

# 超精度の楕円当てはめ

山田 純平      金谷 健一

岡山大学大学院自然科学研究科

平面上の点列に楕円を当てはめる問題は、従来から最尤推定が最も高精度であるとみなされ、くりこみ法, HEIV 法, FNS 法などの計算法が提案されている。本論文ではこれを上回る「超精度」の当てはめ法が存在することを理論的および実験的に検証する。これは最尤推定の摂動解析によって高次の偏差項を評価し、これを最尤推定解から差し引くものである。ただし、最尤推定解は既に精度に理論限界である KCR 下界をほぼ達成しているため、補正による効果は非常にわずかである。このため、提案方法によって実際の応用で実質的な差が生じることはないが、当てはめの精度の理論限界と最尤推定に関して、理論的な観点から意味のある結果である。

## Ellipse Fitting with Hyperaccuracy

Junpei Yamada,      Kenichi Kanatani

Department of Computer Science, Okayama University, Okayama 700-8530 Japan

For fitting an ellipse to a point sequence in 2-D, maximum likelihood (ML) estimation has been regarded as having the highest accuracy, and numerical schemes such as renormalization, HEIV, and FNS have been proposed for computing the solution. In this paper, we demonstrate, theoretically and experimentally, the existence of a “hyperaccurate” method having higher accuracy than ML. The hyperaccuracy is achieved by perturbation analysis of the ML solution followed by evaluation of the high-order bias terms and subtraction of them from the ML solution. However, since the ML solution almost attains the theoretical accuracy bound (the KCR lower bound), the resulting improvement is too small to produce noticeable difference in practical applications. Yet, our analysis has theoretical significance, illuminating the relationship between accuracy of the ML solution and the theoretical accuracy bound.

### 1. まえがき

シーン中の円形や球形の物体をカメラで撮影すると一般に楕円に投影され、その投影像からその物体の3次元位置が解析できる [19]。このため、画像から抽出した点列に円や楕円を当てはめることは、視覚ロボットを含む広範な応用の基本的な処理の一つである。実際、楕円を当てはめに関してこれまで多くの論文が書かれている。それらは次の二つに大別できる。

1. 画像から抽出したエッジ点列の中から、円や楕円をなすものをどう判別するか。一つの点列に円または楕円以外の点（アウトライア）が含まれているかをどう判定するか。
2. 円または楕円上にあることが既知の点列（インライア）に対して、データに誤差があるとき、なるべく正確に円または楕円の方程式を当てはめるにはどうすればよいか。

第1については、古くからさまざまなアルゴリズムとその効率的な処理方法が研究され [2, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 33, 35, 36, 38, 39, 40, 43, 44, 45, 46, 47, 50,

51, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64]、最近では [37] がある。第2については、以前は発見的な方法（投票法、最小二乗法など）が主であったが [4, 5, 18, 29, 41, 42, 48, 49, 52, 53, 54, 55]、これを誤差のあるデータからの統計的推定とみなして最適な推定量を求めようという理論研究が増えた。しかし、多くはデータ数が増大するときの推定量の一致性や有効性の解析を中心である [1, 3, 6, 30, 31, 60]。

それに対して、筆者らは画像処理を念頭において、データ数を固定した少数のデータに対して、画像の誤差を小さくすると急速に精度が向上する手法を追求した [23]。それは、そのような手法は望ましい精度を実現するのにより大きなデータの誤差を許容できるからである [24]。

筆者らはさらに、楕円当てはめを幾何学的当てはめという一般論に抽象して、どのような手法を用いても超えることのできない精度の理論限界を共分散行列の下界という形として示した [22, 23]。Chernovら [8] はこれを KCR（金谷・クラメル・ラオ）下界と呼び、より弱い仮定から同様の結果が得られることを指摘した。

†700-8530 岡山市津島中 3-1-1 Tel/Fax: (086)251-8173  
{yamada,kanatani}@suri.it.okayama-u.ac.jp

この枠組によると，“最尤推定”と呼ぶ方法が誤差の高次の項を除いてこの下界を達成することが示される [8, 23, 26]．これまでに，くりこみ法 [20, 23, 25]，HEIV 法 [32]，および FNS 法 [9] と呼ぶ反復手法が提案されているが，いずれも理論的にはその精度が“最尤推定”と同等であることが示される [27]．この意味で楕円当てはめは実用的な観点からは既に解決済みの問題であるといえる．

それに対して本論文では理論的な観点から，最尤推定を上回る解法は本当に存在しないのかという問題を探求する．便宜上，最尤推定と同等の精度を「高精度」と呼び（くりこみ法，HEIV 法，FNS 法など），それに及ばないものを「低精度」と呼ぶ（最小二乗法，Taubin 法 [54] など）．両者の差は歴然としており，高精度手法を用いることによって精度が著しく向上することが実験的に確認されている [21, 28, 34]．これら対比して，最尤推定を上回る精度を「超精度」と呼ぶことにする．

本論文では超精度を達成する手法が実際に存在することを理論的に示し，実験によって確認する．ただし，最尤推定は誤差の高次の項を除いて精度の理論限界を達成しているので，精度の向上の程度は非常に小さいものである．本論文では実験によってこれがどの程度のものかを確認する．

## 2. 楕円当てはめ

平面上の  $N$  点  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  に楕円を当てはめる問題を考える．楕円は次のように表せる．

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2f_0(Dx + Ey) + Ff_0^2 = 0 \quad (1)$$

ただし， $f_0$  は任意のスケール定数である．新しい係数ベクトル  $u$  と変数ベクトル  $\xi$  を

$$u = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \end{pmatrix}^\top$$

$$\xi = \begin{pmatrix} x^2 & 2xy & y^2 & 2f_0x & 2f_0y & f_0^2 \end{pmatrix}^\top \quad (2)$$

と置けば，式 (1) は次のように書ける．

$$(u, \xi) = 0 \quad (3)$$

ただし，以下ベクトル  $a, b$  の内積を  $(a, b)$  と書く．ベクトル  $u$  の絶対的な大きさは不定であるから，以後  $\|u\| = 1$  と正規化する．

