

楕円当てはめの超精度最小二乗法

岩元 祐輝^{†1} プラサンナ・ランガラヤン^{†2}
金 谷 健 一^{†1}

画像から抽出した点列に楕円を当てはめる新しい方法を提案する。基本原理は代数的距離を最小にする最小二乗法である。本論文では、最小二乗法にスケールの正規化の仕方によって解が異なるという問題があることを逆用して、正規化の重みを未知としたまま解の精度を高次の項まで解析し、2次の偏差項を0とするように重みを定める。そして実験によって、これが高精度の解析的手法として知られている Taubin 法よりもさらに精度が高いことを実証する。精度が高い最尤推定は反復を要し、誤差が大きいと反復が収束しないこともあるのに対して、提案手法は解析的方法であり、反復を必要としない。

Ellipse Fitting by Hyperaccurate Least Squares

YUUKI IWAMOTO,^{†1} PRASANNA RANGARAJAN^{†2}
and KENICHI KANATANI^{†1}

This paper presents a new method for fitting an ellipse to a point sequence extracted from images. The basic principle is the least squares, minimizing the algebraic distance. Exploiting the fact that the least-squares solution depends on the way the scale is normalized, we analyze the accuracy to high order terms with the scale normalization weight unspecified and determine the weight so that the second order bias is zero. We demonstrate by experiments that our method is superior to the Taubin method, which is also noniterative and known to be highly accurate. Although the highest accuracy is achieved by maximum likelihood, it requires iterations, which may not converge in the presence of large noise. In contrast, our method analytically computes a solution without iterations.

^{†1} 岡山大学大学院自然科学研究科

Department of Computer Science, Okayama University, Japan

^{†2} 米国南メソジスト大学電気工学科

Department of Electrical Engineering, Southern Methodist University, U.S.A.

1. ま え が き

シーン中の円形や球形の物体を撮影すると一般に楕円に投影され、その投影像からその物体の3次元位置が解析できる⁹⁾。このため、画像から抽出した点列に円や楕円を当てはめることは視覚ロボットを含む広範な応用の基本的な処理の一つである。そして、画像から抽出したエッジ点列が楕円をなすかどうかを判定して楕円弧を抽出する種々の研究がなされている^{2),18)}。一方、筆者らはノイズを含むデータに対する楕円当てはめのさまざまな方法を提案し、その精度や計算効率を評価してきた^{17),24),25)}。

現在、点列に楕円を当てはめる最も精度が高いとされる一般的な方法は最尤推定である²²⁾。そして、そのための「FNS法」⁴⁾、「HEIV法」¹⁶⁾、「射影ガウスニュートン法」²⁵⁾などの数値解法が知られている。これらは誤差分布に関する近似を含んでいるが、これを厳密化した計算法も提案されている¹⁷⁾。さらに最尤推定解に補正を加えて精度をより向上させる工夫も提案されている²⁴⁾。これらの解は高次の誤差項を除いて精度の理論限界(「KCR下界」)に達している^{11)–15)}、ほとんど改良の余地はない。しかし、最尤推定は非線形最適化であり、反復を要する。このため適切な初期値が必要であり、また誤差が大きいと反復が収束しないこともある。これを補完する意味で、解析的に解が得られる近似解法の役割が大きい。その代表は最小二乗法である。しかし、最小二乗法はスケールの正規化の仕方によって解が異なるという問題がある²²⁾。本論文ではこの性質に着目し、解の精度が最も高くなるような正規化法を求める。具体的には、金谷の高次誤差解析^{14),15)}により、正規化法を未知としたまま精度を高次の項まで解析し、その誤差を最大限に減少させるような正規化法を選ぶ。そして実験によって、反復を要しない解析的解法としては非常に高精度であることを実証する。

2. 楕円の当てはめの最小二乗法

楕円は次のように表せる。

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2f_0(Dx + Ey) + f_0^2 F = 0 \quad (1)$$

ただし、 f_0 は x, y のオーダーを持つ定数であり^{*1}、物理的な次元を合わせると同時に加減算の数値的な精度を保持するのが目的である^{21),22)}。問題は、与えられた点列 (x_α, y_α) , $\alpha = 1, \dots, N$ に対して式 (1) の楕円がなるべくよく当てはまるように係数 A, \dots, F を定める

*1 本論文の実験では一辺が 1000 画素以下の画像の画素座標を想定し、 $f_0 = 600$ とした。

ことである。「最小二乗法」とは次の二乗和 J を最小にするように A, \dots, F を計算する方法である。

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left(Ax_{\alpha}^2 + 2Bx_{\alpha}y_{\alpha} + Cy_{\alpha}^2 + 2f_0(Dx_{\alpha} + Ey_{\alpha}) + f_0^2 F \right)^2 \quad (2)$$

これは当てはめの「代数的距離」とも呼ばれ、これを最小にすることを「代数的距離最小化」とも呼ぶ。あるいは解が線形計算で得られることから「線形解法」とも呼ぶ。式 (2) は明らかに $A = \dots = F = 0$ で最小となるので、何らかのスケールの正規化が必要である。例えば次のものが考えられる。

$$F = 1 \quad (3)$$

$$A + C = 1 \quad (4)$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 = 1 \quad (5)$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 = 1 \quad (6)$$

$$A^2 + 2B^2 + C^2 = 1 \quad (7)$$

$$AC - B^2 = 1 \quad (8)$$

式 (3) を用いると式 (2) の最小化が連立 1 次方程式に帰着するので、古くから用いられている^{1),5),20)}。しかし、原点 (0,0) を通る楕円が表せない。式 (4) ならすべての楕円が表せ、やはり連立 1 次方程式に帰着する^{7),20)}。最も広く使われているのが係数の二乗和 (5) であり^{*119)}、以下、これを「標準最小二乗法」と呼ぶ。式 (6) を用いるものもある^{*28)}。式 (7) は解が座標軸の並進と回転に不変^{*3)}になるようにしたものである³⁾。式 (8) は式 (1) が必ず楕円^{*4)}になるように定めたものである⁶⁾。これ以外にも種々の変形が考えられるが、問題はどの正規化を用いるかによって解が異なることである。本論文の目的は当てはめの精度を最も向上させるような正規化を定めることである。そのために、未知数を 6 次元ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \end{pmatrix}^{\top} \quad (9)$$

