

ステレオロジーによる異方性粒子の配向性の測定法*

Measurement of Particle Orientation Distribution by a Stereological Method

金谷 健一**
Ken-ichi KANATANI

1. はじめに

現在、さまざまな粒子複合材料が用いられている。たとえば繊維強化複合材料では線状粒子（長繊維，短繊維）を混入して材料強度を向上させており，磁性材料では針状または板状のフェライト粒子を混入し，その配向特性によって磁気特性を向上させているということである¹⁾。このように異方性粒子の配向は製品の特性に大きな影響を及ぼすので，その粒子配向性を知ることが重要な課題となり，いくつかのコンピュータシミュレーションも行われている²⁾。しかし，与えられた複合材料に対して，含まれている粒子の配向の分布を知ることが容易ではない。磁気テープのように粒子が平面上に分散している場合は写真により肉眼で数え上げることができ，自動的に計測できることが望ましい。まして3次元の領域に粒子が配向している場合は粒子の3次元の配向を直接数え上げることが不可能である。通常，われわれが観測できるのはいろいろの方向から切断した断面に限られる。

このように断面を観測して空間の特性を知ることが重要な課題になるが，このような問題は数学的には「積分幾何学」，「幾何確率」，金属学や生物学，医学への応用としては「ステレオロジー」などとよばれて，古くから研究されている³⁻¹²⁾。特に空間的に分布する粒子の粒径分布を断面上に現われた粒子の切り口の大きさの分布から逆算することがよく行なわれている。これは金属結晶中の析出物の大きさの分布を顕微鏡写真から求める問題として金属学で重要となる^{13, 14)}。また粉体の粒径分布をこの方法で求めようとする試みが粉体工学でも行なわれている¹⁵⁾。さらに土質力学においても微視構造を知るために関心がもたれており¹⁶⁾，粒径分布と同じ方法で岩盤中のクラックの大きさの分布を断面上の亀裂の大きさか

ら推定することも考えられている¹⁷⁾。これらの計算のための数値解法の比較検討も行なわれている¹⁸⁾。これらのほとんどは粒径とか密度とかに関するものであり，物質の等方性が仮定されている。一方，粒子の配向性や物質の異方性を知る方法は，考え方としては古く Buffon¹⁹⁾にさかのぼり，具体的な解析手段としては Hilliard²⁰⁾により提案され，金谷²¹⁾により Buffon 変換として一般的に体系化された。これはさら計算機による画像認識にも利用されている²²⁾。

本報告では粒子として針状のものと板状のものを考え，2次元の分布と3次元の分布の両方に対して，断面上の観察から空間内の分布を計算する方法を具体的に示す。（一般論は金谷²¹⁾参照。）

2. 針状粒子の平面上の分布密度

最初に針状または線状の粒子が平面上に分布している場合を考える。これを理想化するため，粒子の太さは無視し，線分または直線とみなすことにする。このような分布の配向性を特徴づける「分布密度」を次のように定義する。平面上に xy -座標軸をひとつ定めると，ひとつの針状粒子の方向は x 軸とのなす角 θ によって表わされる。この場合，粒子の向きをどちらと考えるかによって θ ， $\theta + \pi$ と2通り考えられるので $0 \leq \theta < \pi$ なるほうを選ぶことにする。そして，方向が θ と $\theta + d\theta$ の間にある粒子の総長が単位面積当たり $2f(\theta)d\theta$ であるように分布密度 $f(\theta)$ を定義する。これは $0 \leq \theta < \pi$ についてのみ定義されているが，取り扱いの都合上， $\pi \leq \theta < 2\pi$ に周期的に繰り返して，すなわち $f(\theta) = f(\theta + \pi)$ として， $0 \leq \theta < 2\pi$ の関数とみなすことにする。これはちょうど，ひとつの粒子の方向として考えられる互に反対向きの両方向のうち，ランダムに確率 $1/2$ で一方を選んだと解釈できる。こう考えると，方向が θ と $\theta + d\theta$ の間にある粒子の総長が単位面積当たり $f(\theta)d\theta$ となり， $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$ は単位面積当たりの粒子の総長となる。

昭和58年4月1日受付

*粉体工学会昭和58年度秋期研究発表会にて発表（1983, 11東京）

**群馬大学工学部情報工学科(〒376 桐生市天神町1-5-1)

TEL 0277-22-3181

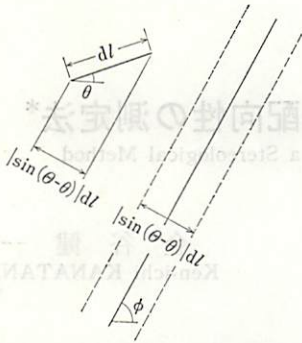


Fig.1 長さ $d l$, 方向 θ の微小線素はその中心が傾き θ の直線をはさむ幅 $|\sin(\theta-\phi)| d l$ の領域に入るとき, その直線と交わる。