幾何学的には式 (3) は  $\xi$  の 6 次元空間  $\mathcal{R}^6$  の超平面を表している．誤差を含むデータ点  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$ ,  $\alpha$

$= 1, \dots, N$  は式 (2) のよって  $\mathcal{R}^6$  の  $N$  点  $\{\xi_\alpha\}$  に埋め込み写像されるので，楕円当てはめは  $\mathcal{R}^6$  での超平面を当てはめる問題とみなせる．

ただし，式 (1) で表されるのは楕円とは限らず，放物線，双曲線，およびそれらの退化も含んでいる．これらは総称してコニック（円錐曲線）と呼ばれるので，上述の定式化は「コニック当てはめ」とも呼ばれる [19]．実際，誤差が大きいと楕円上の点列に双曲線が当てはまったりする．それを防ぐ方法もあるが [11]，本論文ではそのような場合も解に含めて解析する．

## 3. 最尤推定

上記の問題を解くために最も広く用いられているのは次式を最小にする「最小二乗法」である．

$$J_{LS} = \sum_{\alpha=1}^N (u, \xi_\alpha)^2 \quad (4)$$

これは

$$M_{LS} = \sum_{\alpha=1}^N \xi_\alpha \xi_\alpha^\top \quad (5)$$

と定義すれば単位ベクトル  $u$  の 2 次形式  $J_{LS} = (u, M_{LS}u)$  に書き直せるので，解（「最小二乗解」） $\hat{u}_{LS}$  は  $M_{LS}$  の最小固有値に対する単位固有ベクトルである．しかし，最小二乗解には大きな偏差が存在して精度が低いことが知られている [23]．

それに対して「最尤推定」は，各点  $\xi_\alpha$  からその超平面までのマハラノビス距離の二乗和を最小にするように超平面を当てはめるものである [23]．すなわち，

$$J = \sum_{\alpha=1}^N (\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha, V_0[\xi_\alpha]^{-1}(\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha)) \quad (6)$$

を拘束条件  $(u, \bar{\xi}_\alpha) = 0$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  のもとで最小にする．ただし， $V_0[\xi_\alpha]$  はデータ点  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$  の誤差から導かれる  $\xi_\alpha$  の共分散行列を正規化したものである．正規化とは，共分散行列を定数倍しても式 (6) を最小にする解は変わらないことから，誤差の大きさに依存する定数を除いて  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$  の式のみで表したものである．変数  $\xi$  は 2 自由度しかないから  $V_0[\xi_\alpha]$  は一般にランクが 2 であり， $V_0[\xi_\alpha]^{-1}$  はその一般逆行列を表す．ラグランジュ乗数を導入して拘束条件を除去すれば，式 (6) は次式となる [23]．

$$J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(u, \xi_\alpha)^2}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} \quad (7)$$

各データ点  $(x_\alpha, y_\alpha)$  はその真の位置  $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$  に平均 0，標準偏差  $\sigma$  の正規分布に従う誤差が独立に加わっ

たものであるとすると,  $\xi_\alpha$  の共分散行列は  $4\sigma^2 V_0[\xi_\alpha]$  となり,  $V_0[\xi_\alpha]$  は  $\sigma$  の高次の項を除いて<sup>1</sup>, 次のように書ける.

$$V_0[\xi_\alpha] = \begin{pmatrix} \bar{x}_\alpha^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 & 0 \\ \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{x}_\alpha^2 + \bar{y}_\alpha^2 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & f_0 \bar{x}_\alpha & 0 \\ 0 & \bar{x}_\alpha \bar{y}_\alpha & \bar{y}_\alpha^2 & 0 & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 \\ f_0 \bar{x}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0 \bar{x}_\alpha & f_0 \bar{y}_\alpha & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

#### 4. 最尤推定の誤差解析

式 (7) の微分は次のようになる.

$$\nabla_{\mathbf{u}} J = \sum_{\alpha=1}^N \frac{2(\xi_\alpha, \mathbf{u}) \xi_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{2(\xi_\alpha, \mathbf{u})^2 V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \quad (9)$$

ただし,  $\nabla_{\mathbf{u}}$  は  $\mathbf{u}$  に関する勾配を表す. 最尤推定量  $\hat{\mathbf{u}}$  は上式を 0 にするものであるから, 次の式の解である.

$$M \mathbf{u} = L \mathbf{u} \quad (10)$$

$$M = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\xi_\alpha \xi_\alpha^\top}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})}, \quad L = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\xi_\alpha, \mathbf{u})^2 V_0[\xi_\alpha]}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \quad (11)$$

Chojnacki ら [9] の FNS 法も, Leedan ら [32] の HEIV 法も, 式 (10) を固有値問題, あるいは一般固有値問題の反復によって解く方法である. また, くりこみ法 [20, 23, 25] も理論的にも理論的に精度が同等であることが示される [27].

データに誤差がないときの真の解を  $\mathbf{u}$  とし, 式 (10) を満たす最尤推定量  $\hat{\mathbf{u}}$  を次のように展開する.

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \Delta_1 \mathbf{u} + \Delta_2 \mathbf{u} + \dots \quad (12)$$

ただし,  $\Delta_k \mathbf{u}$  は  $\Delta \xi_\alpha$  の成分の  $k$  乗を含む  $O(\sigma^k)$  の項を表す. 式 (11) の行列  $M$  の右辺に  $\xi_\alpha = \bar{\xi}_\alpha + \Delta \xi_\alpha$  を代入すると次のように書ける.

$$M = \bar{M} + \Delta_1 M + \Delta_2 M \quad (13)$$

$$\Delta_1 M = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Delta \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top + \bar{\xi}_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \quad (14)$$

$$\Delta_2 M = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \quad (15)$$

<sup>1</sup>後述の実験では省略した高次の項の影響がないことを確認している.

