

不均一な誤差分布をもつ空間データからの 3次元相似変換の最適計算

原 裕 貴^{†1} 新 妻 弘 崇^{†1} 金 谷 健 一^{†1}

不均一な誤差分布をもつ3次元データ間の相似変換(並進, スケール変化, 回転)を最適に計算する手法を示す. 前報では3次元回転を四元数表現を用いて Chojnacki らの FNS 法によって最適に推定する手法を示したが, 本論文では回転変化のリー代数表現を用いて, 並進とスケール変化を含んだレーベンバーグ・マーカート法の手順を導出する. そして, ステレオ視によって復元した3次元データ, および GPS による地測データを用いて提案手法の精度を評価する. 結論として, 3次元データに必然的な誤差分布の不均一性を考慮しなければ正確な推定ができないこと, および前報の回転の最適推定によって高精度の解が得られるが, 本論文の並進とスケール変化を含んだ最適化によりさらに精度が向上することを示す.

Optimal Computation of 3-D Similarity from Space Data with Inhomogeneous Noise Distributions

HIROTKI HARA,^{†1} HIROTAKA NIITSUMA^{†1}
and KENICHI KANATANI^{†1}

We optimally estimate the similarity, i.e., the translation, the scale change, and the rotation, of 3-D data with inhomogeneous error distributions. In our previous work, we derived an optimal scheme for estimating rotation, using the FNS of Chojnacki et al. in terms of the quaternion representation of 3-D rotation. In this paper, we use the Lie algebra representation of the 3-D rotational change to derive the Levenberg-Marquardt procedure for simultaneous optimization of the translation, the scale change, and the rotation. We evaluate the performance of our method using synthetic stereo vision data and real GPS sensing geodetic data. We conclude that we cannot obtain high accuracy solution without considering the inevitable inhomogeneity and anisotropy of the error distribution of 3-D data and that although our previous optimal rotation estimation scheme can significantly improve the accuracy, the proposed simultaneous optimization can further increase the accuracy.

^{†1} 岡山大学大学院自然科学研究科
Department of Computer Science, Okayama University, Japan

1. ま え が き

誤差のある3次元データの相似変換(並進, 回転, スケール変化)を計算することはロボット走行や3次元物体形状計算などのコンピュータビジョン応用だけでなく, 地球科学^{(1),(5),(6),(19)}でも重要なテーマである. このとき, 並進は重心の移動から, スケール変化は同一対象物の大きさの変化から比較的容易に計算できるので, 回転の計算が重要な課題であり, 1980年代から盛んに研究された^{(2),(8),(9),(13),(23)}. しかし, ほとんどは各点に一樣等方誤差を仮定するものであった. 一方, 3次元データはステレオ視やレンジファインダーなどの何らかのセンサーを用いて計測するので, 計測値の誤差はセンサーのタイプや位置や向きに依存して, 必然的に不均一な誤差分布を持つ. その場合の最尤推定の意味での最適な回転の計算法は Ohta ら⁽²⁰⁾ によって定式化されたが, 彼らは解法にくりこみ法を用いたので, 得られる解は最尤推定解そのものではない. そこで前報⁽⁷⁾ では Ohta ら⁽²⁰⁾ と同様に3次元回転の四元数表現による定式化を行い, Chojnacki ら⁽⁴⁾ の FNS 法を用いて最尤推定解そのものを計算する方法を提案した. そしてステレオ視から得られる3次元データに対して実験を行い, 一樣等方誤差を仮定する最適解法は精度が低いこと, それに比較すると Ohta ら⁽²⁰⁾ のくりこみ法は精度が高いが, FNS 法のほうがさらに高精度であることを示した.

本論文では並進とスケール変化をも含めた相似変換の最尤推定を定式化し, 並進とスケール変化を別に計算する場合との精度の比較を行う. 本論文では回転の表現として前報⁽⁷⁾ の四元数表現ではなく, リー代数による表現⁽¹¹⁾を用いてレーベンバーグ・マーカート法を構成する. 回転のリー代数による表現は物理学ではよく知られ, コンピュータビジョンにおいても回転の変化を表す方法としていろいろな形で用いられている^{(10)-(12),(21),(22)}. この表現は SLAM (Simultaneous Localization and Mapping) と呼ばれるロボット走行においても用いられ, ステレオ視による3次元計測の共分散行列をカルマンフィルターによって更新しながらロボットの移動(並進と回転)を追跡する過程で用いられている^{(3),(18)}. しかし, 回転を含む最適計算の数値計算に用いられることはまれである.

本論文ではまず前報⁽⁷⁾と同様にステレオ視によって復元した3次元データを用いて実験を行い, 並進とスケール変化を含めて最適化するほうが精度が向上することを示す. 次に実際の地形データを用いて地盤の変形を計算し, 本方法による精度向上の程度を確認する.

2. 相似変換の最尤推定

変換前の位置 r_α と変換後の位置 r'_α が測定されているとする ($\alpha = 1, \dots, N$). 測定は誤差を含むとし, r_α, r'_α の共分散行列をそれぞれ $\epsilon^2 V_0[r_\alpha], \epsilon^2 V_0[r'_\alpha]$ とする. ϵ は誤差の絶

対的な大きさを表す定数(「ノイズレベル」)であり, $V_0[r_\alpha]$, $V_0[r'_\alpha]$ は誤差の分布を表す行列(「正規化共分散行列」)である. 誤差が生じる方向に偏りが無い(「一様等分散」)なら $V_0[r_\alpha] = V_0[r'_\alpha] = I$ (単位行列)である. 相似変換の最尤推定は, 変換前後の誤差のない位置を \bar{r}_α , \bar{r}'_α とするとき, マハラノビス距離(1/2 は便宜的な係数)

$$J = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r_\alpha - \bar{r}_\alpha, V_0[r_\alpha]^{-1} (r_\alpha - \bar{r}_\alpha)) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - \bar{r}'_\alpha, V_0[r'_\alpha]^{-1} (r'_\alpha - \bar{r}'_\alpha)) \quad (1)$$