で表し、対称行列 N を重みとする 2 次形式による正規化

$$(\mathbf{u}, N\mathbf{u}) = (\text{定数}) \quad (10)$$

*1 多くの文献では楕円を $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ と表しているため、その係数の二乗和は式 (1) の形では $A^2 + 4B^2 + C^2 + 4f_0^2(D^2 + E^2) + f_0^4 F^2 = 0$ となる。

*2 楕円を $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ とすれば式 (1) の形では $A^2 + 4B^2 + C^2 + 4f_0^2(D^2 + E^2) = 0$ となる。

*3 不変とは座標軸を並進、回転してから当てはめた楕円と、もとの座標系で当てはめた楕円に同じ並進、回転を施したものが一致することをいう。

*4 $AC - B^2 = 0$ なら放物線、 $AC - B^2 < 0$ なら双曲線を表す¹⁰⁾。

を考える。ただし、ベクトル a, b の内積を (a, b) と書く。本論文の目的は、解の精度を最も高くする重み N を定めることである。従来はこの重み行列 N に主として正値または半正値対称行列が使われてきた (式 (8) の正規化が例外である^{*5)})。しかし、本論文では正値または半正値対称行列でない一般の対称行列も含めて考える。このため式 (10) の右辺は正とは限らない。

3. 代数的解法

重み行列 N が与えられれば解 \mathbf{u} は次のように計算される。6 次元ベクトル ξ を

$$\xi = \begin{pmatrix} x^2 & 2xy & y^2 & 2f_0x & 2f_0y & f_0^2 \end{pmatrix}^{\top} \quad (11)$$

と置けば、式 (1) は次のように書ける。

$$(\mathbf{u}, \xi) = 0 \quad (12)$$

各 (x_{α}, y_{α}) に対する ξ の値を ξ_{α} と書けば、問題は制約条件 (10) のもとで次式を最小にすることである

$$J = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}, \xi_{\alpha})^2 = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{u}^{\top} \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}^{\top} \mathbf{u} = (\mathbf{u}, M\mathbf{u}) \quad (13)$$

ただし、 6×6 行列 M を次のように置いた。

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \xi_{\alpha} \xi_{\alpha}^{\top} \quad (14)$$

式 (13) は \mathbf{u} の 2 次形式であり、よく知られているように、これを式 (10) のもとで最小にする解 \mathbf{u} は一般固有値問題

$$M\mathbf{u} = \lambda N\mathbf{u} \quad (15)$$

を満たす。重み行列 N が正値または半正値なら λ は正であり、解は最小一般固有値 λ に対する一般固有ベクトル \mathbf{u} である。しかし、 N が一般の場合は λ は正とは限らない。以下では $M\mathbf{u} \approx 0$ と仮定し、 λ が微小量であるとして解析するので、解は式 (15) の絶対値最小の一般固有値 λ に対する一般固有ベクトル \mathbf{u} となる^{*6)}。ただし、一般固有ベクトル \mathbf{u} のノルムは不定であるから以下、解 \mathbf{u} は単位ベクトル ($\|\mathbf{u}\| = 1$) とする。解は必ずしも楕円とは限らず、放物線あるいは双曲線の可能性がある。式 (8) の正規化⁶⁾ はそれを防ぐためであ

*5 式 (8) の左辺を $(\mathbf{u}, N\mathbf{u})$ と書くと、 \mathbf{u} の空間が $(\mathbf{u}, N\mathbf{u}) > 0$ の楕円から成る領域と $(\mathbf{u}, N\mathbf{u}) < 0$ の双曲線から成る領域に別れ、境界上で放物線となる。文献 6) では領域 $(\mathbf{u}, N\mathbf{u}) > 0$ で解を探索している。

*6 データに誤差があれば M は正値であり、 $(\mathbf{u}, M\mathbf{u}) > 0$ である。ゆえに求めた解 \mathbf{u} が $(\mathbf{u}, N\mathbf{u}) < 0$ なら $\lambda < 0$ である。しかし $-N$ を改めて N と置けば解 \mathbf{u} は同じで $(\mathbf{u}, N\mathbf{u})$ および λ が符号を変える。このため λ の符号自体に意味はない。

るが、以下では楕円でない解 u も排除せず u の真の値と比較する．

【標準最小二乗法】 式 (5) を用いることは重み行列 N を単位行列 I に選ぶことに相当し、式 (15) は通常の固有値問題

$$Mu = \lambda u \quad (16)$$

となる．ゆえに、解は行列 M の最小固有値に対する単位固有ベクトルである．

【Taubin 法】 精度が高いことで知られる Taubin 法²³⁾ は重み N として次の行列 N_{TB} を用いるものである²²⁾．

$$N_{TB} = \frac{4}{N} \sum_{\alpha=1}^N \begin{pmatrix} x_{\alpha}^2 & x_{\alpha}y_{\alpha} & 0 & f_0x_{\alpha} & 0 & 0 \\ x_{\alpha}y_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 & x_{\alpha}y_{\alpha} & f_0y_{\alpha} & f_0x_{\alpha} & 0 \\ 0 & x_{\alpha}y_{\alpha} & y_{\alpha}^2 & 0 & f_0y_{\alpha} & 0 \\ f_0x_{\alpha} & f_0y_{\alpha} & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0x_{\alpha} & f_0y_{\alpha} & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

解は式 (15) の一般固有値問題の最小一般固有値に対する単位一般固有ベクトルである．

4. 誤差解析

各点 (x_{α}, y_{α}) はその真の位置 $(\bar{x}_{\alpha}, \bar{y}_{\alpha})$ に誤差 $(\Delta x_{\alpha}, \Delta y_{\alpha})$ が加わったものであるとして、 ξ_{α} の誤差を次のように書く．

$$\xi_{\alpha} = \bar{\xi}_{\alpha} + \Delta_1 \xi_{\alpha} + \Delta_2 \xi_{\alpha} \quad (18)$$