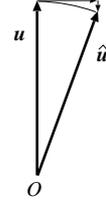


図 1: 推定量  $\hat{\mathbf{u}}$  の誤差の直交成分と平行成分.

ただし,  $\bar{M}$  は真の値  $\{\bar{\xi}_\alpha\}$  を用いて計算した  $M$  の値であり,  $\Delta_1 M, \Delta_2 M$  はそれぞれ  $\{\Delta \xi_\alpha\}$  の 1 次の項を含む部分, および 2 次の項を含む部分である.

式 (11) の行列  $L$  については次のようになる.

$$L = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{\xi}_\alpha + \Delta \xi_\alpha, \mathbf{u})^2 V_0[\xi_\alpha]}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\Delta \xi_\alpha, \mathbf{u})^2 V_0[\xi_\alpha]}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} = \Delta_2 L \quad (16)$$

すなわち,  $\bar{L} = O$ ,  $\Delta_1 L = O$  である. 以上より, 式 (10) に式 (12) を代入すると次のように書ける.

$$(\bar{M} + \Delta_1 M + \Delta_1^* M + \Delta_2 M + \Delta_2^* M)(\mathbf{u} + \Delta_1 \mathbf{u} + \Delta_2 \mathbf{u} + \dots) = \Delta_2 L(\mathbf{u} + \Delta_1 \mathbf{u} + \Delta_2 \mathbf{u} + \dots) \quad (17)$$

$\Delta_1^* M, \Delta_2^* M$  はそれぞれ  $\bar{M}, \Delta_1 M$  の分母の  $\mathbf{u}$  を  $\hat{\mathbf{u}}$  に置き換えるために生じる摂動項であり, 次のようになる ( $\Delta_2 M$  の摂動項は 3 次以上の高次となる).

$$\Delta_1^* M = -2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{((\Delta_1 \mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}) + O(\sigma^2)) \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \quad (18)$$

$$\Delta_2^* M = -2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{((\Delta_1 \mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}) + O(\sigma^2)) \times (\Delta \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top + \bar{\xi}_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top)}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \quad (19)$$

式 (17) の両辺の  $O(1), O(\sigma), O(\sigma^2)$  の項をそれぞれ取り出すと, 次の結果を得る (導出は付録に示す).

$$\Delta_1 \mathbf{u} = -\bar{M}^{-1} \Delta_1 M \mathbf{u} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 \mathbf{u} = & -\bar{M}^{-1} \Delta_2 M \mathbf{u} + \bar{M}^{-1} \Delta_1 M \bar{M}^{-1} \Delta_1 M \mathbf{u} \\ & -\bar{M}^{-1} \Delta_1^* M \Delta_1 \mathbf{u} - \bar{M}^{-1} \Delta_2^* M \mathbf{u} \\ & + \bar{M}^{-1} \Delta_2 L \mathbf{u} - \|\bar{M}^{-1} \Delta_1 M \mathbf{u}\|^2 \mathbf{u} \end{aligned} \quad (21)$$

式 (11) の  $M$  の定義から  $\bar{M} \mathbf{u} = 0$  が, したがって  $\bar{M}^{-1} \mathbf{u} = 0$  が成り立つ. このため, 式 (20), (21) の右辺の項は最後のもの以外はすべて  $\mathbf{u}$  に直交する. 最後の項  $-\|\bar{M}^{-1} \Delta_1 M \mathbf{u}\|^2 \mathbf{u}$  は  $\mathbf{u}$  に平行であり, 正規化  $\|\mathbf{u}\| = 1$  を強制するための項である (図 1).

## 5. 最尤推定量の最適性

2節に述べた問題に対して、どのような推定を行っても、データに誤差がある限り、得られる推定量  $\hat{u}$  の共分散行列  $V[\hat{u}]$  には、下回ることのできない下界が存在する。推定量  $\hat{u}$  の共分散行列  $V[\hat{u}]$  は次のように定義する。

$$V[\hat{u}] = E[(P_u \hat{u})(P_u \hat{u})^\top] \quad (22)$$

$P_u$  は次のように定義する射影行列である ( $I$  は単位ベクトル)。

$$P_u = I - uu^\top \quad (23)$$

これは  $u$  に直交する平面上へ射影を表す。これを用いるのは、パラメータ  $u$  が単位ベクトルに正規化されているためである。その結果、推定量  $\hat{u}$  も定義域が単位球面となるが、誤差が小さいとして真値  $u$  での接平面上に射影して、その接平面上で誤差を評価するという意味である。このとき、 $\hat{u}$  が任意の不偏推定量に対して次の不等式が成り立つことが導かれる [22, 23]。

$$V[\hat{u}] \succ 4\sigma^2 \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} \right)^{-1} \quad (24)$$

ただし、 $\succ$  は左辺から右辺を引いたものが半正値対称行列であることを意味する。Chernov ら [8] に従い、上式の右辺を KCR 下界と呼ぶ。Chernov ら [8] はさらに、 $\hat{u}$  が不偏推定量でなくても、 $\sigma \rightarrow 0$  で  $\hat{u} \rightarrow u$  であれば下界が  $O(\sigma^4)$  を除いて上式で表されることを示した。

式 (20) の誤差項  $\Delta u_1$  がこの KCR 下界に等しい変動を与えることがわかる。実際、その共分散行列は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[\Delta_1 u \Delta_1 u^\top] &= E[\bar{M}^{-1} \Delta_1 M u u^\top \Delta_1 M \bar{M}^{-1}] \\ &= E[\bar{M}^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\Delta \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top + \bar{\xi}_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} u u^\top \\ &\quad \sum_{\beta=1}^N \frac{\Delta \xi_\beta \bar{\xi}_\beta^\top + \bar{\xi}_\beta \Delta \xi_\beta^\top}{(u, V_0[\xi_\beta]u)} \bar{M}^{-1}] \\ &= \bar{M}^{-1} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{(u, E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta^\top]u) \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)(u, V_0[\xi_\beta]u)} \bar{M}^{-1} \\ &= 4\sigma^2 \bar{M}^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} \bar{M}^{-1} \\ &= 4\sigma^2 \bar{M}^{-1} \bar{M} \bar{M}^{-1} = 4\sigma^2 \bar{M}^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