$f(\theta)$ の最大となる方向 θ が最も多数の粒子の並ぶ方向であり, 巨視的な異方性を表わす軸方向となる。また, 粒子の配向が完全にランダムであれば $f(\theta)$ は定数 (一様分布) となり, 巨視的には等方性となる。

このような粒子の配向を特徴づける分布密度 $f(\theta)$ を定義に従って計測するのは大変である。もし直接実行しようとするれば, 視測される粒子のひとつひとつの長さや方向を測定し, $0 \leq \theta < \pi$ をいくつかの区間にわけて分類し, ヒストグラムを作るということになる。このとき区間の幅をあまり小さくすると分布の形が不規則になってとらえられなくなるし, 大きすぎると粗い定性的な結果しか得られなくなる。これに対して, ステレオロジーによる方法とは, この平面上に直線を置き, 針状粒子との交点を数えることによって $f(\theta)$ を導くというものである。

3. 2次元 Buffon 変換

いま針状粒子の分布している平面上に方向 θ の直線をランダムに置くとする。すべての針状粒子を長さ $d l$ の微小線素にわけて考えるとすると, 方向が θ と $\theta+d\theta$ との間にあるものの総長は単位面積当り $f(\theta)d\theta$ であるから, これは全部で $f(\theta)d\theta/d l$ 個の微小線素からなっている。そのような微小線素をひとつ選んだとき, これが方向 θ の直線と交わるのは, その微小線素の中心が直線をはさむ幅 $|\sin(\theta-\phi)| d l$ の帯状領域に入るときである (Fig.1)。ところで, その領域の中には単位長さ当り $|\sin(\theta-\phi)| f(\theta)d\theta$ 個の微小線素があることになるので, それだけの交点が生じる。これをすべての方向の線素に対して合計すれば, 直線上の交点数の期待値が単位長さ当り

$$N(\theta) = \int_0^{2\pi} |\sin(\theta-\phi)| f(\phi) d\phi \quad \dots\dots(1)$$

となる。これは単に期待値であるが, このような直線による走査をランダムに何度も繰り返して平均値をとればいくらでもこの式の値に近づく (「大数の法則」)。実際的なことを考えればランダムではなく傾き θ で間隔一定の平行線を多数置いて交点を数えればよい。コンピューターによる画像処理装置を用いれば能率的である。式(1)は $0 \leq \theta < 2\pi$ で定義された関数 $f(\theta)$ を同じく $0 \leq \theta < 2\pi$ で定義された関数 $N(\theta)$ に変換する公式であると解釈できる。そこでこれを (2次元の) Buffon 変換とよぶことにする²¹⁾。(テンソルによる一般理論は金谷²¹⁾参照。)

4. 2次元逆 Buffon 変換

式(1)の $N(\theta)$ は視測によって定まるから, 式(1)の逆変換, すなわち $f(\theta)$ を $N(\theta)$ によって表わすことができれば視測されたデータによって $f(\theta)$ を計算できることになる。そのために $f(\theta)$ を Fourier 級数で表わしてみる。これは $0 \leq \theta < 2\pi$ の周期関数であるから Fourier 展開できるが, $f(\theta+\pi) = f(\theta)$, すなわち原点に対して点対称であるから偶数次の項のみによって

$$f(\theta) = \frac{c}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right] \quad \dots\dots(2)$$

$$c = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad \dots\dots(3)$$

$$a_n = \frac{2}{c} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \dots\dots(4)$$

$$b_n = \frac{2}{c} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad \dots\dots(5)$$

と表わされる。ただし \sum' は偶数番目のみに関する和を表わすものとする。式(2)に式(1)の Buffon 変換をほどこすと次のようになる。(なぜそうなるのかは直接計算してみれば確かめられるが, Buffon 変換は回転群と可換な不変作用素であることと, 回転群既約表現の直交性とを考慮すれば直ちに導かれる²¹⁾。)

$$N(\theta) = \frac{4c}{2\pi} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \right] \quad \dots\dots(6)$$

したがって, もし $N(\theta)$ を Fourier 級数によって

$$N(\theta) = \frac{C}{2\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \right] \quad \dots\dots(7)$$

$$C = \int_0^{2\pi} N(\theta) d\theta \quad \dots\dots(8)$$

$$A_n = \frac{2}{C} \int_0^{2\pi} N(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \dots\dots(9)$$

$$B_n = \frac{2}{C} \int_0^{2\pi} N(\theta) \sin n\theta d\theta \quad \dots\dots(10)$$

と表わせば、 $f(\theta)$ は次のように求まる。

$$f(\theta) = \frac{C/4}{2\pi} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n^2-1)(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \right] \quad \dots\dots(11)$$