ただし $\bar{\xi}_{\alpha}$, $\Delta_1 \xi_{\alpha}$, $\Delta_2 \xi_{\alpha}$ はそれぞれ真の値、誤差 Δx_{α} , Δy_{α} の 1 次、2 次の項であり、式 (11) より次のように書ける．

$$\bar{\xi}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{\alpha}^2 \\ 2\bar{x}_{\alpha}\bar{y}_{\alpha} \\ \bar{y}_{\alpha}^2 \\ 2f_0\bar{x}_{\alpha} \\ 2f_0\bar{y}_{\alpha} \\ f_0^2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 \xi_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2\bar{x}_{\alpha}\Delta x_{\alpha} \\ 2\bar{x}_{\alpha}\Delta y_{\alpha} + 2\bar{y}_{\alpha}\Delta x_{\alpha} \\ 2\bar{y}_{\alpha}\Delta y_{\alpha} \\ 2f_0\Delta x_{\alpha} \\ 2f_0\Delta y_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 \xi_{\alpha} = \begin{pmatrix} \Delta x_{\alpha}^2 \\ 2\Delta x_{\alpha}\Delta y_{\alpha} \\ \Delta y_{\alpha}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

金谷の高次誤差解析^{14),15)} は一般論であり、 $\Delta_2 \xi_{\alpha}$ は楕円に特有な項なので考慮していなかったが、ここでは 2 次の項まで厳密に解析する．まず、データ ξ_{α} の共分散行列 $V[\xi_{\alpha}] = E[\Delta_1 \xi_{\alpha} \Delta_1 \xi_{\alpha}^T]$ を計算する ($E[\cdot]$ は期待値)．誤差項 Δx_{α} , Δy_{α} は独立な期待値 0、標準偏差 σ の正規分布に従う確率変数とし、関係 $E[\Delta x_{\alpha}] = E[\Delta y_{\alpha}] = 0$, $E[\Delta x_{\alpha}^2] = E[\Delta y_{\alpha}^2] = \sigma^2$, $E[\Delta x_{\alpha} \Delta y_{\alpha}] = 0$ を用ると次のようになる．

$$V[\xi_{\alpha}] = E[\Delta_1 \xi_{\alpha} \Delta_1 \xi_{\alpha}^T] = \sigma^2 V_0[\xi_{\alpha}] \quad (20)$$

$$V_0[\xi_{\alpha}] = 4 \begin{pmatrix} \bar{x}_{\alpha}^2 & \bar{x}_{\alpha}\bar{y}_{\alpha} & 0 & f_0\bar{x}_{\alpha} & 0 & 0 \\ \bar{x}_{\alpha}\bar{y}_{\alpha} & \bar{x}_{\alpha}^2 + \bar{y}_{\alpha}^2 & \bar{x}_{\alpha}\bar{y}_{\alpha} & f_0\bar{y}_{\alpha} & f_0\bar{x}_{\alpha} & 0 \\ 0 & \bar{x}_{\alpha}\bar{y}_{\alpha} & \bar{y}_{\alpha}^2 & 0 & f_0\bar{y}_{\alpha} & 0 \\ f_0\bar{x}_{\alpha} & f_0\bar{y}_{\alpha} & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0\bar{x}_{\alpha} & f_0\bar{y}_{\alpha} & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

共分散行列 $V[\xi_{\alpha}]$ から σ^2 を除いた $V_0[\xi_{\alpha}]$ を「正規化共分散行列」と呼ぶ．式 (21) と式 (17) を比較すると、Taubin 法では

$$N_{TB} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N V_0[\xi_{\alpha}] \quad (22)$$

として真値 $(\bar{x}_{\alpha}, \bar{y}_{\alpha})$ をデータ (x_{α}, y_{α}) で代用していることが分かる．

5. 摂動解析

式 (18) を式 (14) に代入すると次のようになる．

$$M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\bar{\xi}_{\alpha} + \Delta_1 \xi_{\alpha} + \Delta_2 \xi_{\alpha})(\bar{\xi}_{\alpha} + \Delta_1 \xi_{\alpha} + \Delta_2 \xi_{\alpha})^T = \bar{M} + \Delta_1 M + \Delta_2 M + \dots \quad (23)$$

ただし、 \dots は誤差の 3 次以上の項であり、 \bar{M} , $\Delta_1 M$, $\Delta_2 M$ をそれぞれ次のように定義する．

$$\bar{M} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \bar{\xi}_{\alpha} \bar{\xi}_{\alpha}^T, \quad (24)$$

$$\Delta_1 M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\bar{\xi}_{\alpha} \Delta_1 \xi_{\alpha}^T + \Delta_1 \xi_{\alpha} \bar{\xi}_{\alpha}^T), \quad (25)$$

$$\Delta_2 M = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\bar{\xi}_{\alpha} \Delta_2 \xi_{\alpha}^T + \Delta_1 \xi_{\alpha} \Delta_1 \xi_{\alpha}^T + \Delta_2 \xi_{\alpha} \bar{\xi}_{\alpha}^T) \quad (26)$$

そして、式 (16) の解 u , λ を次のように展開する．

$$u = \bar{u} + \Delta_1 u + \Delta_2 u + \dots, \quad \lambda = \bar{\lambda} + \Delta_1 \lambda + \Delta_2 \lambda + \dots \quad (27)$$

いずれもバーがついたものは誤差がないときの値であり、 Δ_1 , Δ_2 は誤差の 1 次および 2 次の項を表す．式 (23), (27) を式 (15) に代入すると次のようになる．

$$(\bar{M} + \Delta_1 M + \Delta_2 M + \dots)(\bar{u} + \Delta_1 u + \Delta_2 u + \dots) = (\bar{\lambda} + \Delta_1 \lambda + \Delta_2 \lambda + \dots)N(\bar{u} + \Delta_1 u + \Delta_2 u + \dots) \quad (28)$$