ただし、上式中で各データ  $x_\alpha$  に入る誤差は互いに独立という仮定から  $E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta^\top] = 4\sigma^2 \delta_{\alpha\beta} V_0[\xi_\alpha]$  であることを用いた<sup>2</sup>。

行列  $\bar{M}$  の定義から、式 (25) が式 (24) の右辺に一致していることがわかる。これに  $\Delta_2 u$  を加えても、誤差は正負に対称で  $\Delta \xi_\alpha$  奇数次の項の期待値が 0 になるため、 $\hat{u}$  の共分散行列に対する寄与は  $O(\sigma^4)$  である。すなわち、最尤推定量  $\hat{u}$  の共分散行列は  $O(\sigma^4)$  を除いて KCR 下界を達成しており、この意味で最尤推定量は最適である。

## 6. 最尤推定量の偏差

次に最尤推定量  $\hat{u}$  の偏差を調べる。式 (14) より  $E[\Delta_1 M] = O$  であるから、式 (20) より  $E[\Delta_1 u] = O$  である。次に  $\Delta_2 u$  の期待値を計算する。 $\Delta_2 M$  の期待値は次のようになる。

$$E[\Delta_2 M] = \sum_{\alpha=1}^N \frac{E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top]}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} = 4\sigma^2 N \quad (26)$$

ただし、次のように置いた。

$$N = \sum_{\alpha=1}^N \frac{V_0[\xi_\alpha]}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} \quad (27)$$

$\bar{M}^{-1} \Delta_1 M \bar{M}^{-1} \Delta_1 M u$  の期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[\bar{M}^{-1} \Delta_1 M \bar{M}^{-1} \Delta_1 M u] &= E[\bar{M}^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top + \Delta \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)} \bar{M}^{-1} \\ &\quad \sum_{\beta=1}^N \frac{\bar{\xi}_\beta \Delta \xi_\beta^\top + \Delta \xi_\beta \bar{\xi}_\beta^\top}{(u, V_0[\xi_\beta]u)} u] \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{\bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha (\bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta)^\top E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta^\top] u}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)(u, V_0[\xi_\beta]u)} \\ &\quad + \bar{M}^{-1} E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta^\top] u (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta) \\ &= 4\sigma^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha, V_0[\xi_\alpha]u) \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)^2} + (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha) \bar{M}^{-1} V_0[\xi_\alpha]u \end{aligned} \quad (28)$$

$\Delta_1^* M \Delta_1 u$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta_1^* M \Delta_1 u &= -2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\Delta_1 u, V_0[\xi_\alpha]u) \bar{\xi}_\alpha (\bar{\xi}_\alpha, \Delta_1 u)}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)^2} \\ &= -2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{M}^{-1} \Delta_1 M u, V_0[\xi_\alpha]u) (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \Delta_1 M u) \bar{\xi}_\alpha}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)^2} \end{aligned}$$

<sup>2</sup> $\delta_{\alpha\beta}$  はクロネッカのデルタであり、 $\alpha = \beta$  のとき 1、それ以外で 0 をとる。

$$= -2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{M}^- V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}, (\Delta_1 M \mathbf{u})(\Delta_1 M \mathbf{u})^\top \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} = 8\sigma^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}, \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \quad (34)$$

(29)  $\Delta_2 L$  の期待値は次のようになる .

$(\Delta_1 M \mathbf{u})(\Delta_1 M \mathbf{u})^\top$  の期待値は次のようになる .

$$\begin{aligned} & E[(\Delta_1 M \mathbf{u})(\Delta_1 M \mathbf{u})^\top] \\ &= E\left[\sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha(\Delta \xi_\alpha, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \sum_{\beta=1}^N \frac{\bar{\xi}_\beta^\top(\Delta \xi_\beta, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\beta] \mathbf{u})}\right] \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{(\mathbf{u}, E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta^\top], \mathbf{u}) \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})(\mathbf{u}, V_0[\xi_\beta] \mathbf{u})} \\ &= 4\sigma^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} = 4\sigma^2 \bar{M} \quad (30) \end{aligned}$$

したがって  $\Delta_1^* M \Delta_1 \mathbf{u}$  の期待値は次のようになる .

$$\begin{aligned} & E[\Delta_1^* M \Delta_1 \mathbf{u}] \\ &= -8\sigma^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{M}^- V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}, \bar{M} \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \\ &= -8\sigma^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}, \bar{M}^- \bar{M} \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \\ &= -8\sigma^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}, \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \quad (31) \end{aligned}$$

$\Delta_2^* M \mathbf{u}$  は次のようになる .

$$\begin{aligned} \Delta_2^* M \mathbf{u} &= -2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\Delta_1 \mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}) \bar{\xi}_\alpha(\Delta \xi_\alpha, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \\ &= 2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{M}^- \Delta_1 M \mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})(\Delta \xi_\alpha, \mathbf{u}) \bar{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \\ &= 2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{M}^- V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}, \Delta_1 M \mathbf{u} \Delta \xi_\alpha^\top \mathbf{u}) \bar{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \quad (32) \end{aligned}$$

$\Delta_1 M \mathbf{u} \Delta \xi_\alpha^\top \mathbf{u}$  の期待値は次のようになる ,

$$\begin{aligned} & E[\Delta_1 M \mathbf{u} \Delta \xi_\alpha^\top \mathbf{u}] = E\left[\sum_{\beta=1}^N \frac{(\Delta \xi_\beta, \mathbf{u}) \bar{\xi}_\beta \Delta \xi_\alpha^\top \mathbf{u}}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\beta] \mathbf{u})}\right] \\ &= \sum_{\beta=1}^N \frac{\bar{\xi}_\beta(\mathbf{u}, E[\Delta \xi_\beta \Delta \xi_\alpha^\top] \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\beta] \mathbf{u})} \\ &= 4\sigma^2 \frac{\bar{\xi}_\alpha(\mathbf{u}, V_0[\Delta \xi_\alpha] \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} = 4\sigma^2 \bar{\xi}_\alpha \quad (33) \end{aligned}$$