以上より、与えられたデータから式(8)、(9)、(10)と計算しさえすれば式(11)によって $f(\theta)$ が定まることになる。観測できる θ の値は有限種類であるから、高速 Fourier 変換 (FFT)^{23,24)} を用いればよいと思えるかもしれないが、これは適当でない。というのは、FFT は定められた N 個の (離散) Fourier 係数を同時に効率よく計算する手法であるが、この場合すべての Fourier 係数を計算する必要はない。それどころかすべての係数を計算すると、かえって都合が悪い。なぜなら式(1)からわかるように、 n 次の周波数成分が n^2-1 倍されるのであるから、わずかの誤差 (それは普通不規則であるから高周波成分となる) が大きく増幅されてしまう。実際問題としては 2 次の周波数成分のみで十分である。そこで C 、 A_2 、 B_2 を次のようにして計算すればよい。

まず $0 \leq \theta < \pi$ を N 等分して、方向 $\theta_k = \pi k/N$ 、 $k = 0, 1, \dots, N-1$ に対して平行線を置き、単位長さ当りの交点数を N_k とする。そして式(8)、(9)、(10)に対応して

$$C = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} N_k / N \quad \dots\dots(12)$$

$$A_2 = 2 \sum_{k=0}^{N-1} N_k \cos(2\pi k/N) / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad \dots\dots(13)$$

$$B_2 = 2 \sum_{k=0}^{N-1} N_k \sin(2\pi k/N) / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad \dots\dots(14)$$

とすれば、 $N(\theta)$ は次のように近似できる。

$$N(\theta) \sim \frac{C}{2\pi} [1 + A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta] \quad \dots\dots(15)$$

したがって、求める分布密度 $f(\theta)$ は次のようになる。

$$f(\theta) \sim \frac{C/4}{2\pi} [1 - 3(A_2 \cos 2\theta + B_2 \sin 2\theta)] \quad \dots\dots(16)$$

式(16)は高次の周波数成分を無視した近似であるが、各次数の周波数成分は互に直交するから、式(16)は最小二乗誤差の意味での近似と考えてもよい²⁵⁾。

ところでよく考えてみると、われわれの知りたいのは分布形そのものではなく、その分布のピークや対称軸はどちらの方向にあるか、等方性 (一様分布) からのへだたりの程度はいくらか、などであろう。これを知るには式(16)を極座標ではなく xy -座標で表わすほうが都合がよい。 $x = \cos \theta$ 、 $y = \sin \theta$ とすると式(16)は

$$f(x, y) \sim \frac{C/4}{2\pi} \left[1 + \sum_{i,j=1}^2 D_{ij} x_i x_j \right] \quad \dots\dots(17)$$

となる。ただし $x = x_1$ 、 $y = x_2$ とした。ここで D は「ファブリックテンソル」とよばれ、直交異方性を特徴づけ

る最も基本となるテンソルであり^{25,26)}、その要素は

$$D = -3 \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & -A_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(18)$$

である。分布が完全にランダムであれば $D=0$ であり、 D が等方性からのずれを表わす。 D は対称テンソルであるから、直交する主軸方向があり、それを対称軸とするような直交異方性を表わしている。その主軸方向に新しい x' 、 y' 軸をとると

$$D' = \begin{bmatrix} \lambda & \\ & -\lambda \end{bmatrix} \quad \dots\dots(19)$$

となる。ただし、 λ 、 $-\lambda$ は対応する固有値である。(注意。 $\text{Tr} D = 0$ であり、トレースは不変量であるから $\text{Tr} D' = 0$ 。) これは要するに分布が x' 軸、 y' 軸方向に最大または最小となり、 x' 軸方向の分布が一様分布に比べて割合 λ だけふえ、 y' 軸方向で割合 λ だけへることを表わしている。すなわち、 D の主軸方向が異方性 (分布) の対称軸であり、固有値 λ が一様分布からのへだたりの程度を表わしている。

例として Fig. 2 のような針状粒子の分布を考える。 $N=18$ とし、異なる 18 方向からそれぞれ 10° ごとに平

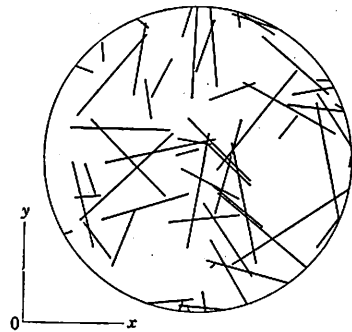


Fig. 2 平面上に分布する針状粒子の例

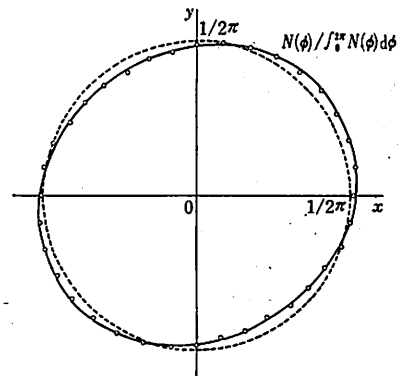


Fig. 3 Fig. 2 の平行線との交点数のデータとそれを近似する曲線 (規格化してある)