両辺を展開して誤差の 0 次、1 次、2 次の項を等値すると次式を得る．

$$\bar{M}\bar{u} = \bar{\lambda}N\bar{u} \quad (29)$$

$$\bar{M}\Delta_1 u + \Delta_1 M\bar{u} = \bar{\lambda}N\Delta_1 u + \Delta_1 \lambda N\bar{u} \quad (30)$$

$\bar{M}\Delta_2\mathbf{u} + \Delta_1\bar{M}\Delta_1\mathbf{u} + \Delta_2\bar{M}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\lambda}N\Delta_2\mathbf{u} + \Delta_1\lambda N\Delta_1\mathbf{u} + \Delta_2\lambda N\bar{\mathbf{u}}$ (31)
誤差がない場合は楕円の式 (12) が成り立つから $(\bar{\xi}_\alpha, \bar{\mathbf{u}}) = 0$ であり, 式 (24) より $\bar{M}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ であることが分かる. したがって式 (29) より $\bar{\lambda} = 0$ である. また, 式 (25) より $(\bar{\mathbf{u}}, \Delta_1\bar{M}\bar{\mathbf{u}}) = 0$ であるから, 式 (30) の両辺と $\bar{\mathbf{u}}$ との内積をとると, $\Delta_1\lambda = 0$ であることが分かる. そして式 (30) の左から一般逆行列 \bar{M}^- を掛けると次式が得られる.

$$\Delta_1\mathbf{u} = -\bar{M}^- \Delta_1\bar{M}\bar{\mathbf{u}} \quad (32)$$

ただし, 上式では $\bar{M}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ より $\bar{\mathbf{u}}$ は \bar{M} の零ベクトルであるから, 一般逆行列の定義より $\bar{M}^- \bar{M} (\equiv P_{\bar{\mathbf{u}}})$ が $\bar{\mathbf{u}}$ に直交する方向への射影行列になっていること, および $\|\bar{\theta} + \Delta_1\theta + \Delta_2\theta + \dots\|^2 = 1$ を展開して誤差 1 次の項を比較して $(\bar{\theta}, \Delta_1\theta) = 0$, すなわち $\Delta_1\theta$ が $\bar{\theta}$ に直交していることを用いた. 式 (32) を式 (31) に代入すると $\Delta_2\lambda$ が次のように求まる.

$$\Delta_2\lambda = \frac{(\bar{\mathbf{u}}, \Delta_2\bar{M}\bar{\mathbf{u}}) - (\bar{\mathbf{u}}, \Delta_1\bar{M}\bar{M}^- \Delta_1\bar{M}\bar{\mathbf{u}})}{(\bar{\mathbf{u}}, N\bar{\mathbf{u}})} = \frac{(\bar{\mathbf{u}}, T\bar{\mathbf{u}})}{(\bar{\mathbf{u}}, N\bar{\mathbf{u}})} \quad (33)$$

ただし, 次のように置いた.

$$T = \Delta_2\bar{M} - \Delta_1\bar{M}\bar{M}^- \Delta_1\bar{M} \quad (34)$$

次に 2 次の誤差 $\Delta_2\mathbf{u}$ を考える. $\bar{\mathbf{u}}$ は伸縮しないから, 誤差として関心があるのは $\bar{\mathbf{u}}$ に直交する成分である. そこで $\Delta_2\mathbf{u}$ の $\bar{\mathbf{u}}$ に直交する成分を次のように置く.

$$\Delta_2\mathbf{u}^\perp = P_{\bar{\mathbf{u}}} \Delta_2\mathbf{u} (= \bar{M}^- \bar{M} \Delta_2\mathbf{u}) \quad (35)$$

式 (31) の両辺に左から \bar{M}^- を掛けて式 (32) を代入すると次の結果を得る.

$$\begin{aligned} \Delta_2\mathbf{u}^\perp &= \Delta_2\lambda \bar{M}^- N\bar{\mathbf{u}} + \bar{M}^- \Delta_1\bar{M}\bar{M}^- \Delta_1\bar{M}\bar{\mathbf{u}} - \bar{M}^- \Delta_2\bar{M}\bar{\mathbf{u}} \\ &= \frac{(\bar{\mathbf{u}}, T\bar{\mathbf{u}})}{(\bar{\mathbf{u}}, N\bar{\mathbf{u}})} \bar{M}^- N\bar{\mathbf{u}} - \bar{M}^- T\bar{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (36)$$

6. 解の共分散と偏差

式 (32) より, 解 \mathbf{u} の変動を評価する共分散行列の主要項が次のようになる.

$$\begin{aligned} V[\mathbf{u}] &= E[\Delta_1\mathbf{u}\Delta_1\mathbf{u}^\top] = \bar{M}^- E[(\Delta_1\bar{M}\mathbf{u})(\Delta_1\bar{M}\mathbf{u})^\top] \bar{M}^- \\ &= \frac{1}{N^2} \bar{M}^- E \left[\sum_{\alpha=1}^N (\Delta\xi_\alpha, \mathbf{u}) \bar{\xi}_\alpha \sum_{\beta=1}^N (\Delta\xi_\beta, \mathbf{u}) \bar{\xi}_\beta^\top \right] \bar{M}^- \\ &= \frac{1}{N^2} \bar{M}^- \sum_{\alpha, \beta=1}^N (\mathbf{u}, E[\Delta\xi_\alpha \Delta\xi_\beta^\top] \mathbf{u}) \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top \bar{M}^- \\ &= \frac{\sigma^2}{N^2} \bar{M}^- \left(\sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{u}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}) \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top \right) \bar{M}^- = \frac{\sigma^2}{N} \bar{M}^- \bar{M}' \bar{M}^-, \end{aligned} \quad (37)$$

ただし \bar{M}' は次のように定義する.

$$\bar{M}' = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N (\bar{\mathbf{u}}, V_0[\xi_\alpha] \mathbf{u}) \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top \quad (38)$$

式 (37) の導出では ξ_α は各 α ごとに独立であり, $E[\Delta_1\xi_\alpha \Delta_1\xi_\beta^\top] = \delta_{\alpha\beta} \sigma^2 V_0[\xi_\alpha]$ ($\delta_{\alpha\beta}$ はクロネッカのデルタ) となることを用いた. 重要なことは, 式 (37) の共分散行列が正規化の重み N に依存しないことである. したがって, N を調節して $V[\mathbf{u}]$ を減らすことはできない. 特に標準最小二乗法と Taubin 法は $V[\mathbf{u}]$ に関しては同一である. したがって, その精度の差はもっぱら偏差項に起因すると考えられる.