したがって  $\Delta_2^* M \mathbf{u}$  の期待値は次のようになる .

$$E[\Delta_2^* M \mathbf{u}] = 8\sigma^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{M}^- V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}, \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2}$$

$$\begin{aligned} E[\Delta_2 L] &= E\left[\sum_{\alpha=1}^N \frac{(\Delta \xi_\alpha, \mathbf{u})^2 V_0[\xi_\alpha]}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2}\right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\mathbf{u}, E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\alpha^\top] \mathbf{u}) V_0[\xi_\alpha]}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \\ &= 4\sigma^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{V_0[\xi_\alpha]}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} = 4\sigma^2 N \quad (35) \end{aligned}$$

$\|\bar{M}^- \Delta_1 M \mathbf{u}\|^2$  の期待値は次のようになる .

$$\begin{aligned} & E[\|\bar{M}^- \Delta_1 M \mathbf{u}\|^2] = E[(\bar{M}^- \Delta_1 M \mathbf{u}, \bar{M}^- \Delta_1 M \mathbf{u})] \\ &= E\left[\left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha(\Delta \xi_\alpha, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})}, (\bar{M}^-)^2 \sum_{\beta=1}^N \frac{\bar{\xi}_\beta(\Delta \xi_\beta, \mathbf{u})}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\beta] \mathbf{u})}\right)\right] \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^N \frac{(\mathbf{u}, E[\Delta \xi_\alpha \Delta \xi_\beta^\top] \mathbf{u})(\bar{\xi}_\alpha, (\bar{M}^-)^2 \bar{\xi}_\beta)}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})(\mathbf{u}, V_0[\xi_\beta] \mathbf{u})} \\ &= 4\sigma^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{\xi}_\alpha, (\bar{M}^-)^2 \bar{\xi}_\alpha)}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} \\ &= 4\sigma^2 \text{tr}\left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})} (\bar{M}^-)^2\right) \\ &= 4\sigma^2 \text{tr}(\bar{M} (\bar{M}^-)^2) = 4\sigma^2 \text{tr}(\bar{M}^- \bar{M} \bar{M}^-) \\ &= 4\sigma^2 \text{tr}(\bar{M}^-) \quad (36) \end{aligned}$$

## 7. 超精度補正

前節の結果より, 最尤推定量  $\hat{u}$  の期待値は次のようになる .

$$\begin{aligned} E[\hat{u}] &= \mathbf{u} + 4\sigma^2 \left[ \sum_{\alpha=1}^N \frac{(\bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}) \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha}{(\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u})^2} \right. \\ &\quad \left. - \text{tr}(\bar{M}^-) \mathbf{u} \right] + O(\sigma^4) \quad (37) \end{aligned}$$

この結果から, 上式右辺の  $\sigma^2$  に比例する項を推定して最尤推定量  $\hat{u}$  から引けば超精度の当てはめが実現できると期待される . しかし, 項  $\text{tr}(\bar{M}^-) \mathbf{u}$  は単位ベクトルにするためのノルムの調節であり (図 1), 推定量は単位ベクトルに正規化するのでこの項は考慮する必要はない . したがって補正量は次のように表せる .

$$\Delta_c \mathbf{u} = 4\hat{\sigma}^2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{(M^- \xi_\alpha, V_0[\xi_\alpha] \hat{u}) M^- \xi_\alpha}{(\hat{u}, V_0[\xi_\alpha] \hat{u})^2} + (\xi_\alpha, M^- \xi_\alpha) M^- V_0[\xi_\alpha] \hat{u} \quad (38)$$

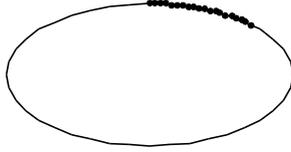


図 2: 実験に用いた楕円とその上の 20 点 .

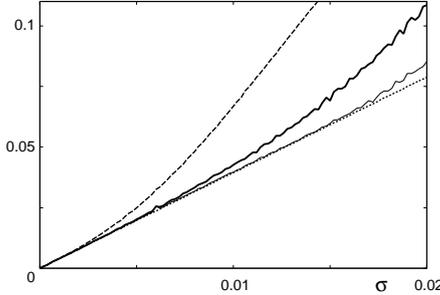


図 3: データの誤差に対する楕円当てはめの誤差 .

ただし、式 (37) の右辺は真の値によって表されているものを推定値に置き換えた。すなわち  $u$  は最尤推定量  $\hat{u}$  に置き換え、行列  $\bar{M}$  はデータ  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$  によって定義される  $\xi_\alpha$  によって計算する行列  $M$  に置き換える。その計算過程に含まれる共分散行列  $V_0[\xi_\alpha]$  の計算にも  $\xi_\alpha$  を用いる。そして分散  $\sigma^2$  は次のように推定する。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\hat{u}, M\hat{u})}{4(N-5)} \quad (39)$$

これは理論的には  $(\hat{u}, M\hat{u})/4\sigma^2$  が自由度  $N-5$  の  $\chi^2$  分布に従い、上式のように  $\hat{\sigma}^2$  を定義すると  $E[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$  となるからである [23]。

このように計算した補正量を用いて最尤推定量  $\hat{u}$  を次のように補正する。

$$\tilde{u} = N[\hat{u} - \Delta_c u] \quad (40)$$

ただし、 $N[\cdot]$  は単位ベクトルへの正規化を表す。

## 8. 実験

図 2 は楕円

$$\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{100^2} = 1 \quad (41)$$

上に等間隔に  $N = 20$  個の点  $\{(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)\}$  をとったものである。各点の  $x, y$  座標に独立に期待値 0、標準偏差  $\sigma$  の正規分布に従う誤差を加えたものをデータ  $\{(x_\alpha, y_\alpha)\}$  として楕円の当てはめを行った。最尤推定量  $\hat{u}$  の計算には Chojnacki ら [9] の FNS 法を用いた。

図 3 は横軸に  $\sigma$  をとり縦軸に平方平均誤差をプロットしたものである。ただし、平方平均誤差は各  $\sigma$  に

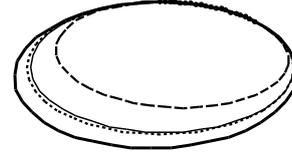


図 4: 誤差のある点列への楕円当てはめの一例 .