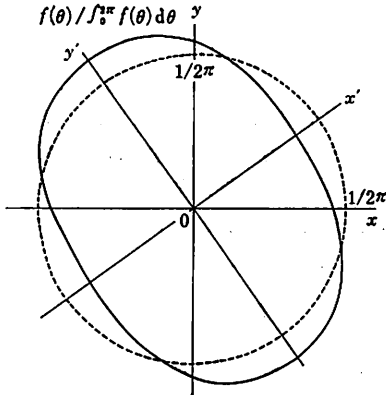


Fig. 4 Fig. 3の曲線より定めた分布密度 $f(\theta)$ (規格化してある)

行線を引き、その交点数を調べて図示したのが Fig. 3 である。白丸がデータ点で、曲線は式(12), (13), (14)によって計算した式(15)である。ただしデータも曲線も規格化して、 $N(\theta) / \int_0^{2\pi} N(\theta) d\theta$ を表わすようにしてある。平行線の間隔は輪郭の直径の $1/24$ である。 $A_2=0.026$, $B_2=0.057$ となった。 Fig. 4 はこれを式(16)によって分布密度 $f(\theta)$ に直したものである。これを表わすファブリックテンソルは

$$D = \begin{bmatrix} -0.078 & -0.171 \\ -0.171 & 0.078 \end{bmatrix}$$

であり、主軸方向は $\theta=35.5^\circ, 125.5^\circ$ である。固有値は $\lambda=\pm 0.188$, すなわち、この割合だけ一様分布からずれている。これらのことを Fig. 2 を見て直接に察知するのはむずかしい。ところが、交点数を調べることによって、これらのことが容易にわかる。

5. 針状粒子の空間的分布

次に針状粒子が3次元空間内に分布している場合を考える。ひとつの粒子の方向は球面座標 (θ, ϕ) で表わされる (Fig. 5)。ただし (θ, ϕ) と $(\pi-\theta, \phi+\pi)$ とは同じ方向であるので、前と同様、各粒子につきランダムに確率 $1/2$ でどちらかを指定するものとする。そして、その分布密度を $f(\theta, \phi)$ とする。すなわち、方向が θ と $\theta+d\theta$, ϕ と $\phi+d\phi$ との間にある粒子の総長が単位体積当たり $f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$ であるものとする。

(前と同じように $0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < \pi$ のみ考えてから $\pi-\theta, \phi+\pi$ の反対方向へ同じように拡張すると考えてもよい。) $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$ が単位体積当たりの粒子の総長である。そして、 $f(\theta, \phi)$ の最大値を与え

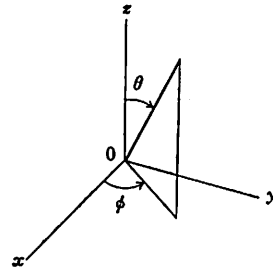


Fig. 5 針状粒子の方向を指定する球面座標

る方向が最も多くの粒子の配向する方向であり、巨視的に見た異方性の軸となる。配向が完全にランダムであれば $f(\theta, \phi)$ は定数 (一様分布) であり、巨視的には等方性となる。

前と同じように交点数により $f(\theta, \phi)$ を定めようとするれば、これをある面で切って、その切り口に現われる粒子を数えればよい。実際には面を次々と削って、各面でのデータの平均をとるのがよい。その面の法線方向を同じ球面座標により (θ, ϕ) と表わすことにする。前と同じように粒子を長さ dl の微小線素にわけて考える。方向が (θ, ϕ) であるような長さ dl の微小線素が法線方向 (θ, ϕ) の面と交わるのは、その線素の中心が平面をはさむ幅 $|\cos \gamma| dl$ の領域に入るときである。ただし γ は2方向 $(\theta, \phi), (\theta, \phi)$ のなす面であり、よく知られたように

$$\cos \gamma = \sin \theta \sin \theta \cos(\phi - \phi) + \cos \theta \cos \theta \dots \dots (20)$$

である (Fig. 6)。ところで、この平面の単位面積当りに対するこの領域内に、方向が θ と $\theta+d\theta$, ϕ と $\phi+d\phi$ との間にある微小線素は $f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi / dl \times |\cos \gamma| dl$ だけあるので、それだけの交点数が生じる。