を, \bar{r}_α , \bar{r}'_α が相似変換によって結ばれるという制約条件

$$\bar{r}'_\alpha = sR\bar{r}_\alpha + t, \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (2)$$

のもとで最小にすることである. R , t , s がそれぞれ回転, 並進, スケール変化を表す. 以下, ベクトル a , b の内積を (a, b) と書く. 式(2)に対するラグランジュ乗数 λ_α を導入すれば, 式(1)を最小にする \bar{r}_α , \bar{r}'_α は

$$\begin{aligned} \tilde{J} = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r_\alpha - \bar{r}_\alpha, V_0[r_\alpha]^{-1} (r_\alpha - \bar{r}_\alpha)) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - \bar{r}'_\alpha, V_0[r'_\alpha]^{-1} (r'_\alpha - \bar{r}'_\alpha)) \\ & - \sum_{\alpha=1}^N (\lambda_\alpha, \bar{r}'_\alpha - sR\bar{r}_\alpha - t) \end{aligned} \quad (3)$$

の \bar{r}_α , \bar{r}'_α に関する微分を0と置くことによって得られる¹⁶⁾. 関係 $(\lambda_\alpha, R\bar{r}'_\alpha) = (R^\top \lambda_\alpha, \bar{r}'_\alpha)$ に注意すると, 式(3)の微分は次のようになる.

$$\nabla_{\bar{r}_\alpha} \tilde{J} = -V_0[r_\alpha]^{-1} (r_\alpha - \bar{r}_\alpha) + sR^\top \lambda_\alpha, \quad \nabla_{\bar{r}'_\alpha} \tilde{J} = -V_0[r'_\alpha]^{-1} (r'_\alpha - \bar{r}'_\alpha) - \lambda_\alpha \quad (4)$$

各式を0と置いて, \bar{r}_α , \bar{r}'_α について解くと次のようになる.

$$\bar{r}_\alpha = r_\alpha - sV_0[r_\alpha]R^\top \lambda_\alpha, \quad \bar{r}'_\alpha = r'_\alpha + V_0[r'_\alpha] \lambda_\alpha \quad (5)$$

これを式(2)の制約条件に代入すると次のようになる.

$$r'_\alpha + V_0[r'_\alpha] \lambda_\alpha = sR(r_\alpha - sV_0[r_\alpha]R^\top \lambda_\alpha) + t \quad (6)$$

これから λ_α が次のように求まる.

$$\lambda_\alpha = -W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t) \quad (7)$$

ただし, 行列 W_α を次のように定義した.

$$W_\alpha = (s^2 R V_0[r_\alpha] R^\top + V_0[r'_\alpha])^{-1} \quad (8)$$

式(7)を式(5)に代入したものを式(1)に代入すると, J は次のように書ける.

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (V_0[r_\alpha] R^\top W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t), V_0[r_\alpha]^{-1} V_0[r_\alpha] R^\top W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \\ & + \frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N (V_0[r'_\alpha] W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t), V_0[r'_\alpha]^{-1} V_0[r'_\alpha] W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \\ = & \frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - sRr_\alpha - t, W_\alpha R V_0[r_\alpha] V_0[r_\alpha]^{-1} V_0[r_\alpha] R^\top W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - sRr_\alpha - t, W_\alpha V_0[r'_\alpha] V_0[r'_\alpha]^{-1} V_0[r'_\alpha] W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - sRr_\alpha - t, W_\alpha (s^2 R V_0[r_\alpha] R^\top + V_0[r'_\alpha]) W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - sRr_\alpha - t, W_\alpha W_\alpha^{-1} W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \\ = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - sRr_\alpha - t, W_\alpha (r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \end{aligned} \quad (9)$$

これを R , t , s に関して最小化すればよい.

3. 勾配の計算

3.1 回転に関する1階微分

回転行列 R は9個の要素を持つが, 制約条件 $RR^\top = I$ より自由度は3である. したがって, 回転の変化は3パラメータで指定できる. 重要なことは回転 R 自体を3パラメータで表現する必要はないということである. なぜなら, 回転 R の変化率 (= 微分) が3パラメータで表現できればよいからである. 制約 $RR^\top = I$ より R の微小変化 ΔR は第1近似において $\Delta R R^\top + R \Delta R^\top = O$ を満たす. これは $(\Delta R R^\top)^\top = -\Delta R R^\top$, すなわち $\Delta R R^\top$ が反対称行列であることを表す. ゆえにある $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ が存在して

$$\Delta R R^\top = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書ける. このような第1近似の微小回転は数学では「無限小回転(生成子)」と呼ばれ, その全体は3パラメータ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ の張る線形空間であり, 3次元回転群 $SO(3)$ の「リ-

代数^{*1}so(3)」と呼ばれる¹¹⁾。ベクトル a と行列 T の積 $a \times T$ を a と T の各列のベクトル積を列とする行列と定義すると¹⁴⁾、式 (10) の右辺はベクトル $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top$ と単位行列 I の積 $\omega \times I$ である。恒等式 $(a \times I)b = a \times b$ 、 $(a \times I)T = a \times T$ が成り立つことに注意。式 (10) に右から R を掛けると次のようになる。

$$\Delta R = \omega \times R \quad (11)$$

左辺を微小時間 Δt で割って $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると回転の瞬間変化率 dR/dt となる。このとき ω は「角速度」と呼ばれる。式 (11) の表現は物理学で古くから知られ、「リー代数による方法」とも呼ばれる¹¹⁾。コンピュータビジョンやロボティクスの分野でもこの表現法自体はよく知られ、以前から回転物体の追跡などに用いられているが^{3),18)}、回転を含む関数の数値的最適化に使われることはほとんどなかった。数値的最適化ではほとんどの研究者はオイラー角、各座標軸周りの回転角、四元数表現などを用いて回転をパラメータ化し、そのパラメータを微分するという方法を採用している。しかし、式 (11) を用いれば式 (9) の第 1 変分 δJ が次のように簡潔に表せる。

