる。N 点 $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ が同一物体に属せばそれらは誤差のないときある 4 次元部分空間 $\mathcal{L}$ に含まれるから、まず 4 次元空間を "当てはめる" ことを考える。その正規直交基底を $\{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_4\}$ とすると、統計的に最適な推定 (最尤推定) は

$$J = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\|\boldsymbol{p}_\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{4} (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p}_\alpha)^2 \right) \tag{50}$$

を最小にするものである[19]。その最小値 $\hat{J}$ を残差と呼ぶ。式 (50) を最小にする基底 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ は相互モーメント行列 [8]

$$\boldsymbol{C} = \sum_{\alpha=1}^{N} \boldsymbol{p}_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha^\top \tag{51}$$

の大きさの順に並べた最初の 4 個の固有値 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_4$ に対応する単位固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, ..., $\boldsymbol{u}_4$ であることが証明できる[20](付録 1)。そして残差は次のように表せる。

$$\hat{J} = \sum_{\alpha=1}^{N} \|\boldsymbol{p}_\alpha\|^2 - \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \tag{52}$$

M 次元空間の 4 次元部分空間 $\mathcal{L}$ は $8(M-2)$ 個のパラメータで指定できるから[21]、幾何学的 **AIC** [5, 6, 7] は次のようになる。

$$AIC(\mathcal{L}) = \hat{J} + 2(4N + 8(M-2))\sigma^2 = \hat{J} + 8(N + 2M - 4)\sigma^2 \tag{53}$$

いま N 点 $\{\boldsymbol{p}_\alpha\}$ を何らかのしきい値を用いて $\{p_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{I}_1$, $\{p_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{I}_2$ に分離したとする。それぞれに 4 次元部分空間 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ を最適に当てはめたときのそれぞれの残差を $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ とする。このようなモデルの幾何学的 AIC はそれぞれの幾何学的 AIC の和として次のように表せる。

$$AIC(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \hat{J}_1 + \hat{J}_2 + 8(N + 4M - 8)\sigma^2 \tag{54}$$

残差 $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ は各点 $\boldsymbol{p}_\alpha$ のそれぞれの部分空間 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ からの "垂直方向" へのずれによって生じるが、その "垂直方向" の次元は $2M - 4$ である。したがって画像の誤差の分散 σ^2 が次のように推定できる。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{J}_1 + \hat{J}_2}{(2M-4)N - 16(M-2)} = \frac{\hat{J}_1 + \hat{J}_2}{2(M-2)(N-8)} \tag{55}$$

これは物体が二つに分離されようとされまいと σ^2 の不偏推定量であるから、これを式 (53), (54) に代入して比較すると次の判定条件が得られる。

$$\frac{\hat{J}_1 + \hat{J}_2}{\hat{J}} < 1 - \frac{8}{N} \tag{56}$$

すなわち、この条件が満たされると二つの独立な物体が存在するというモデルが選択される。

12. まとめ

本論文ではまず Costeira と Kanade の原論文 [1] に与えられている証明が不完全であり、そのままの形では理論的に正当化されないことを指摘し、問題を抽象的に拡張した上で、一つの数学的定理として完全な証明を与えた。その結果、問題が特異値分解や行列の因子分解法とはまったく無関係であることがわかり、画像列からの複数物体の分離だけでなく種々の問題に転用できることが明らかになった。また定理が適用できない退化の幾何学的意味がより明確になった。最後に、画像に誤差がある場合の統計的解析を行い、Costeira-Kanade 法の判定条件に用いるしきい値の妥当性が統計的に評価できることを示した。さらに、誤差の大きさが未知でも幾何学的 AIC によって物体の分離が判定できることを示した。

謝辞。本研究に関して有益なコメントを頂いた米国カーネギーメロン大学の Daniel Morris 氏、電総研の植芝俊夫氏、フランス INRIA の Bill Triggs 氏に感謝します。また本研究をさまざまな形で支援して下さった米国カーネギーメロン大学の金出武雄教授にも感謝します。本研究の一部は文部省科学研究費基盤研究 C (2) (No. 09680352) によった。

参考文献

[1] J. Costeira and T. Kanade, A multiple factorization method for motion analysis, *Proc. 5th Int. Conf. Computer Vision*, June, 1995, Cambridge, MA, pp. 1071–1076.

[2] 出口光一郎, 透視投影条件の下での因子分解法による多視点画像からの形状復元, 情報処理学会研究報告, 97-CVIM-106-6 (1997-07), 35–42.

[3] 金出武雄, コンラッド・ポールマン, 森田俊彦, 因子分解法による物体形状とカメラ運動の復元, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J76-D-II**-8 (1993), 1497–1505.

[4] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[5] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, 1996.