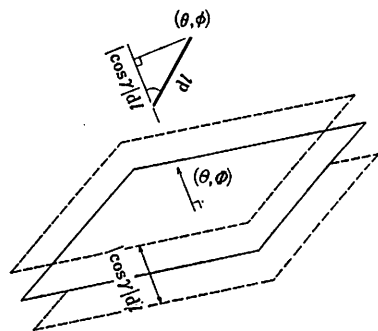


Fig. 6 長さ dl , 方向 (θ, ϕ) の微小線素はその中心が、法線方向 (θ, ϕ) の平面をはさむ幅 $|\cos \gamma| dl$ の領域に入るとき、その平面と交わる。

これをすべての方向の粒子について合計すれば、交点数の期待値は単位面積当り

$$N(\theta, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \gamma f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad \dots\dots(21)$$

となる。これが3次元の Buffon 変換である。

この逆変換を考えるため $f(\theta, \phi)$ を球面調和関数展開して次のようにおく。

$$f(\theta, \phi) = \frac{c}{4\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} a_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) \times (a_{nm} \cos m\phi + b_{nm} \sin m\phi) \right\} \right] \quad \dots\dots(22)$$

$$c = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad \dots\dots(23)$$

$$a_{nm} = \frac{2(2n+1)}{c} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \times P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \sin \theta d\theta d\phi \quad \dots\dots(24)$$

$$b_{nm} = \frac{2(2n+1)}{c} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \times P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \sin \theta d\theta d\phi \quad \dots\dots(25)$$

ただし $P_n(z)$ は Legendre の多項式, $P_n^m(z)$ は Legendre の陪関数である。これに式(22)の Buffon 変換をほどこすと次のようになる²⁰⁾。(これを直接計算して確かめるのは困難であるが, Buffon 変換が回転と可換な不変作用素であることに注意すれば回転群の既約表現の直交性により直ちに導かれる²¹⁾。)

$$N(\theta, \phi) = \frac{2\pi c}{4\pi} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2-1} \binom{n}{n/2}}{2^{n-1}(n-1)(n+2)} \times \left\{ \frac{1}{2} a_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) \times (a_{nm} \cos m\phi + b_{nm} \sin m\phi) \right\} \right] \quad \dots\dots(26)$$

したがって、前と同じように $N(\theta, \phi)$ を球面調和関数展開すれば $f(\theta, \phi)$ が逆に求まることになる。ここでも誤差の増幅を考えれば2次の球面調和関数のみで十分である。これを計算するために、方向 (θ_k, ϕ_k) , $k=0, 1, \dots, N-1$ を乱数によって N 個ランダムに選び、その方向に法線をもつ面で切断する。(乱数の重みはもちろん $\sin \theta d\theta d\phi$ 。ランダムでない場合は金谷²¹⁾。)そして、各断面に現われる粒子数を単位面積当り N_k とする。このデータより次の係数を計算する。

$$C = 4\pi \sum_{k=0}^{N-1} N_k / N \quad \dots\dots(27)$$

$$A_{20} = \frac{5}{4} \sum_{k=0}^{N-1} N_k (1 + 3 \cos 2\theta_k) / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad \dots\dots(28)$$

$$A_{21} = \frac{5}{2} \sum_{k=0}^{N-1} N_k \sin 2\theta_k \cos \phi_k / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad \dots\dots(29)$$

$$A_{22} = \frac{5}{8} \sum_{k=0}^{N-1} N_k (1 - \cos 2\theta_k) \cos 2\phi_k / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad \dots\dots(30)$$

$$B_{21} = \frac{5}{2} \sum_{k=0}^{N-1} N_k \sin 2\theta_k \sin \phi_k / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad \dots\dots(31)$$

$$B_{22} = \frac{5}{8} \sum_{k=0}^{N-1} N_k (1 - \cos 2\theta_k) \sin 2\phi_k / \sum_{k=0}^{N-1} N_k \quad \dots\dots(32)$$

すると $N(\theta, \phi)$ は、次のように近似される。

$$N(\theta, \phi) \sim \frac{C}{4\pi} \left[1 + \frac{1}{8} A_{20} (1 + 3 \cos 2\theta) + \frac{3}{2} \{ \sin 2\theta (A_{21} \cos \phi + B_{21} \sin \phi) + (1 - \cos 2\theta) (A_{22} \cos 2\phi + B_{22} \sin 2\phi) \} \right] \quad \dots\dots(33)$$

これに対応する分布密度 $f(\theta, \phi)$ は次のようになる。

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{C/2\pi}{4\pi} \left[1 + \frac{1}{2} A_{20} (1 + 3 \cos 2\theta) + 6 \{ \sin 2\theta (A_{21} \cos \phi + B_{21} \sin \phi) + (1 - \cos 2\theta) (A_{22} \cos 2\phi + B_{22} \sin 2\phi) \} \right] \quad \dots\dots(34)$$

この場合も、分布の対称軸やピークの大きさを知るには分布を xyz -座標系で表わすほうが都合がよい。

$$\left. \begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \phi \\ y &= \sin \theta \sin \phi \\ z &= \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(35)$$