$$\begin{aligned} \delta J &= s \sum_{\alpha=1}^N (-\delta R r_\alpha, W_\alpha(r'_\alpha - s R r_\alpha - t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - s R r_\alpha - t, \delta W_\alpha(r'_\alpha - s R r_\alpha - t)) \\ &= s \sum_{\alpha=1}^N (-\omega \times R r_\alpha, W_\alpha(r'_\alpha - s R r_\alpha - t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - s R r_\alpha - t, \delta W_\alpha(r'_\alpha - s R r_\alpha - t)) \end{aligned} \quad (12)$$

スカラー三重積 $|a, b, c| = (a, b \times c) = \dots$ ¹⁵⁾ を用いると、第 1 項は次のようになる。

$$-s \sum_{\alpha=1}^N |\omega, R, W_\alpha(r'_\alpha - s R r_\alpha - t)| = -s \sum_{\alpha=1}^N (\omega, R r_\alpha \times W_\alpha(r'_\alpha - s R r_\alpha - t)) \quad (13)$$

式 (12) の第 2 項の δW_α を考えるには式 (8) の W_α の定義より得られる

$$(s^2 R V_0[r_\alpha] R^\top + V_0[r'_\alpha]) W_\alpha = I \quad (14)$$

の変化を考えればよい。式 (14) の左辺の微分 (= 変化量の第 1 近似) は次のようになる。

$$\begin{aligned} &(s^2 \delta R V_0[r_\alpha] R^\top + s^2 R V_0[r_\alpha] \delta R^\top) W_\alpha + (s^2 R V_0[r_\alpha] R^\top + V_0[r'_\alpha]) \delta W_\alpha \\ &= (s^2 \omega \times R V_0[r_\alpha] R^\top + s^2 R V_0[r_\alpha] (\omega \times R)^\top) W_\alpha + (s^2 R V_0[r_\alpha] R^\top + V_0[r'_\alpha]) \delta W_\alpha \\ &= (s^2 \omega \times R V_0[r_\alpha] R^\top + s^2 R V_0[r_\alpha] R^\top \times \omega) W_\alpha + (s^2 R V_0[r_\alpha] R^\top + V_0[r'_\alpha]) \delta W_\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

ただし以下、ベクトル a と行列 T に対して $T(a \times I)^\top$ を $T \times a$ と表記する。式 (14) の右辺は定数 (単位行列) であるから、上式は O に等しい。ゆえに δW_α が次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta W_\alpha &= -s^2 (s^2 R V_0[r_\alpha] R^\top + V_0[r'_\alpha])^{-1} (\omega \times R V_0[r_\alpha] R^\top + R V_0[r_\alpha] R^\top \times \omega) W_\alpha \\ &= -s^2 W_\alpha (\omega \times R V_0[r_\alpha] R^\top + R V_0[r_\alpha] R^\top \times \omega) W_\alpha \end{aligned} \quad (16)$$

これを式 (12) に代入して、スカラー三重積¹⁵⁾ を用いると、式 (12) の右辺第 2 項が次のようになる。

$$\begin{aligned} &-\frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - s R r_\alpha - t, W_\alpha (\omega \times R V_0[r_\alpha] R^\top + R V_0[r_\alpha] R^\top \times \omega) W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t)) \\ &= -\frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N (W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t), \omega \times R V_0[r_\alpha] R^\top W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t)) \\ &\quad - \frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N (W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t), R V_0[r_\alpha] R^\top (\omega \times I)^\top W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t)) \\ &= -\frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N |W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t), \omega, R V_0[r_\alpha] R^\top W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t)| \\ &\quad + \frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N (r'_\alpha - s R r_\alpha - t, W_\alpha R V_0[r_\alpha] R^\top (\omega \times W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t))) \\ &= -\frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N |W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t), \omega, R V_0[r_\alpha] R^\top W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t)| \\ &\quad + \frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N (R V_0[r_\alpha] R^\top W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t), \omega \times W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t)) \\ &= -\frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N |W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t), \omega, R V_0[r_\alpha] R^\top W_\alpha (r'_\alpha - s R r_\alpha - t)| \end{aligned}$$

*1 数学的には「交換子積」という演算を加えた代数系を「リー代数」と呼ぶが¹¹⁾、ここでは交換子積は考慮する必要がない。

$$\begin{aligned}
& + \frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N |RV_0[r_\alpha]R^\top W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t), \omega, W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)| \\
= & \frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N |\omega, W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t), RV_0[r_\alpha]R^\top W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)| \\
& + \frac{s^2}{2} \sum_{\alpha=1}^N |\omega, W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t), RV_0[r_\alpha]R^\top W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)| \\
= & s^2 \sum_{\alpha=1}^N (\omega, (W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \times RV_0[r_\alpha]R^\top W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \quad (17)
\end{aligned}$$

ゆえに、式 (13) と合わせて式 (12) の δJ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta J = & s \sum_{\alpha=1}^N (\omega, (W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \times Rr_\alpha) \\
& + s^2 \sum_{\alpha=1}^N (\omega, (W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \times RV_0[r_\alpha]R^\top W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \\
= & s \sum_{\alpha=1}^N (\omega, (W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \times (Rr_\alpha + sRV_0[r_\alpha]R^\top W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t))) \\
= & (\omega, s \sum_{\alpha=1}^N (W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \times R(r_\alpha + sV_0[r_\alpha]R^\top W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t))) \quad (18)
\end{aligned}$$