そこで解の偏差に着目する. 誤差の 1 次の項の期待値は $E[\Delta_1\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ であるから, 式 (33) の 2 次の誤差項の偏差 $E[\Delta_2\mathbf{u}^\perp]$ を評価する. そのために, 式 (34) の T の期待値を計算する. 式 (26) より $E[\Delta_2\bar{M}]$ は次のようになる.

$$\begin{aligned} E[\Delta_2\bar{M}] &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left(\bar{\xi}_\alpha E[\Delta_2\xi_\alpha]^\top + E[\Delta_1\xi_\alpha \Delta_1\xi_\alpha^\top] + E[\Delta_2\xi_\alpha] \bar{\xi}_\alpha^\top \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left(\bar{\xi}_\alpha e_{13}^\top + V_0[\xi_\alpha] + e_{13} \bar{\xi}_\alpha^\top \right) = \sigma^2 \left(N_{\text{TB}} + 2S[\bar{\xi}_c e_{13}^\top] \right) \end{aligned} \quad (39)$$

ただし, 式 (20) の定義と式 (22) を用いた. また $\bar{\xi}_c, e_{13}$ は次のように定義する.

$$\bar{\xi}_c = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \bar{\xi}_\alpha, \quad e_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top \quad (40)$$

記号 $S[\cdot]$ は対称化作用素である ($S[A] = (A + A^\top)/2$). 一方, $E[\Delta_1\bar{M}\bar{M}^- \Delta_1\bar{M}]$ は次のようになる (付録).

$$\begin{aligned} E[\Delta_1\bar{M}\bar{M}^- \Delta_1\bar{M}] &= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \left(\text{tr}[\bar{M}^- V_0[\xi_\alpha]] \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top + (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) V_0[\xi_\alpha] + 2S[V_0[\xi_\alpha] \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top] \right) \end{aligned} \quad (41)$$

ただし $\text{tr}[\cdot]$ は行列のトレースである. 式 (39), (41) より式 (34) の T の期待値が次のように書ける.

$$\begin{aligned} E[T] &= \sigma^2 \left(N_{\text{TB}} + 2S[\bar{\xi}_c e_{13}^\top] - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \left(\text{tr}[\bar{M}^- V_0[\xi_\alpha]] \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top + (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) V_0[\xi_\alpha] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2S[V_0[\xi_\alpha] \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top] \right) \right) \end{aligned} \quad (42)$$

これを用いると、式 (36) の $\Delta_2 u^\perp$ の期待値は次のようになる。

$$E[\Delta_2 u^\perp] = \bar{M}^- \left(\frac{(\bar{u}, E[\mathbf{T}]\bar{u})}{(\bar{u}, \mathbf{N}\bar{u})} \mathbf{N}\bar{u} - E[\mathbf{T}]\bar{u} \right) \quad (43)$$

7. 標準最小二乗法の偏差

式 (42) より、 $(\bar{\xi}_c, \bar{u}) = \mathbf{0}$ 、 $(\bar{\xi}_\alpha, \bar{u}) = \mathbf{0}$ に注意すると $E[\mathbf{T}]\bar{u}$ は次のようになる。

$$E[\mathbf{T}]\bar{u} = \sigma^2 \left(\mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u} + (A+C)\bar{\xi}_c - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \left((\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) V_0[\xi_\alpha] \bar{u} + (\bar{u}, V_0[\xi_\alpha] \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\alpha \right) \right) \quad (44)$$

標準最小二乗法は $N = \mathbf{I}$ と選ぶものであるから、2 次の偏差 $E[\Delta_2 u^\perp]$ は次のようになる。

$$E[\Delta_2 u^\perp] = \bar{M}^- \left((\bar{u}, E[\mathbf{T}]\bar{u}) \bar{u} - E[\mathbf{T}]\bar{u} \right) = -\bar{M}^- (\mathbf{I} - \bar{u}\bar{u}^\top) E[\mathbf{T}]\bar{u} = -\bar{M}^- E[\mathbf{T}]\bar{u} \quad (45)$$

ただし、次の関係を用いた。

$$\bar{M}^- (\mathbf{I} - \bar{u}\bar{u}^\top) = \bar{M}^- \mathbf{P}_{\bar{u}} = \bar{M}^- \bar{M} \bar{M}^- = \bar{M}^- \quad (46)$$

ゆえに式 (44)、(45) より標準最小二乗法の 2 次の偏差は次のように書ける。

$$E[\Delta_2 u^\perp] = -\sigma^2 \bar{M}^- \left(\mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u} + (A+C)\bar{\xi}_c - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \left((\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) V_0[\xi_\alpha] \bar{u} + (\bar{u}, V_0[\xi_\alpha] \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\alpha \right) \right) \quad (47)$$

8. Taubin 法の偏差

式 (44) より、 $(\bar{\xi}_c, \bar{u}) = \mathbf{0}$ 、 $(\bar{\xi}_\alpha, \bar{u}) = \mathbf{0}$ に注意すると $(\bar{u}, E[\mathbf{T}]\bar{u})$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\bar{u}, E[\mathbf{T}]\bar{u}) &= \sigma^2 \left((\bar{u}, \mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u}) - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) (\bar{u}, V_0[\xi_\alpha] \bar{u}) \right) \\ &= \sigma^2 \left((\bar{u}, \mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u}) - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \text{tr}[\bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top] (\bar{u}, V_0[\xi_\alpha] \bar{u}) \right) \\ &= \sigma^2 \left((\bar{u}, \mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u}) - \frac{1}{N^2} \text{tr}[\bar{M}^- \sum_{\alpha=1}^N (\bar{u}, V_0[\xi_\alpha] \bar{u}) \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top] \right) \\ &= \sigma^2 (\bar{u}, \mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u}) - \frac{\sigma^2}{N} \text{tr}[\bar{M}^- \bar{M}'] \end{aligned} \quad (48)$$