とし、 $x=x_1, y=x_2, z=x_3$ とすれば式(34)は

$$f(x, y, z) \sim \frac{C/2\pi}{4\pi} \left[1 + \sum_{i,j=1}^3 D_{ij} x_i x_j \right] \quad \dots\dots(36)$$

となる。ファブリックテンソル D の要素は

$$D = 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} A_{20} + 6A_{22} & 6B_{22} & 3A_{21} \\ 6B_{22} & -\frac{1}{2} A_{20} - 6A_{22} & 3B_{21} \\ 3A_{21} & 3B_{21} & A_{20} \end{pmatrix} \quad \dots\dots(37)$$

である。この主軸方向が分布の対称軸であり、その主軸方向に x', y', z' 軸をとると、この座標系で

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(38)$$

となる。ただし $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は対応する固有値であり、 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ である。すなわち、分布は x', y', z' 軸方向に、一様分布からそれぞれ割合 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ だけずれることを表わしている。

6. 板状粒子の空間的分布 (交点数による方法)

各粒子が板状の場合、その向きは粒子面の単位法線ベクトルの向きを表わす球面座標 (θ, ϕ) によって指定

される。前と同様、各粒子につきランダムに確率1/2で互に反対方向にふたつの単位法線のうちひとつを指定するものとする。そして、その分布密度 $f(\theta, \phi)$ を、方向が θ と $\theta+d\theta$ 、 ϕ と $\phi+d\phi$ との間にある単位法線ベクトルをもつような粒子の総面積が単位体積当り $f(\theta, \phi)\sin\theta d\theta d\phi$ となるように定義する。

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi)\sin\theta d\theta d\phi$$

が単位体積当りの粒子の総面積である。そして、 $f(\theta, \phi)$ の最大値を与える方向が最も多くの粒子の配向する方向であり、巨視的に見た異方性の軸となる。配向が完全にランダムであれば $f(\theta, \phi)$ は定数（一様分布）であり、巨視的には等方性となる。

こんどは空間に直線を置いて、粒子との交点の数を数えることになる。実際には、置こうとする直線を含む面で切ってから、その切り口に直線を引いて交点を数えざるをえない。実際には切り口上に等間隔の平行線を引いて交点数を数え、その間隔と同じ間隔で切り口を次々と削って、各面でのデータの平均をとるのがよい。そのためは統計的に同等と思われるサンプルを多数用意する必要がある。さて、その置く直線の方を球面座標で (θ, ϕ) とする。そして、前と同じように粒子を面積 dS の微小面素に分割して考える。法線方向が (θ, ϕ) の微小面素が直線と交わるのは、その面素の中心が、その直線を中心軸とする断面積 $|\cos\gamma|dS$ の柱状の領域に入るときである。ただし、 γ は2方向 (θ, ϕ) , (θ, ϕ) のなす角(式20)である (Fig. 7)。ところで、この柱状領域の単位長さ当りには、法線が θ と $\theta+d\theta$ 、 ϕ と $\phi+d\phi$ との間にある微小面素が $f(\theta, \phi)\sin\theta d\theta d\phi/dS \times |\cos\gamma|dS$ だけがあるので、それだけの交点数が生じる。これをすべての向きの粒子について合計すれば、交点数の期待値は単位長さ当り

$$N(\theta, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\cos\gamma| f(\theta, \phi)\sin\theta d\theta d\phi \dots\dots(39)$$

となる。これは式(20)とまったく同じ3次元 Buffon 変換である。したがって、前節の針状粒子の方向を板状粒子の法線方向、断面の法線方向を直線の方とそれぞれ読みかえれば、 $N(\theta, \phi)$ から $f(\theta, \phi)$ を求める方法はまったく同一となる。ファブリックテンソルも同じ式で求まる。

7. 板状粒子の空間的分布 (交線長による方法)

板状粒子が空間に分布していて、その分布密度を $f(\theta, \phi)$ とする。これを法線方向 (θ, ϕ) の平面で切ったとき、切り口に現われる交線の長さを考えてみる。実際にはやはり面を次々と削って、各面でのデータの平均をとる

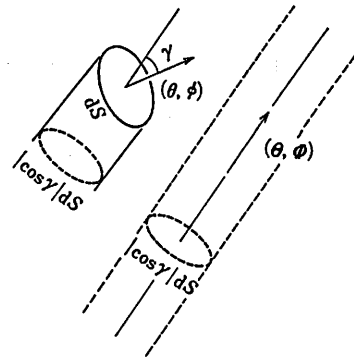


Fig. 7 面積 dS 、法線方向 (θ, ϕ) の微小面素はその中心が、方向 (θ, ϕ) の直線を軸とする断面積 $|\cos\gamma|dS$ の柱状領域に入るとき、その直線と交わる。