したがって J の回転に関する 1 階微分は次のようになる。

$$\nabla_\omega J = s \sum_{\alpha=1}^N (W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \times R(r_\alpha + sV_0[r_\alpha]R^\top W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \quad (19)$$

3.2 並進とスケール変化に関する 1 階微分

式 (9) を t, s に関して微分すると次のようになる。

$$\nabla_t J = - \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t), \quad \frac{\partial J}{\partial s} = - \sum_{\alpha=1}^N (Rr_\alpha, W_\alpha(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)) \quad (20)$$

4. ヘッセ行列の計算

4.1 回転に関する 2 階微分

式 (12) をさらに微分をして、ガウス・ニュートン近似¹⁶⁾を行うと、すなわち $r'_\alpha - Rr_\alpha$ を含む項を微小とみなして省略すると、2 階微分が次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta^2 J = & \sum_{\alpha=1}^N (-s\delta Rr_\alpha, W_\alpha(-s\delta Rr_\alpha)) = s^2 \sum_{\alpha=1}^N (\omega \times Rr_\alpha, W_\alpha(\omega \times Rr_\alpha)) \\
= & s^2 \sum_{\alpha=1}^N -(\omega \times Rr_\alpha, W_\alpha((Rr_\alpha) \times \omega)) = s^2 \sum_{\alpha=1}^N -(\omega \times Rr_\alpha, W_\alpha((Rr_\alpha) \times I)\omega) \\
= & s^2 \sum_{\alpha=1}^N (\omega \times Rr_\alpha, (W_\alpha \times (Rr_\alpha))\omega) = s^2 \sum_{\alpha=1}^N |\omega, Rr_\alpha, (W_\alpha \times (Rr_\alpha))\omega| \\
= & (\omega, s^2 \sum_{\alpha=1}^N ((Rr_\alpha) \times W_\alpha \times (Rr_\alpha))\omega) \quad (21)
\end{aligned}$$

ゆえに J の 2 階微分 (ヘッセ行列) が次のようになる。

$$\nabla_\omega^2 J = s^2 \sum_{\alpha=1}^N (Rr_\alpha) \times W_\alpha \times (Rr_\alpha) \quad (22)$$

4.2 並進とスケール変化の 2 階微分

式 (20) より t, s に関する 2 階微分は次のようになる。

$$\nabla_t^2 J = \sum_{\alpha=1}^N W_\alpha, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial s^2} = \sum_{\alpha=1}^N (Rr_\alpha, W_\alpha Rr_\alpha) \quad (23)$$

4.3 混合 2 階微分

式 (20) は t_i に関する微分が次のようになることを示している。

$$\frac{\partial J}{\partial t_i} = - \sum_{\alpha=1}^N \sum_{j=1}^3 W_{\alpha ij}(r'_\alpha - sRr_\alpha - t)_i = - \sum_{\alpha=1}^N (w_{\alpha i}, r'_\alpha - sRr_\alpha - t) \quad (24)$$

ただし、 $W_{\alpha ij}$ は W_α の (ij) 要素であり、 $w_{\alpha i}$ は W_α の第 i 列である (第 i 行とみてもよいが、 W_α は対称行列なので行と列とは同じである)。ガウス・ニュートン近似を用いると、式 (24) の R に関する変化量は次のようになる。

$$\begin{aligned}\delta \frac{\partial J}{\partial t_i} &= s \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{w}_{\alpha i}, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{R}r_{\alpha})) = s \sum_{\alpha=1}^N |\mathbf{w}_{\alpha i}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}r_{\alpha}| = s \sum_{\alpha=1}^N |\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}r_{\alpha}, \mathbf{w}_{\alpha i}| \\ &= s \sum_{\alpha=1}^N (\boldsymbol{\omega}, (\mathbf{R}r_{\alpha}) \times \mathbf{w}_{\alpha i})\end{aligned}\quad (25)$$

これは次のことを意味している．

$$\nabla_{\boldsymbol{\omega}} \frac{\partial J}{\partial t_i} = s \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{R}r_{\alpha}) \times \mathbf{w}_{\alpha i} \quad (26)$$

これは次のように書ける．

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{\omega}t} J &= \left(\nabla_{\boldsymbol{\omega}} \frac{\partial J}{\partial t_1} \quad \nabla_{\boldsymbol{\omega}} \frac{\partial J}{\partial t_2} \quad \nabla_{\boldsymbol{\omega}} \frac{\partial J}{\partial t_3} \right) \\ &= s \sum_{\alpha=1}^N \left((\mathbf{R}r_{\alpha}) \times \mathbf{w}_{\alpha 1} \quad (\mathbf{R}r_{\alpha}) \times \mathbf{w}_{\alpha 2} \quad (\mathbf{R}r_{\alpha}) \times \mathbf{w}_{\alpha 3} \right) = s \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{R}r_{\alpha}) \times \mathbf{W}_{\alpha}\end{aligned}\quad (27)$$

式 (19) を s で微分してガウス・ニュートン近似を用いると次のようになる．

$$\frac{\partial \nabla_{\boldsymbol{\omega}} J}{\partial s} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} \frac{\partial J}{\partial s} = -s \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{W}_{\alpha} \mathbf{R}r_{\alpha}) \times \mathbf{R}r_{\alpha} = s \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{R}r_{\alpha}) \times \mathbf{W}_{\alpha} \mathbf{R}r_{\alpha} \quad (28)$$

最後に式 (20) を s で微分すると次のようになる．

$$\frac{\partial \nabla_t J}{\partial s} = \nabla_t \frac{\partial J}{\partial s} = s \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{W}_{\alpha} \mathbf{R}r_{\alpha} \quad (29)$$