ただし、式 (38) を用いた。Taubin 法は $N = N_{\text{TB}}$ と選ぶものであるから、上式より Taubin 法の 2 次の偏差は次のように書ける。

$$E[\Delta_2 u^\perp] = -\sigma^2 \bar{M}^- \left(q \mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u} + (A+C)\bar{\xi}_c - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \left((\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) V_0[\xi_\alpha] \bar{u} + (\bar{u}, V_0[\xi_\alpha] \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\alpha \right) \right) \quad (49)$$

ただし次のように置いた。

$$q = \frac{1}{N} \frac{\text{tr}[\bar{M}^- \bar{M}']}{(\bar{u}, \mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u})} \quad (50)$$

式 (49) と式 (47) を比較すると、違いは式 (47) 中の $\mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u}$ が $q \mathbf{N}_{\text{TB}}\bar{u}$ になっていることである。式 (50) より N が大きいとき $q < 1$ である。このことが Taubin 法が高精度であることの一つの要因と考えられる。

9. 超精度最小二乗法

本論文の提案は正規化の重み N を次のように選ぶことである。

$$N = N_{\text{TB}} + 2S[\bar{\xi}_c e_{13}] - \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \left(\text{tr}[\bar{M}^- V_0[\xi_\alpha] \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top] + (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha) V_0[\xi_\alpha] + 2S[V_0[\xi_\alpha] \bar{M}^- \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top] \right) \quad (51)$$

こうすると式 (42) より $E[\mathbf{T}] = \sigma^2 N$ であり、式 (43) は次のようになる。

$$E[\Delta_2 u^\perp] = \sigma^2 \bar{M}^- \left(\frac{(\bar{u}, \mathbf{N}\bar{u})}{(\bar{u}, \mathbf{N}\bar{u})} \mathbf{N} - N \right) \bar{u} = \mathbf{0} \quad (52)$$

式 (51) の重み N は真の値 ξ_α 、 \bar{M} が含んでいるが、それらの定義式の中の真の位置 $(\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$ をデータ (x_α, y_α) で代用する。注目すべきことは、式 (28) 中の重み N を $\bar{N} + \Delta_1 N + \Delta_2 N + \dots$ に置き換えても、式 (28) の右辺そのものが $O(\sigma^2)$ なので、以下の解析には $\Delta_1 N$ 、 $\Delta_2 N$ が現れないことである。たとえ式 (43) の括弧中に誤差が生じて、誤差の奇数次の項の期待値は 0 であるから、全体で $E[\Delta_2 u^\perp]$ は $O(\sigma^4)$ であり、2 次の偏差は厳密に 0 になる。

10. 実験

図 1(a) に示す楕円の第 1 象限に等間隔に 31 点をとる。楕円は長軸半径、短軸半径がそれぞれ 100 画素、50 画素と想定している。各点の x, y 座標に平均 0、標準偏差 σ 画素の正規分布に従う乱数ノイズを独立に加え、これに楕円を標準最小二乗法、Taubin 法、提案手



図 1 (a) 楕円上の 31 点 . (b) $\sigma = 0.5$ の場合の当てはめの一例 . 1. 標準最小二乗法 . 2. Taubin 法 . 3. 提案手法 . 4. 最尤推定 . 破線は真の形状 .

法, および最尤推定 (計算には Chojnacki ら⁴⁾ の FNS 法を用いた . 計算法は²⁵⁾ 参照) で当てはめた . 図 1(b) は $\sigma = 0.5$ の場合の一例である .

計算した u と真の値 \bar{u} はともに単位ベクトルであることから, その差 Δu を u の \bar{u} に垂直な成分

$$\Delta u = P_{\bar{u}} u \quad (53)$$

で測る (図 2(a)). ただし $P_{\bar{u}} (\equiv I - \bar{u}\bar{u}^T)$ は \bar{u} に垂直な空間への射影行列である . 図 2(b), (c) は横軸の各 σ に対して 10000 回の独立に試行し, 次の偏差 B と平方平均二乗誤差 D をプロットしたものである .

$$B = \left\| \frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \Delta u^{(a)} \right\|, \quad D = \sqrt{\frac{1}{10000} \sum_{a=1}^{10000} \|\Delta u^{(a)}\|^2} \quad (54)$$

ここに $u^{(a)}$ は a 回目の試行の解である . 図 2(c) 中の点線は精度の理論限界を表す KCR 下界^{12),14),15)} であり, 次のように定義される .

$$D_{\text{KCR}} = \sigma \sqrt{\text{tr} \left[\left(\sum_{\alpha=1}^N \frac{\bar{\xi}_{\alpha} \bar{\xi}_{\alpha}^T}{(\bar{u}, V_0 [\bar{\xi}_{\alpha}] \bar{u})} \right)^{-1} \right]} \quad (55)$$

なお, 式 (15) の一般固有値問題を解く通常のライブラリツールでは右辺の N が正値対称行列と仮定されている . しかし, 式 (17) の Taubin 法の重み N_{TB} は最小固有値が 0 の半正値対称行列である*1 . また提案する式 (51) の重み N も正値対称行列ではなく, 負の固有値を持つ . しかし, 式 (15) は次のように書きなおせる .

$$Nu = (1/\lambda)Mu \quad (56)$$

式 (14) の行列 M は誤差のあるデータに対しては正値対称行列であるから*2, これを解いても同じ一般固有ベクトルが求まる . しかし, N は正値とは限らないから λ は負になるこ

*1 式 (17) の右辺の行列の第 5 行と第 6 列がすべて 0 である .

*2 誤差がないときのみ最小固有値が 0 となる .