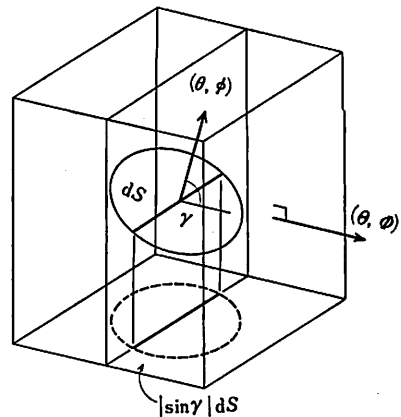


Fig. 8 法線方向 (θ, ϕ) の切断面によって単位体積中をランダムに切るとき、法線方向 (θ, ϕ) 、面積 dS の面素との交線長の期待値は、その面素を交線に平行、切断面に垂直な面へ射影した面積 $|\sin\gamma|dS$ に等しい。

のがよい。前と同じように面積 dS の微小面素にわけて考える。法線方向が (θ, ϕ) の微小面素を法線方向 (θ, ϕ) の平面で切るとき、その平面の単位面積部分が単位体積中をランダムに（向きは一定）切れば Fig. 8 からわかるように、交線長の期待値は、その微小面素を図のように射影した領域の断面積 $|\sin\gamma|dS$ に等しい。ただし γ は2方向 (θ, ϕ) , (θ, ϕ) のなす角である。単位体積中には法線方向が θ と $\theta+d\theta$ 、 ϕ と $\phi+d\phi$ との間にある微小面素が $f(\theta, \phi)\sin\theta d\theta d\phi/dS$ 個あるので、交線の総長の期待値は平面の単位面積当り

$$L(\theta, \phi) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\sin\gamma| f(\theta, \phi)\sin\theta d\theta d\phi \dots\dots(40)$$

となる。この逆変換を知るために $f(\theta, \phi)$ を式(22)~(25)

の球面調和関数展開すると、 $L(\theta, \phi)$ は次のようになる。

$$L(\theta, \phi) = \frac{\pi^2 c}{4\pi} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n \binom{n}{n/2}^2}{2^{2n-1}(n-1)} \left\{ \frac{1}{2} a_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n P_n^m(\cos \theta) (a_{nm} \cos m\phi + b_{nm} \sin m\phi) \right\} \right] \quad \dots\dots(41)$$

(これも回転群の既約表現と不変作用素の関係から導くことができる²¹⁾。) 前と同じように、方向 (θ_k, ϕ_k) , $k=0, 1, \dots, N-1$ をランダムに選び、その方向に法線をもつ平面で切ったときの断面上の交線の総長を単位面積当り L_k とし、式(41)~(42)で N_k を L_k におきかえた $C, A_{20}, A_{21}, A_{22}, B_{21}, B_{22}$ を計算すれば、 $L(\theta, \phi)$ は式(43)の右辺のように近似される。したがって、対応する $f(\theta, \phi)$ は次のようになる。

$$f(\theta, \phi) \sim \frac{C/\pi^2}{4\pi} \left[1 - \frac{1}{8} A_{20}(1+3 \cos 2\theta) - \frac{3}{2} \{ \sin 2\theta (A_{21} \cos \phi + B_{21} \sin \phi) + (1 - \cos 2\theta) (A_{22} \cos 2\phi + B_{22} \sin 2\phi) \} \right] \quad \dots\dots(42)$$

しかし、前と同様に、われわれに関心があるのは分布形そのものではなく、異方性の特性である。これを表わすファブリックテンソルはこの場合次のようになる。

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} A_{20} - 6A_{20} & -6B_{22} & -3A_{21} \\ -6B_{22} & \frac{1}{2} A_{20} + 6A_{22} & -3B_{21} \\ -3A_{21} & -3B_{21} & -A_{20} \end{pmatrix} \quad \dots\dots(43)$$