[6] 金谷健一, 情報量基準による幾何学的モデル選択, 情報処理学会論文誌, **37**-6 (1996), 1073–1080.

[7] K. Kanatani, Geometric information criterion for model selection, *Int. J. Comput. Vision*, **26**-3 (1998), 171–189.

[8] 金谷健一, 因子分解を用いない因子分解法: 平行投影から透視変換へ, 電子情報通信学会パタン認識とメディア理解研究会, PRMU98-26 (1998), 1–8.

[18] このような判定は、分離しているもの発見するというより、分離していないものを分離していると判定することを防ぐ働きのほうが大きい。

[19] これは各点 $\boldsymbol{p}_\alpha$ から $\{\boldsymbol{u}_i\}$ の張る部分空間 $\mathcal{L}$ へ下した "垂線" の足までの長さの二乗和である。

[20] これは Tomasi-Kanade の因子分解法を適用したものと同じ解となる (付録 2)。これに "計量条件" と呼ばれる条件を課して物体の 3 次元復元ができる (付録 3)。

[21] 部分空間 $\mathcal{L}$ を張る 4 本の $2M$ 次元ベクトル $\{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_4\}$ は $8M$ 個の成分をもつ。基底が正規直交系である条件 $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, ..., 4$ は 10 個の式であるから、一つの正規直交基底を指定するパラメータは $8M - 10$ である。しかし、$\{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_4\}$ の 2 個を取り出して (取り出し方に 6 通り)、それらをその 2 本が張る 2 次元空間内で剛体回転しても部分空間 $\mathcal{L}$ は変らない。ゆえに部分空間 $\mathcal{L}$ の自由度は $8M - 10 - 6 = 8(M-2)$ である。

[9] D. Morris and T. Kanade, A unified factorization algorithm for points, line segments and planes with uncertainty models, *Proc. 6th Int. Conf. Comput. Vision*, January 1998, Bombay, India, pp. 696–702.

[10] 長崎健, 川嶋稔夫, 青木由直, 因子分解法に基づく運動画像列解析による多関節物体の構造推定, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J81-D-II**-3 (1998), 483–492.

[11] C. J. Poelman and T. Kanade, A paraperspective factorization method for shape and motion recovery, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **19**-3 (1997), 206–218.

[12] P. Sturm and B. Triggs, A factorization based algorithm for multi-image projective structure and motion, *Proc. 4th Euro. Conf. Comput. Vision*, April 1996, Cambridge, U.K., Vol. 2, pp. 709–720.

[13] C. Tomasi and T. Kanade, Shape and motion from image streams under orthography: A factorization method, *Int. J. Comput. Vision*, **9**-2 (1992), 137–154.

[14] 植芝俊夫, 富田文明, 初期モデルとしてアフィン投影を用いた多視点透視投影画像からの運動と形状の復元, 情報処理学会研究報告, 97-CVIM-107-1 (1997-09), 1–8.

[15] 浮田宗伯, 尺長健, 透視投影因子分解法による広範囲画像系列からの 3 次元物体モデル生成, 電子情報通信学会技術研究報告, PRMU97-276 (1998-03), 81–88.

付録 1: 部分空間の当てはめ

相互モーメント行列 $\boldsymbol{C}$ の固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{2M}$、対応する固有ベクトルの正規直交系を $\{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_{2M}\}$ とする。$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}\lambda_i$ から次の関係がわかる。

$$\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p}_\alpha)^2 = (\boldsymbol{u}_i, \left(\sum_{\alpha=1}^{N}\boldsymbol{p}_\alpha\boldsymbol{p}_\alpha^\top\right)\boldsymbol{u}_i) = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i \tag{57}$$

これから式 (52) が得られる。これが最小値であることを示すために、正規直交系 $\{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_{2M}\}$ を剛体回転すると $\hat{J}$ がどう変化するかを考える。式 (50) より、$\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_4$ が同じ部分空間内に留まり、$\boldsymbol{u}_5, ..., \boldsymbol{u}_{2M}$ がそれと直交する部分空間内に留まる限り $\hat{J}$ は不変である。そこで $\boldsymbol{u}_i,\ i \leq 4$ と $\boldsymbol{u}_j,\ j \geq$ をとり、それらの張る 2 次元空間内の $\{\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{u}_j\}$ の剛体回転を考える。これを角度 θ だけ回転すると $\boldsymbol{u}_i$ は $\boldsymbol{u}_i' = \boldsymbol{u}_i\cos\theta + \boldsymbol{u}_j\sin\theta$ に移る。このとき式 (50) より変化を受ける項は $\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{p}_\alpha)^2$ のみであり、これが次の値に変化する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{N}(\boldsymbol{u}_i', \boldsymbol{p}_\alpha)^2 = (\boldsymbol{u}_i', \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_i') \\
&= (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_j)\cos^2\theta + 2(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_j)\cos\theta\sin\theta \\
&\quad + (\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}_j)\sin^2\theta \\
&= \lambda_i\cos^2\theta + \lambda_j\sin^2\theta = \lambda_i - (\lambda_i - \lambda_j)\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{58}$$