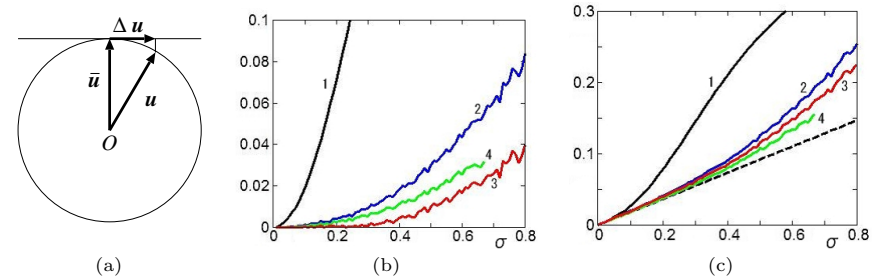


図 2 (a) 計算値 u の真の値 \bar{u} に垂直な成分 Δu . (b), (c) 図 1(a) のデータに対する当てはめの偏差 (a) と平方平均二乗誤差 (b) . 横軸は各点に加えた誤差の標準偏差 σ . 1. 標準最小二乗法 . 2. Taubin 法 . 3. 提案手法 . 4. 最尤推定 . (c) の点線は KCR 下界 .

とがある . 5 節の摂動解析は λ が 0 に近いと仮定して展開したものであるから, 絶対値最小の λ に対する u を選ぶ .

図 2(b) から分かるように, 標準最小二乗法は偏差が非常に大きい . それに比較すると Taubin 法は偏差が少なく, 提案手法はさらに偏差が少ない . 式 (38) が示すように, 標準最小二乗法も Taubin 法も提案手法も共分散行列の主要項は等しい . このため偏差の精度に与える影響が大きい . 実際, 図 2(c) から分かるように, 当てはめの精度は標準最小二乗法より Taubin 法のほうが高く, 提案方法がそれを上回っている . これは偏差を 2 次の項まで除去したためであると言える .

それに対して, 最尤推定は図 2(b) から分かるように, 提案手法より偏差が大きい . それにもかかわらず, 最尤推定の共分散行列は主要項においても式 (38) より小さいので (詳細は文献 15) 参照), 図 2(c) に示されるように提案手法よりも精度が高い . ただし, 誤差が大きいと反復が終了しないことがある (図 2(b), (c) で線が途中で途切れているのは収束しなかったことを表す) . 一方, 提案手法は標準最小二乗法や Taubin 法と同様に反復のない解析的計算であり, どんなに誤差が大きくても計算ができる .

図 3 の左は円形物体をわずかに含む画像から検出したエッジ画像であり, 右はその楕円弧をなす 155 点に標準最小二乗法, Taubin 法, 提案手法, および最尤推定で当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したものである . これからも標準最小二乗法は精度が低く, Taubin 法の精度がかなり高いことがわかる . 提案手法および最尤推定はさらに精度が高いが, このように点数が多く, 誤差が小さい場合は精度の向上はわずかである .



図 3 左：円形物体をわずかに含む画像から検出したエッジ画像。右：楕円弧をなす 155 点に当てはめた楕円を原画像上に重ねて表示したもの。内側から順に標準最小二乗法（ピンク）、Taubin 法（青）、提案手法（赤）、最尤推定（緑）。Taubin 法と提案手法の差は小さい。

11. ま と め

本論文では画像から抽出した点列に楕円を当てはめる新しい方法を提案した。従来から最も精度が高いとされるのは最尤推定であるが、解析的に解が求まらず、反復を要とする。このため適切な初期値が必要であり、また誤差が大きいと反復が収束しないこともある。本論文の提案手法は解析的方法であり、反復を必要としない。

提案手法の基本は代数的距離を最小にする最小二乗法であるが、最小二乗法は解の正規化の仕方によって解が異なるという問題がある。本論文ではこの性質を逆用して、金谷の高次誤差解析^{14),15)}を用いて正規化の重みを未知としたまま精度を高次の項まで解析し、2次の偏差項を 0 とするように重みを定めた。そして実験によって、これが従来から高精度の解析的手法であることが知られている Taubin 法よりもさらに精度が高いことを実証した。

謝辞：本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 C (No. 21500172) の助成による。

参 考 文 献

- 1) A. Albano, Representation of digitized contours in terms of conics and straight-line segments, *Comput. Graphics Image Process.*, **3**-1 (1974-3), 23–33.
- 2) 有馬利洋, 菅谷保之, エッジ点列の分割とモデル選択を用いた統合による楕円検出, 情報処理学会研究報告, 2009-CVIM-166-5 (2009-3), 33–40.
- 3) F. J. Bookstein, Fitting conic sections to scattered data, *Comput. Graphics Image Process.*, **9**-1 (1979-1), 56–71.
- 4) W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22**-11

- (2000-11), 1294–1303.
- 5) D. B. Cooper and N. Yalabik, On the computational cost of approximating and recognizing noise-perturbed straight lines and quadratic arcs in the plane, *IEEE Trans. Computers*, **25**-10 (1976-10), 1020–1032.
- 6) A. Fitzgibbon, M. Pilu and R. B. Fisher, Direct least square fitting of ellipses, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **21**-5 (1999-5), 476–480.
- 7) W. Gander, H. Golub, and R. Strebler, Least-squares fitting of circles and ellipses, *BIT*, **34**-4 (1994-12), 558–578.
- 8) R. Gnanadesikan, *Methods for Statistical Data Analysis of Multivariable Observations*, Wiley, New York, N.Y., U.S.A. (1977).
- 9) K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- 10) 金谷健一, 「空間データの数理—3次元コンピューティングに向けて—」, 朝倉書店, 1995.
- 11) 金谷健一, 当てはめ問題の最適推定と精度の理論限界, 情報処理学会論文誌, **36**-8 (1995-8), 1865–1873.
- 12) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, 1996; Dover, New York, 2005.
- 13) 金谷 健一, 最尤推定の最適性と KCR 下界, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-147-8 (2005-1), 59–64.
- 14) 金谷 健一, 幾何学的当てはめの高次誤差解析, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-156-18 (2006-11), 147–154.
- 15) K. Kanatani, Statistical optimization for geometric fitting: Theoretical accuracy analysis and high order error analysis, *Int. J. Comp. Vis.* **80**-2 (2008-11), 167–188.
- 16) Y. Leedan and P. Meer, Heteroscedastic regression in computer vision: Problems with bilinear constraint, *Int. J. Comput. Vision.*, **37**-2 (2000-6), 127–150.
- 17) 中川裕介, 金谷健一, 菅谷保之, 高ノイズレベルにおける最尤楕円当てはめ, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-10 (2008-3), 53–60.
- 18) 岡部光生, 金谷健一, 太田直哉, 楕円成長法による円形物体の自動検出, 電子情報通信学会論文誌 D-II, **J85-D-II**-12 (2002-12), 1823–1831.
- 19) K. A. Paton, Conic sections in chromosome analysis, *Patt. Recog.*, **2**-1 (1970-1), 39–40.
- 20) P. L. Rosin, A note on the least squares fitting of ellipses, *Patt. Recog. Lett.*, **14**-10 (1993-10), 799–808.
- 21) 菅谷保之, 金谷健一, 画像の三次元理解のための最適化計算 [I] - 直線の当てはめ -, 電子情報通信学会誌, **92**-3 (2009-3), 229–233.