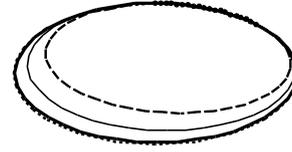


図 5: 誤差のある点列への楕円当てはめの一例 .

対して独立に 10,000 回の実験を行い、次のように評価した。

$$E = \sqrt{\frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \|P_u \hat{u}^{(a)}\|^2} \quad (42)$$

ここに  $\hat{u}^{(a)}$  は  $a$  回目の値である。ただし、符号の不定性があるので、 $(\hat{u}^{(a)}, u) \geq 0$  となる符号を選んだ。

図中の太い実線が最尤推定量に対するものであり、細い実線が超精度補正を加えたものである。破線は最小二乗解  $\hat{u}_{LS}$  に対する結果である。点線は式 (24) の KCR 下界に対応する

$$D = 2\sigma \sqrt{\text{tr} \left( \sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top}{(u, V_0[\xi_\alpha] u)} \right)^{-1}} \quad (43)$$

をプロットしたものである。

図 3 からわかるように、最小二乗解は極めて精度が低い。それに対して最尤推定量は極めて高精度であり、誤差が小さいときは KCR 下界にほぼ一致している。誤差がやや大きくなると精度が KCR 下界からわずかに離れるが、超精度補正を加えると再び KCR 下界にほぼ一致している。

図 4 は誤差を加えた点列に楕円を当てはめた一例である ( $\sigma = 0.009$ )。点線が真の楕円であり、破線が最小二乗解、太い実線が最尤推定量、細い実線が超精度補正を加えたものである。この例では超精度補正を加えるとより真の楕円に近づいている。

図 5 は別の一例である ( $\sigma = 0.009$ )。この例では最尤推定量が既に真の楕円にかなり近く、超精度補正を加えるとかえって真の楕円から離れる。このような場合も生じるが、全体としては図 4 のように精度が向上する例のほうが多く、平均すると図 3 に示すようなわずかなではあるが精度の改良となる。

いろいろな例を観察すると、図 5 のように補正によって精度が低下するのはほとんどの場合、最尤推

定で当てはめた楕円が真の楕円の内側に来る場合であった。しかし、最尤推定では真の楕円の外側に当てはまる場合のほうが圧倒的に多いので、全体としては精度の向上となっている。

真の楕円の外側に当てはまる可能性が多いのは、楕円の長軸または短軸方向の半径を  $a$  とすると、 $x^2$  または  $y^2$  の係数が  $1/a^2$  に比例し、これを未知数として推定するためと思われる。実際、 $1/a^2$  が真値  $1/\bar{a}^2$  より大きくなる確率と小さくなる確率が等しいとしても、関数  $y = 1/x^2$  のグラフの形からわかるように、 $a \geq \bar{a}$  となる確率が圧倒的に大きくなる。

## 9. まとめ

平面上の点列に楕円を当てはめる問題は、従来から最尤推定が最も高精度であるとみなされ、くりこみ法、HEIV 法、FNS 法などの計算法が提案されている。本論文ではこれを上回る「超精度」の当てはめ法が存在することを理論的および実験的に検証した。これは最尤推定の摂動解析によって高次の偏差項を評価し、これを最尤推定解から差し引くものである。ただし、最尤推定解は KCR 下界をほとんど達成しているので、超精度補正による効果はわずかであり、実際の応用で目に見えるほどの差を生じることはない。しかし、当てはめの精度の理論限界と最尤推定の精度に関して、理論的な観点から意味のある結果であるといえる

謝辞：本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 17500112) の助成による。

## 参考文献

- [1] D. A. Anderson, The circular structural model, *J. R. Statist. Soc. B*-**43**-2 (1981), 131–141.
- [2] 浅山泰祐, 塩野 充, 円弧近似を用いた任意傾斜楕円のハフ変換による検出実験, 電子情報通信学会技術報告, PRMU98-123 (1998-11).
- [3] M. Berman and D. Culpin, The statistical behaviour of some least squares estimators of the centre and radius of a circle, *J. R. Statist. Soc. B*-**48**-2 (1986), 183–196.
- [4] F. J. Bookstein, Fitting conic sections to scattered data, *Comput. Graphics Image Process.*, **9** (1979) 56–71.
- [5] J. Cabrera and P. Meer, Unbiased estimation of ellipses by bootstrapping, *IEEE Trans. Patt. Mach. Intell.*, **18**-7 (1996-7), 752–756.
- [6] N. N. Chan, On circular functional relationships, *J. R. Statist. Soc. B*-**27** (1965), 45–56.
- [7] Y. C. Cheng and S. C. Lee, A new method for quadratic curve detection using K-RANSAC with acceleration techniques, *Patt. Recog.*, **28**-5 (1995-5), 663–682.
- [8] N. Chernov and C. Lesort, Statistical efficiency of curve fitting algorithms, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47**-4 (2004-11), 713–728.
- [9] W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11 (2000), 1294–1303.
- [10] D. B. Cooper and N. Yalabik, On the computational cost of approximating and recognizing nose-perturbed