4.4 ヘッセ行列

以上をまとめると、 J の \mathbf{R}, t, s に関するヘッセ行列 \mathbf{H} は次のようになる．

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\omega}}^2 J & \nabla_{\boldsymbol{\omega}t} J & \nabla_{\boldsymbol{\omega}} \partial J / \partial s \\ (\nabla_{\boldsymbol{\omega}t} J)^{\top} & \nabla_t^2 J & \nabla_t \partial J / \partial s \\ (\nabla_{\boldsymbol{\omega}} \partial J / \partial s)^{\top} & (\nabla_t \partial J / \partial s)^{\top} & \partial^2 J / \partial s^2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

5. レーベンバーグ・マーカート法

以上より、式 (9) を最小化するレーベンバーグ・マーカート法の手順は次のようになる¹⁶⁾．

- (1) \mathbf{R}, t, s の初期値を与え、それに対する式 (9) の値 J を計算する．そして、 $C = 0.0001$

と置く．

- (2) 式 (19), (20) の勾配 $\nabla_{\boldsymbol{\omega}} J, \nabla_t J, \partial J / \partial s$ 、および式 (30) のヘッセ行列 $\nabla_{\boldsymbol{\omega}}^2 J$ を計算する．

- (3) 次の連立 1 次方程式を解いて $\boldsymbol{\omega}, \Delta t, \Delta s$ を計算する．

$$\left(\mathbf{H} + C\mathcal{D}[\mathbf{H}] \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \Delta t \\ \Delta s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\omega}} J \\ \nabla_t J \\ \partial J / \partial s \end{pmatrix} \quad (31)$$

ただし、 $\mathcal{D}[\cdot]$ は対角要素のみを取り出して作る対角行列を表す（単位行列 \mathbf{I} を用いてもよい¹⁶⁾）．

- (4) 次の回転行列 $\tilde{\mathbf{R}}$ 、並進ベクトル \tilde{t} 、スケール変化 \tilde{s} を計算する．

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathcal{R}[\boldsymbol{\omega}], \quad \tilde{t} = t + \Delta t, \quad \tilde{s} = s + \Delta s \quad (32)$$

ただし、 $\mathcal{R}[\boldsymbol{\omega}]$ は方向 $\mathcal{N}[\boldsymbol{\omega}]$ ($\boldsymbol{\omega}$ の単位ベクトルへの正規化) の回転軸の周りの角度 $\|\boldsymbol{\omega}\|$ の回転行列を表す（リー群論では $\exp(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I})$ と書かれ、「指数写像」と呼ばれる）．具体的には $l = \mathcal{N}[\boldsymbol{\omega}]$ 、 $\Omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$ とすると次のようになる¹⁵⁾（「ロドリゲスの公式」）．

$$\mathcal{R}[\boldsymbol{\omega}] = \mathbf{I} \cos \Omega + l \times \mathbf{I} \sin \Omega + ll^{\top} (1 - \cos \Omega) \quad (33)$$

- (5) \mathbf{R}, t, s を $\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{t}, \tilde{s}$ としたときの式 (9) の値 \tilde{J} を計算する．

- (6) $\tilde{J} \approx J$ または $\tilde{J} < J$ なら次へ進む．そうでなければ $C \leftarrow 10C$ としてステップ (3) に戻る．

- (7) $\mathbf{R} \leftarrow \tilde{\mathbf{R}}, t \leftarrow \tilde{t}, s \leftarrow \tilde{s}$ とし、 $J \approx \tilde{J}$ なら \mathbf{R}, t, s を返して終了する．そうでなければ $J \leftarrow \tilde{J}, C \leftarrow C/10$ としてステップ (2) に戻る．

6. シミュレーション実験

図 1 左のように曲面を原点を通るある回転軸の周りに回転し、平行移動し、スケールを変える．そしてステレオ視によって各格子点の相似変換前後 3 次元位置を計測する．曲面格子はその中心の格子点が世界座標の原点にあり、2 台のカメラはそれを 10 度で見込む位置に配置している．画像サイズは 500×800 画素、焦点距離は 600 画素を想定している．各格子点を対応点とし、その x, y 座標に期待値 0、標準偏差 σ 画素の正規乱数を加え、それぞれ文献 17) の方法で各格子点の 3 次元位置を最適に計算した（付録参照）．そして復元位置 $\hat{r}_{\alpha}, \hat{r}'_{\alpha}$ の正規化共分散行列 $V_0[\hat{r}_{\alpha}], V_0[\hat{r}'_{\alpha}]$ を前報⁷⁾ の方法で予測して、前節のレーベン

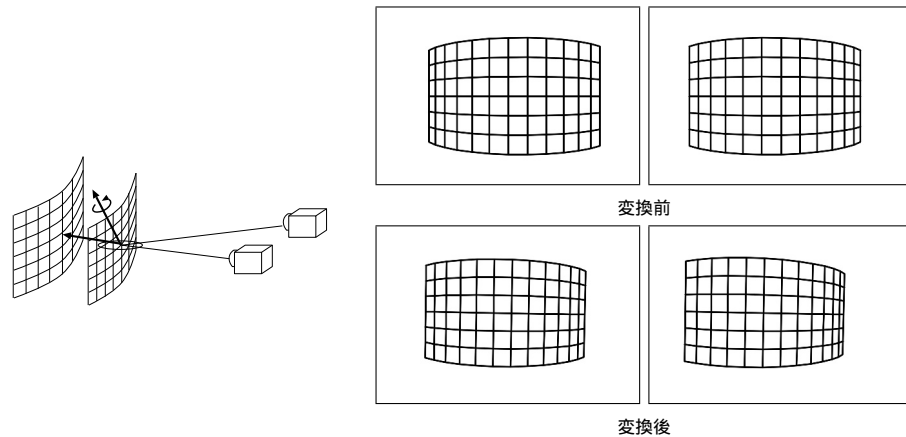


図 1 左：相似変換（回転，並進，スケール変化）する曲面格子ステレオ視による 3 次元計測と誤差楕円体．右：曲面格子の変換前後のステレオ画像のシミュレーション．

バーグ・マーカート法を適用した．ただし，ステップ (6), (7) の \approx は差の絶対値が 10^{-10} 以下とした．そして，得られた回転行列，並進，スケール変化を $\hat{R}, \hat{t}, \hat{s}$ とし，それらの真値を R, \bar{t}, \bar{s} とするとき，回転の誤差は相対回転 $\hat{R}R^{-1}$ の回転角を $\delta\Omega$ ($^\circ$) で評価し，並進，スケール変化の誤差をそれぞれ $\delta t = \hat{t} - \bar{t}, \delta s = \hat{s} - \bar{s}$ で評価する．これを σ を固定して異なる誤差に対して 1000 回試行し，次の RMS 誤差を評価した．