$\lambda_i \geq \lambda_j$ であるから、これは $\theta = 0$ で最大となり、したがって $\hat{J}$ が最小になる。基底 $\{\boldsymbol{u}_i\}$ の任意の回転はこのような 2 本の基底ベクトルの回転の合成によって生成されるから、どのような回転によっても $\hat{J}$ が現象しないことが証明された。 □

付録 2: 因子分解法

ベクトル $\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_N$ を列として並べた $2M \times N$ 観測行列を

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_N\end{pmatrix} \tag{59}$$

と定義すると、相互モーメント行列 $\boldsymbol{C}$ の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ ...,\ \boldsymbol{u}_{2M}$ を列として並べた $2M \times 2M$ 行列 $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_{2M}\end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{W}$ の特異値分解

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{V}^\top \tag{60}$$

としても得られる。このとき $\boldsymbol{V}$ は式 (23) で定義される $N \times N$ 直交行列に一致する。また $\boldsymbol{\Lambda}$ は対角行列であり、その対角要素 (特異値) は相互モーメント行列 $\boldsymbol{C}$ の固有値を $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{2M}$ とするとき $\sqrt{\lambda}_1,\ ...,\ \sqrt{\lambda}_{\min(2M,N)}$ となっている。この特異値分解を用いる解法が Tomasi-Kanade の因子分解法 [13] に他ならない。このように Tomasi-Kanade の因子分解法は一つの “計算手段” を与えるが、これを問題の数学的構造とは切り離して考える必要がある [8]。

付録 3: 3 次元復元

基底 $\{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_4\}$ が得られると、物体の 3 次元運動が次のように計算できる [8]。

1. $\boldsymbol{u}_1,\ ...,\ \boldsymbol{u}_4$ を列として並べた $2M \times 4$ 行列を $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_4\end{pmatrix}$ とする。
2. 行列 $\boldsymbol{U}^\top$ の第 i 列を $\boldsymbol{u}_i^\dagger$(4 次元ベクトル) とする ($i = 1$, ..., $2M$)。
3. 次の $3M$ 個の連立 1 次方程式 (計量条件) を満たす 4×4 対称行列 $\boldsymbol{T}$ を最小二乗法によって計算する。
$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{u}^\dagger_{2(\kappa-1)+i}, \boldsymbol{T}\boldsymbol{u}^\dagger_{2(\kappa-1)+j}) = \delta_{ij} \\ &i,j = 1,2, \qquad \kappa = 1, ..., M\end{aligned} \tag{61}$$
4. 行列 $\boldsymbol{T}$ の固有値を大きい順に並べた最初の 3 個を s_1, $s_2,\ s_3$ とし、対応する単位ベクトルの正規直交系を $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ とする。
5. ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を列として並べた 4×3 行列を $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{pmatrix}$ とする。
6. 並進ベクトル $\boldsymbol{t}_\kappa$ と物体座標の基底ベクトル $\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{k}_\kappa$ の投影 $\tilde{\boldsymbol{t}}_\kappa,\ \tilde{\boldsymbol{i}}_\kappa,\ \tilde{\boldsymbol{j}}_\kappa,\ \tilde{\boldsymbol{k}}_\kappa$ を縦に並べた $\boldsymbol{m}_0,\ \boldsymbol{m}_1,\ \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3$ が次のように得られる (複号同順[22]、a_{ij} は行列 $\boldsymbol{A}$ の (ij) 要素)。
$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_1 &= \pm\sqrt{s_1}\sum_{i=1}^{4}a_{i1}\boldsymbol{u}_i, \qquad \boldsymbol{m}_2 = \pm\sqrt{s_2}\sum_{i=1}^{4}a_{i2}\boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{m}_3 &= \pm\sqrt{s_3}\sum_{i=1}^{4}a_{i3}\boldsymbol{u}_i.\end{aligned} \tag{62}$$
7. 最小二乗法により 2 次元ベクトル $\tilde{\boldsymbol{i}}_\kappa, \tilde{\boldsymbol{j}}_\kappa, \tilde{\boldsymbol{k}}_\kappa$ から 3 次元ベクトルの正規直交系 $\{\boldsymbol{i}_\kappa, \boldsymbol{j}_\kappa, \boldsymbol{k}_\kappa\}$ を作る [8]。
8. 最小二乗法により式 (9) を満たすように特徴点の 3 次元座標 $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)$ を定める [8]。

[22] したがって最終的に二つの互いに鏡像の解が得られる。