- straight lines and quadratic arcs in the plane, *IEEE Trans. Comput.*, **25**-10 (1976-10), 1020–1032.
- [11] A. Fitzgibbon, M. Pilu and R. B. Fisher, Direct least square fitting of ellipses, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **21**-5 (1999-5), 476–480.
- [12] 藤本公三, 岩田剛治, 仲田周次,  $\theta$ - $\rho$  ハフ変換平面からの 2 次曲線のパラメータ抽出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J74-D-II** (1991-9), 1184–1191.
- [13] N. Guil and E. L. Zapata, Lower order circle and ellipse Hough transform, *Patt. Recog.*, **30**-10 (1997-10), 1729–1744.
- [14] C.-T. Ho and L.-H. Chen, A fast ellipse/circle detector using geometric symmetry, *Patt. Recog.*, **28**-1 (1995), 117–124.
- [15] C. L. Huang, Elliptical feature extraction via an improved Hough transform, *Patt. Recog. Lett.*, **10**-2 (1989-2), 93–100.
- [16] J. Illingworth and J. Kittler, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **9**-5 (1999-9), 690–698.
- [17] D. Ioannou, W. Huda, and A. F. Laine, Circle recognition through a 2D Hough Transform and radius histogramming, *Image Vision Comput.* **17**-1 (1999-1), 15–26.
- [18] S. H. Joseph, Unbiased least squares fitting of circular arcs, *CVGIP: Models Image Process.*, **56**-5 (1994-9), 424–432.
- [19] K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [20] 金谷健一, コンピュータビジョンのためのくりこみ法, 情報処理学会論文誌, **35**-2 (1994-2), 201–209.
- [21] K. Kanatani, Statistical bias of conic fitting and renormalization, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **16**-3 (1994-3), 320–326.
- [22] 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36**-8 (1995-8), 1865–1873.
- [23] K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996, reprinted by Dover, New York, 2005.
- [24] 金谷 健一, 画像からの幾何学的推論はどういう統計的モデルに基づくのか, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J86-D-II-7** (2003-7), 966–973.
- [25] 金谷 健一, くりこみ法その後: 波紋と発展, 情報処理学会研究報告, 2003-CVIM-139-5 (2003-7), 33–40.
- [26] 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
- [27] 金谷 健一, くりこみ法の謎を解く, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-149-3 (2005-5), 15–22.
- [28] Y. Kanazawa and K. Kanatani, Optimal conic fitting and reliability evaluation, *IEICE Trans. Inf. & Sys.*, **E79-D-9** (1996-9), 1323–1328.
- [29] D. Keren, D. Cooper and J. Subrahmonia, Describing complicated objects by implicit polynomials, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **16**-1 (1994-1), 38–53.
- [30] A. Kukush, I. Markovsky and S. Van Huffel, Consistent estimation in an implicit quadratic measurement error model, *Comput. Stat. Data Anal.*, **47**-1 (2004-8), 123–147.
- [31] A. Kukush and E. O. Maschlce, The efficiency of adjusted least squares in the linear functional relationship, *J. Multivariate Anal.*, **87**-2 (2003-10), 261–274.
- [32] Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37**-2 (2000), 127–150.
- [33] V. J. Milenkovic, Multiple resolution search techniques for the Hough transform in high dimensional parameter spaces, in A. Rosenfeld (Ed.), *Techniques for 3-D Machine Perception*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1986, pp. 231–254.
- [34] 三島等, 太田直哉, 金谷健一, 信頼性評価を備えた最適なコンニク当てはめプログラム, 情報処理学会研究報告, 98-CVIM-111-4 (1998-5), 25–32.
- [35] 森 克己, 渡邊栄治, 片桐重和, 弦とその共役直径に基づく楕円弧の識別, 電子情報通信学会論文誌 D-II **J84-D-II-2** (2001-2), 287–294.