$$E_R = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{a=1}^{1000} (\delta\Omega^{(a)})^2}, \quad E_t = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{a=1}^{1000} \|\delta t^{(a)}\|^2}, \quad E_s = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{a=1}^{1000} (\delta s^{(a)})^2} \quad (34)$$

ただし，右肩の (a) は a 回目の試行の値である．そして，次の三つの方法を比較する．

方法 1 点集合 $\{r_\alpha\}$ と $\{r'_\alpha\}$ の重心をそれぞれ r_c, r'_c とし，重心からの差を $\tilde{r}_\alpha = r_\alpha - r_c, \tilde{r}'_\alpha = r'_\alpha - r'_c$ とする．スケール変化を $s = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^N \|\tilde{r}'_\alpha\|^2 / \sum_{\alpha=1}^N \|\tilde{r}_\alpha\|^2}$ とし，回転 R は $\{\tilde{r}_\alpha\}, \{\tilde{r}'_\alpha/s\}$ から一様等方誤差を仮定する最適解法（特異値分解による方法⁷⁾）で計算する．そして並進を $t = r'_c - sRr_c$ とする．

方法 2 方法 1 において $\{\tilde{r}_\alpha\}, \{\tilde{r}'_\alpha/s\}$ から，それぞれの正規化共分散行列を $V_0[r_\alpha], V_0[r'_\alpha]/s^2$ として回転 R を計算する部分に前報⁷⁾ の誤差分布の不均一性を考慮する最適解法を用いる．

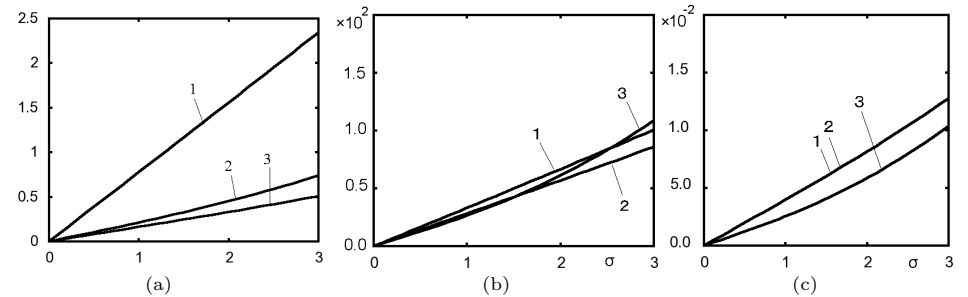


図 2 ステレオ画像に加えた誤差の標準偏差 σ に対する (a) 回転, (b) 並進, (c) スケール変化の RMS 誤差．数字は方法 1, 2, 3 に対応．

表 1 イスタンブール近郊の 5 地点の 1997 年 10 月と 1998 年 3 月に測定した 3 次元位置¹⁾．

1997 年 10 月			1998 年 3 月		
X	Y	Z	X	Y	Z
4233187.8344	2308228.6785	4161469.1229	4233187.8612	2308228.7042	4161469.1383
4233190.6059	2308518.3249	4161336.2582	4233190.6124	2308518.3166	4161336.2682
4233429.1004	2307875.2240	4161292.4034	4233429.1008	2307875.2239	4161292.4029
4233259.8205	2307712.3025	4161553.4880	4233259.8309	2307712.2990	4161553.5007
4233770.4580	2308340.5240	4160740.3286	4233770.4534	2308340.5219	4160740.3181

方法 3 回転 R , 並進 t , スケール変化 s を本論文で述べた方法で同時に最適化する．レーバンバーグ・マーカート法の初期値は方法 1 で求めた値を用いる．

図 2 は横軸を σ にとって方法 1, 2, 3 に対する RMS 誤差 E_R, E_t, E_s をプロットしたものである．これから分かるように，回転については 3 次元データの誤差分布の不均一性を考慮しない方法 1 は精度が極めて低い．方法 2 を用いると精度が著しく向上する．方法 3 ではさらに精度が向上する．スケール変化も最適化によって精度が向上している．並進はあまり変化見られない．結論として，3 次元データの誤差分布の不均一性が最も影響するのは回転である．回転の推定に前報⁷⁾ の最適解法を用いると精度の高い解が求まるが，本論文の方法によってさらに精度が向上する．

7. 実データ実験

トルコは地震多発国であり，地盤の変形を GPS データでモニターしている．表 1 はイスタンブール近郊の GPS 測量した地点のうち，地盤が不安定な地域の 5 地点を選び，その

X, Y, Z 座標 (単位は m) を示したものであり, 1997 年 10 月および 1998 年 3 月の測定結果である¹⁾. それぞれ, 地盤が安定している地域に参照点を設定し, その測定値を絶対位置の補正を行っている. 統計的手法によって推定した各地点の測定値の共分散行列は 1997 年データでは順に

$$\begin{pmatrix} 34 & 10 & 17 \\ 10 & 12 & 7 \\ 17 & 7 & 33 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 234 & 83 & 136 \\ 83 & 97 & 58 \\ 136 & 58 & 245 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 & 8 & 12 \\ 8 & 10 & 6 \\ 12 & 6 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 63 & 25 & 36 \\ 25 & 28 & 16 \\ 36 & 16 & 53 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 & 8 & 12 \\ 8 & 9 & 5 \\ 12 & 5 & 23 \end{pmatrix}$$