- 22) 菅谷保之, 金谷健一, 画像の三次元理解のための最適化計算 [II] - だ円の当てはめ -, 電子情報通信学会誌, **92**-4 (2009-4), 301–306.
- 23) G. Taubin, Estimation of planar curves, surfaces, and non-planar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13**-11 (1991-11), 1115–1138.
- 24) 山田純平, 金谷健一, 超精度の楕円当てはめ, 情報処理学会研究報告, 2005-CVIM-151-15 (2005-11), 197–114.
- 25) 山田 純平, 金谷 健一, 菅谷 保之, 楕円当てはめの高精度計算法とその性能比較, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-154-36 (2006-5), 339–346.

付 録

$E[\Delta_1 M \bar{M}^{-1} \Delta_1 M]$ は次のように計算される .

$$\begin{aligned}
& E[\Delta_1 M \bar{M}^{-1} \Delta_1 M] \\
&= E\left[\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \left(\bar{\xi}_\alpha \Delta_1 \xi_\alpha^\top + \Delta_1 \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top\right) \bar{M}^{-1} \frac{1}{N} \sum_{\beta=1}^N \left(\bar{\xi}_\beta \Delta_1 \xi_\beta^\top + \Delta_1 \xi_\beta \bar{\xi}_\beta^\top\right)\right] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N E\left[\left(\bar{\xi}_\alpha \Delta_1 \xi_\alpha^\top + \Delta_1 \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top\right) \bar{M}^{-1} \left(\bar{\xi}_\beta \Delta_1 \xi_\beta^\top + \Delta_1 \xi_\beta \bar{\xi}_\beta^\top\right)\right] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N E\left[\bar{\xi}_\alpha \Delta_1 \xi_\alpha^\top \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta \Delta_1 \xi_\beta^\top + \bar{\xi}_\alpha \Delta_1 \xi_\alpha^\top \bar{M}^{-1} \Delta_1 \xi_\beta \bar{\xi}_\beta^\top + \Delta_1 \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta \Delta_1 \xi_\beta^\top\right. \\
&\quad \left.+ \Delta_1 \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top \bar{M}^{-1} \Delta_1 \xi_\beta \bar{\xi}_\beta^\top\right] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N E\left[\bar{\xi}_\alpha (\Delta_1 \xi_\alpha, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta) \Delta_1 \xi_\beta^\top + \bar{\xi}_\alpha (\Delta_1 \xi_\alpha, \bar{M}^{-1} \Delta_1 \xi_\beta) \bar{\xi}_\beta^\top\right. \\
&\quad \left.+ \Delta_1 \xi_\alpha (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta) \Delta_1 \xi_\beta^\top + \Delta_1 \xi_\alpha (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \Delta_1 \xi_\beta) \bar{\xi}_\beta^\top\right] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N E\left[\bar{\xi}_\alpha ((\bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta)^\top \Delta_1 \xi_\alpha) \Delta_1 \xi_\beta^\top + \text{tr}[\bar{M}^{-1} \Delta_1 \xi_\beta \Delta_1 \xi_\alpha^\top] \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top\right. \\
&\quad \left.+ (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta) \Delta_1 \xi_\alpha \Delta_1 \xi_\beta^\top + \Delta_1 \xi_\alpha (\Delta_1 \xi_\beta^\top \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha) \bar{\xi}_\beta^\top\right] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \left(\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top \bar{M}^{-1} E[\Delta_1 \xi_\alpha \Delta_1 \xi_\beta^\top] + \text{tr}[\bar{M}^{-1} E[\Delta_1 \xi_\beta \Delta_1 \xi_\alpha^\top]] \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top\right. \\
&\quad \left.+ (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta) E[\Delta_1 \xi_\alpha \Delta_1 \xi_\beta^\top] + E[\Delta_1 \xi_\alpha \Delta_1 \xi_\beta^\top] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N \left(\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top \bar{M}^{-1} \delta_{\alpha\beta} V_0[\xi_\alpha] + \text{tr}[\bar{M}^{-1} \delta_{\alpha\beta} V_0[\xi_\alpha]] \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top + (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\beta) \delta_{\alpha\beta} V_0[\xi_\alpha]\right. \\
&\quad \left.+ \delta_{\alpha\beta} V_0[\xi_\alpha] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\beta^\top \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \left(\bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top \bar{M}^{-1} V_0[\xi_\alpha] + \text{tr}[\bar{M}^{-1} V_0[\xi_\alpha]] \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top + (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha) V_0[\xi_\alpha]\right. \\
&\quad \left.+ V_0[\xi_\alpha] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{\alpha=1}^N \left(\text{tr}[\bar{M}^{-1} V_0[\xi_\alpha]] \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top + (\bar{\xi}_\alpha, \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha) V_0[\xi_\alpha] + 2S[V_0[\xi_\alpha] \bar{M}^{-1} \bar{\xi}_\alpha \bar{\xi}_\alpha^\top] \right) \quad (57)
\end{aligned}$$