- [36] 永田亮一, 川口 剛, 遺伝アルゴリズムとエッジ点の線分領域へのグルーピングを利用する楕円検出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J81-D-II-9** (1998-9) 2074–2085.
- [37] 岡部光生, 金谷健一, 太田直哉, 楕円成長法による円形物体の自動検出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J85-D-II-12** (2002-12), 1823–1831.
- [38] 恩田寿和, 藤原伸行, 阿部清秀, 森宣仁, 三次元円検出による部品位置決めと事前のハンド干渉チェックにより実現した視覚ベースピッキングシステム, 日本ロボット学会誌, **18-7** (2000-10), 995–1002.
- [39] 恩田邦夫, 渡並 智, 青木由直, Hough 変換平面からの楕円パラメータ決定法, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J72-D-II-10** (1989-10), 1760–1764.
- [40] D. Pao, H. F. Li, and R. Jayakumar, A decomposable parameter space for the detection of ellipses, *Patt. Recog.* **14-12** (1993), 951–958.
- [41] J. Porrill, Fitting ellipses and predicting confidence envelopes using a bias corrected Kalman filter, *Image Vision Comput.*, **8-1** (1990-2), 37–41.
- [42] V. Pratt, Direct least-squares fitting of algebraic surfaces, *Comput. Graphics*, **21-4** (1987-7), 145–152.
- [43] G. Roth and M. D. Levine, Extracting geometric primitives, *CVGIP: Image Understand.*, **58-1**(1993-7), 1–22.
- [44] G. Roth and M. D. Levine, Geometric primitive extraction using a genetic algorithm *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **16-9** (1994-9), 901–905.
- [45] P. L. Rosin, Ellipse fitting by accumulating five-points fits, *Patt. Recog. Lett.*, **14-6** (1993-8), 661–669.
- [46] P. L. Rosin, A note on the least squares fitting of ellipses, *Patt. Recog. Lett.*, **14** (1993), 799–808.
- [47] P. L. Rosin and G. A. W. West, Nonparametric segmentation of curves into various representations, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **17-12** (1995-12), 1140–1153.
- [48] R. Safee-Rad, I. Tchoukanov, B. Benhabib and K. C. Smith, Accurate parameter estimation of quadratic curves from gray-level images, *CVGIP: Image Understand.*, **54-2** (1991-9), 259–274.
- [49] P. D. Sampson, Fitting conic sections to “very scattered” data: An iterative refinement of the Bookstein algorithm, *Comput. Graphics Image Process.*, **18** (1982), 97–108.
- [50] 塩野 充, 黒点ランダム抽出と Hough 曲面の交点計算による円図形検出の一手法, 情報処理学会論文誌 **32-2** (1991), 179–187.
- [51] 塩野 充, 黒点ランダム抽出と重心を用いたハフ変換による円弧の検出実験, 電子情報通信学会論文誌, **J75-D-II** (1992-7), 1195–1201.
- [52] H. Späth, Least-squares fitting of ellipses and hyperbolas, *Comput. Statistics*, **12-3** (1997-9) 329–341.
- [53] H. Späth, Orthogonal distance fitting by circles and ellipses with given area, *Comput. Statistics*, **12-3** (1997-9) 343–354.
- [54] G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13-11** (1991-11), 1115–1138.
- [55] G. Taubin, F. Cukierman, S. Sullivan, J. Ponce and D. J. Kriegman, Parameterized families of polynomials for bounded algebraic curve and surface fitting, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **16-3** (1994-3), 287–303.
- [56] S. Tsuji and F. Matsumoto, Detection of ellipses by a modified Hough transform, *IEEE Trans. Comput.*, **27-8** (1978-8), 777–781.
- [57] 渡辺孝志, 畠山雅充, 木村彰男, ハフ変換を用いた接線情報の抽出と欠損楕円の検出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J82-D-II-12** (1999-12), 2221–2229.
- [58] 渡辺孝志, 木村彰男, 丹波澄雄, 横山隆三, Li-Lavin-Le Master 型高速ハフ変換による欠損楕円の検出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J76-D-II-12** (1993-12), 2504–2512.
- [59] 渡辺孝志, 柴田俊浩, Hough 変換と階層化画像を用いた欠損楕円の検出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J73-D-II-2** (1990-2), 159–166.
- [60] M. Werman and D. Keren, A Bayesian method for filtering parametric and nonparametric models to noisy data, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **23-5** (2001-5), 528–534.
- [61] W.-Y. Wu and M.-J. J. Wang, Elliptical object detection by using its geometric properties, *Patt. Recog.*, **26-10** (1993-10), 1449–1500.
- [62] 大和淳二, 入澤和義, 石井郁夫, 牧野秀夫, 重み付け中点図面を用いた楕円抽出アルゴリズム, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J72-D-II-7** (1989), 1009–1016.
- [63] H. K. Yuen, J. Illingworth, and J. Kittler, Detecting partially occluded ellipses using the Hough transform, *Image Vision Comput.*, **7-1** (1989-2), 31–37.
- [64] J. H. Yoo and I. K. Seth, An ellipse detection method from the polar and pole definition of conics, *Pattern Recog.*, **26-2** (1993-2), 307–315.

## 付録. 最尤推定量の摂動解析

1.  $u$  は単位ベクトルであるという条件のもとに摂動するので, 次式が成立しなければならない.

$$\begin{aligned} & \|u + \Delta_1 u + \Delta_2 u + \dots\|^2 \\ &= (u + \Delta_1 u + \Delta_2 u + \dots, u + \Delta_1 u + \Delta_2 u + \dots) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (44)$$

$O(1)$ ,  $O(\sigma)$ ,  $O(\sigma^2)$  の項をそれぞれ取り出すと次のようになる.

$$(u, u) = \|u\|^2 = 1, \quad (u, \Delta_1 u) = 0 \quad (45)$$

$$(u, \Delta_2 u) = -(\Delta_1 u, \Delta_1 u) = -\|\Delta_1 u\|^2 \quad (46)$$

2. 式 (17) の両辺から  $O(1)$  の項を取り出すと  $\bar{M}u = 0$  となる.

3. 式 (17) の両辺から  $O(\sigma)$  の項を取り出すと次のようになる.

$$\bar{M}\Delta_1 u + \Delta_1 M u + \Delta_1^* M u = 0 \quad (47)$$

式 (18) より次のようになる.

$$\begin{aligned} \Delta_1^* M u &= -2 \sum_{\alpha=1}^N \frac{((\Delta_1 u, V_0[\xi_\alpha]u) + O(\sigma^2))\xi_\alpha(\xi_\alpha, u)}{(u, V_0[\xi_\alpha]u)^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

ゆえに式 (47) に左から  $\bar{M}^-$  を掛けると次式が得られる.

$$P_u \Delta_1 u = -\bar{M}^- \Delta_1 M u \quad (49)$$

ただし,  $P_u$  は式 (23) で定義した射影行列である ( $\bar{M}^- \bar{M} = P_u$  であることに注意 [23]). 式 (45) の第 2 式より  $\Delta_1 u$  は  $u$  に直交するから,  $P_u \Delta_1 u = \Delta_1 u$  である. したがって式 (20) が得られる.

4. 式 (17) の両辺から  $O(\sigma^2)$  の項を取り出すと次のようになる (式 (48) より  $\Delta_1^* M u$  には  $O(\sigma^2)$  の項は含まれていない).

$$\begin{aligned} & \bar{M}\Delta_2 u + \Delta_1 M \Delta_1 u + \Delta_1^* M \Delta_1 u + \Delta_2 M u + \Delta_2^* M u \\ &= \Delta_2 L u \end{aligned} \quad (50)$$

両辺に左から  $\bar{M}^-$  を掛け, 移項すると次式を得る.

$$\begin{aligned} P_u \Delta_2 u &= -\bar{M}^- \Delta_2 M u + \bar{M}^- \Delta_1 M \bar{M}^- \Delta_1 M u \\ &\quad - \bar{M}^- \Delta_1^* M \Delta_1 u - \bar{M}^- \Delta_2^* M u + \bar{M}^- \Delta_2 L u \end{aligned} \quad (51)$$

これは  $\Delta_2 u$  の  $u$  に直交する成分である.  $u$  方向の成分は式 (46) より  $-\|\Delta_1 u\|^2 u$  であり, 式 (20) より  $\|\Delta_1 u\|^2 = -\|\bar{M}^- \Delta_1 M u\|^2$  である. 以上より式 (21) を得る.