に 10^{-8} を掛けたものであり, 1998 年データでは順に

$$\begin{pmatrix} 51 & 18 & 23 \\ 18 & 18 & 13 \\ 23 & 13 & 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 323 & 140 & 159 \\ 140 & 148 & 100 \\ 159 & 100 & 218 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 41 & 14 & 19 \\ 14 & 16 & 11 \\ 19 & 11 & 28 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 141 & 47 & 70 \\ 47 & 49 & 38 \\ 70 & 38 & 96 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 59 & 20 & 29 \\ 20 & 24 & 16 \\ 29 & 16 & 43 \end{pmatrix}$$

に 10^{-8} を掛けたものである. 表 2 はこれらのデータから前述の三つの方法で計算した並進, スケール変化, 回転を比較したものである. これを見ると各方法の解の間にはわずかな差がある. このような精密さを要求する微小変形の計算には本論文の最適化手法が必要であり, 地測学では各種の重み付き最小二乗法が用いられているが^{(1),(5),(6),(19)}, 本論文のような最適化手法は確立されていない. これについて現在, 筆者らは地測学者と共同研究を進めている.

8. まとめ

画像上の点データと異なり, 3 次元データはステレオ視やレンジファインダーなどの何らのセンサーを用いて計測されるので, センサーのタイプ, 位置, 向きに依存して各 3 次元点の誤差分布は大きな不均一性をもつ. 前報⁷⁾ ではそのような不均一な誤差分布をもつ二組の 3 次元データ間の 3 次元回転を最適に計算する方法を示したが, 本論文では並進とスケール変化をも含む 3 次元相似変換の最適計算法を示した. 前報では 3 次元回転の四元数表現を用いたが, 本論文では 3 次元回転のリー代数による表現¹¹⁾ を用いて微分を計算し, 並進とスケール変化を含んだレーベンバーグ・マーカート法を導出した. 提案手法の評価として, まず前報と同様にステレオ視によって復元した不均一な誤差分布を持つ 3 次元データによるシミュレーション実験を行い, 次に実際の GPS による地測データに対する計算を行った. そして, 3 次元データの誤差分布の不均一性を考慮しなければ正確な推定ができないことを示した. また前報⁷⁾ の回転の最適推定を用いれば精密な解が得られるが, 本論文の並進とスケール変化を含んだ最適化によりさらに精度が向上することを確認した.

謝辞: 本研究に関する有益なご意見を頂き, GPS 地測データを提供して頂いたトルコ, イスタンブール工科大学 Orhan Akyilmaz 准教授に感謝します. 本研究の一部は文部科学省科学研究費基盤研究 (C

表 2 表 1 のデータから三つの方法で計算した地盤の並進 $t = (t_1, t_2, t_3)^T$ (単位は m), スケール変化 s , 回転軸 $l = (l_1, l_2, l_3)^T$ (単位ベクトル), および回転角 Ω (単位は度).

	方法 1	方法 2	方法 3
t_1	-199.86035620	-237.32542737	-273.58000610
t_2	42.52530293	85.27928886	99.29808570
t_3	143.65787065	158.06078612	141.67312764
s	1.00000370	1.00000370	1.00000837
l_1	-0.04950650	-0.03494625	-0.01117288
l_2	0.93285277	0.85967794	0.82289933
l_3	-0.35684003	-0.50963968	-0.56807733
Ω	0.00224281	0.00267166	0.00288150

21500172) の助成によった.

参考文献

- 1) M. Acar, M. T. Özlüdemir, O. Akyilmaz, R. N. Celik and T. Ayan, Deformation analysis with total least squares, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, **6-4** (2006-6), 663-669.
- 2) K. S. Arun, T. S. Huang and S. D. Blostein, Least squares fitting of two 3-D point sets, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **9-5** (1987-5), 698-700.
- 3) N. Ayache and O. D. Faugeras, Building, registrating, and fusing noisy visual data, *Int. J. Comput. Vis.*, K. S. Arun, T. S. Huang and S. D. Blostein, **7-6** (1988-12), 45-65.
- 4) W. Chojnacki, M. J. Brooks, A. van den Hengel and D. Gawley, On the fitting of surfaces to data with covariances, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **22-11** (2000), 1294-1303.
- 5) Y. A. Felus and R. C. Burch, On symmetrical three-dimensional datum conversion, *GPS Solutions* **13-1** (2009-1), 65-74.
- 6) E. W. Grafarend and J. L. Awange, Nonlinear analysis of the three-dimensional datum transformation [conformal group $C_7(3)$], *J. Geodesy*, **77-1/2** (2003-5), 66-76.
- 7) 原裕貴, 新妻弘崇, 金谷健一, 不均一な誤差分布をもつ空間データからの 3 次元回転の最適計算, 情報処理学会研究報告, 2010-CVIM-175-23 (2011-1), 1-8.
- 8) B. K. P. Horn, Closed-form solution of absolute orientation, using quaternions, *Int. J. Opt. Soc. Am.* **A-4-4** (1987-4), 629-642.
- 9) B. K. P. Horn, H. M. Hildren and S. Negahdaripour, Closed-form solution of absolute orientation, using orthonormal matrices, *Int. J. Opt. Soc. Am.* **A-5-7** (1988-7), 1127-1135.
- 10) 岩元祐輝, 菅谷保之, 金谷健一, 3 次元復元のためのバンドル調整の実装と評価, 情報処理学会研究報告, 2010-CVIM-175-22 (2011-1), 1-8.
- 11) K. Kanatani, *Group-Theoretical Methods in Image Understanding*, Springer,

Berlin, Germany, 1990.

- 12) K. Kanatani, *Geometric Computation for Machine Vision*, Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- 13) K. Kanatani, Analysis of 3-D rotation fitting, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **16**-5 (1994-5), 543-449.
- 14) K. Kanatani, *Statistical Optimization for Geometric Computation: Theory and Practice*, Elsevier, Amsterdam, the Netherlands, 1996; reprinted Dover, New York, NY, U.S.A., 2005.
- 15) 金谷健一, 「形状CADと図形の数学」共立出版, 1998.
- 16) 金谷健一, 「これなら分かる最適化数学—基礎原理から計算手法まで—」, 共立出版, 2005.
- 17) 金谷健一, 菅谷保之, 新妻弘崇, 2画像からの三角測量: Hartley-Sturm vs. 最適補正, 情報処理学会研究報告, 2008-CVIM-162-54 (2008-3), 335-342.
- 18) L. Matthies and S. A. Shafer, Error modeling in stereo navigation, *IEEE J. Robot. Automation*, **3**-3 (1987-6), 239-248.
- 19) F. Neitzel, Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformations, *J. Geodesy*, **84**-12 (2010-12), 751-762.
- 20) N. Ohta and K. Kanatani, Optimal estimation of three-dimensional rotation and reliability evaluation, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, *E81-D*-11 (1998-11), 1247-1252.
- 21) 坂本雅俊, 金谷健一, 菅谷保之, 自由に撮影した画像による全周パノラマ生成のための射影変換の最適化, 情報処理学会研究報告, 2006-CVIM-155-28 (2006-9), 219-226.
- 22) 菅谷保之, 金谷健一, 効率的探索によるランク拘束した基礎行列の高精度計算, 情報処理学会研究報告, 2007-CVIM-158-3 (2007-3), 17-24.
- 23) S. Umeyama, Least-squares estimation of transformation parameters between two point sets, *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell.*, **13**-4 (1991-4), 379-380.

付 録

ステレオ画像から画像処理によって抽出した対応点 (x, y) , (x', y') には誤差があるので, 基礎行列 F が与えられてもエビ極線方程式が厳密には成立しない. これは点 (x, y) を通る視線と点 (x', y') を通る視線がシーン中で1点で交わらないことを意味する. そこで, 最適な3次元復元を行うにはまずこれらをエビ極線方程式が厳密に成り立つように (\hat{x}, \hat{y}) , (\hat{x}', \hat{y}') に最適に補正する. “最適に” という意味は可能な補正の中で $(\hat{x}-x)^2 + (\hat{y}-y)^2 + (\hat{x}'-x')^2 + (\hat{y}'-y')^2$ が最小になるものを選ぶという意味である. その手順は次のようになる¹⁷⁾.

- (1) $E_0 = \infty$ (十分大きい数), $\hat{x} = x$, $\hat{y} = y$, $\hat{x}' = x'$, $\hat{y}' = y'$, $\tilde{x} = \tilde{y} = \tilde{x}' = \tilde{y}' = 0$ と置く. そして, 基礎行列 $F = (F_{ij})$ を次の9次元ベクトルで表す.
$$\mathbf{f} = (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33})^\top \quad (35)$$

- (2) 次の 9×9 行列 $V[\hat{\xi}]$ を計算する.

$$V_0[\hat{\xi}] = \begin{pmatrix} \hat{x}^2 + \hat{x}'^2 & \hat{x}'\hat{y}' & f_0\hat{x}' & \hat{x}\hat{y} & 0 & 0 & f_0\hat{x} & 0 & 0 \\ \hat{x}'\hat{y}' & \hat{x}^2 + \hat{y}'^2 & f_0\hat{y}' & 0 & \hat{x}\hat{y} & 0 & 0 & f_0\hat{x} & 0 \\ f_0\hat{x}' & f_0\hat{y}' & f_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{x}\hat{y} & 0 & 0 & \hat{y}^2 + \hat{x}'^2 & \hat{x}'\hat{y}' & f_0\hat{x}' & f_0\hat{y} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{x}\hat{y} & 0 & \hat{x}'\hat{y}' & \hat{y}^2 + \hat{y}'^2 & f_0\hat{y}' & 0 & f_0\hat{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_0\hat{x}' & f_0\hat{y}' & f_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ f_0\hat{x} & 0 & 0 & f_0\hat{y} & 0 & 0 & f_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_0\hat{x} & 0 & 0 & f_0\hat{y} & 0 & 0 & f_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

- (3) 次の9次元ベクトル ξ^* を計算する.

$$\xi^* = \begin{pmatrix} \hat{x}\hat{x}' + \hat{x}'\hat{x} + \hat{x}\hat{x}' \\ \hat{x}\hat{y}' + \hat{y}'\hat{x} + \hat{x}\hat{y}' \\ \hat{x} + \tilde{x} \\ \hat{y}\hat{x}' + \hat{x}'\hat{y} + \hat{y}\hat{x}' \\ \hat{y}\hat{y}' + \hat{y}'\hat{y} + \hat{y}\hat{y}' \\ \hat{y} + \tilde{y} \\ \hat{x}' + \tilde{x}' \\ \hat{y}' + \tilde{y}' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

- (4) \tilde{x} , \tilde{y} , \tilde{x}' , \tilde{y}' , \hat{x} , \hat{y} , \hat{x}' , \hat{y}' を次のように更新する.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\mathbf{f}, \xi^*)}{(\mathbf{f}, V[\hat{\xi}]\mathbf{f})} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} \leftarrow \frac{(\mathbf{f}, \xi^*)}{(\mathbf{f}, V[\hat{\xi}]\mathbf{f})} \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

- (5) 次の再投影誤差を計算する.

$$E = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{x}'^2 + \tilde{y}'^2. \quad (40)$$

そして $E \approx E_0$ であれば (\hat{x}, \hat{y}) , (\hat{x}', \hat{y}') を返して終了する. そうでなければ $E_0 \leftarrow E$ としてステップ (2) に戻る.