引用文献

- 1) 牧野和孝, 松田充功: 粉体工学会誌, 19-11, 675(1982)
- 2) 牧野和孝, 松田充功: 粉体工学会誌, 20-2, 74(1983)
- 3) Santaló, L.A.: "Introduction to Integral Geometry," Herman, Paris (1953)
- 4) 栗田稔: "積分幾何学", 共立出版(1956)
- 5) Kendall, M.G. and P. A. Moran: "Geometrical Probability," Charles Griffin, London (1963)
- 6) Elias, H. (ed.): "Stereology—Proc. 2nd Int. Congress for Stereology, Chicago, 1967—", Springer, Berlin (1967)
- 7) De Hoff, R. T. and F. N. Rhines: "Qualitative Microscopy," McGraw-Hill, New York (1968) (牧島邦夫監訳, "計量形態学", 内田老鶴園新社(1972))
- 8) Underwood, E.E.: "Qualitative Stereology," Addison-Wesley, Reading, Mass. (1970)
- 9) Santaló, L.A.: "Integral Geometry and Geometric Probability," Addison-Wesley, London (1976)
- 10) 諏訪紀夫: "定量形態学", 岩波書店(1977)
- 11) Miles, R.E. and J. Serra (eds.): "Geometrical Probability and Biological Structures: Buffon's 200th Anniversary," Springer, Berlin (1978)
- 12) Weibel, E.R.: "Stereological Methods," Vols. 1, 2, Academic Press, New York (1979, 1980)
- 13) 佐久間健一, 西沢泰二: 日本金属学会会報, 10, 279(1971)
- 14) 日本金属学会編: "材料検査法" (講座・現代の金属学, 実験技術集7), 日本金属学会(1978)
- 15) Okaya, K. and T. Inoue: Proc. Int. Symp. on Powder Technology '81, Society of Powder Technology, Japan, (1982) 72~80.
- 16) 佐武正雄: 土と基礎, 128-5, 55(1980)
- 17) Oda, M.: Mech. Materials, 2, 163 (1983)
- 18) 金谷健一, 石川修: 粉体工学会誌, 21 (1984) (予定)
- 19) Buffon, G.: Supplement a l'Histoire Naturelle, 4 (1777)
- 20) Hillard, J.E.: in 6), 219~227
- 21) Kanatani, K.: Int. J. Engng Sci, 22 (1984) (予定)

8 まとめ

本報告では異方粒子の配向性をステレオロジーの手法により測定する理論を示した。異方性をもつ粒子の分布を記述するとき重要なことは、厳密には分布密度によって完全に分布が表現されるのではあるが、実際問題としてはひとつの2階対称テンソル(ファブリックテンソル)を与えればほぼ十分であるという点である。これは分布の異方性を直交異方性として近似したことにほかならない。その直交異方性を完全に指定するのがファブリックテンソルであり、本理論によれば測定データより簡単に計算できる。この方法を拡張すれば、内部組織をもつ材料のひずみ履歴を測定することもできる²¹⁾。

しかし、実際の測定にあたってはいろいろな技術的問題が残っている。試料をどのように用意するか、実際の線状粒子や板状粒子は太さや厚さをもっているのだからをどう近似するか、交点数や交線長をどう測定するかなどである。これらは対象とする材料や用いる装置に大きく依存するので、個々の場合について今後の検討が必要であると思われる。

謝辞 本研究の一部に実吉奨学会の助成を受けた。

- 22) Kanatani, K. : *Artificial Intelligence*, 23 (1984) (予定)
- 23) 金谷健一 : 粉体工学会誌, 18-10, 838(1981)
- 24) Kanatani, K. : "Modern Methods of Fine Particle Characterization" (ed. J.F. Beddow), CRC Press, Boca Raton, Fl. (1984) (予定)
- 25) Kanatani, K. : *Int. J. Engng Sci*, 22-2, 149 (1984)
- 26) 金谷健一 : 土質工学会論文報告集, 23-4 (1983)
- 27) 金谷健一 : 材料科学, 20-4 (1983)

Author's Abstract

Measurement of Particle Orientation Distribution by a Stereological Method

by

Ken-ichi KANATANI

(Department of Computer Science, Gunma University)

The anisotropic characteristics of a composite material are determined by the particle orientation distribution in it. In this paper, practical procedures are described for the stereological method which determines the spatial distribution of particle orientation from the distribution observed on cross sections. First, the distribution of needle-like particles on a plane is determined by counting the number of intersections with parallel probe lines. Next, the distribution of needle-like particles in the space is determined by counting the number of intersections with a cutting plane. Then, the distribution of disk-like particles in the space is determined by counting the number of intersections with a probe line. Finally, the distribution of disk-like particles in the space is determined by measuring the total length of the cross sections on a cutting plane.

List of Figures

- Fig. 1 A line element of length dl and orientation θ intersects a line of inclination Θ when the center of the line element falls within the band area of width $|\sin(\Theta-\theta)|dl$ along the line
- Fig. 2 An example of needle-like particles distributed on a plane
- Fig. 3 Data of intersection counting on Fig. 2 and the curve which approximates the data distribution
- Fig. 4 The distribution density $f(\theta)$ determined from the curve of Fig. 2
- Fig. 5 Spherical coordinates describing the orientation of a needle-like particle
- Fig. 6 A line element of length dl and orientation (θ, ϕ) intersects a plane the normal to which is in the direction (Θ, Φ) when the center of the line element falls within the layer of width $|\cos \gamma|dl$ along the plane
- Fig. 7 A surface element of area dS and its normal in the direction (θ, ϕ) intersects a line of orientation (Θ, Φ) when the center of the surface element falls within the cylindrical region of cross section $|\cos \gamma|dS$ along the line
- Fig. 8 If a plane of orientation (Θ, Φ) and of unit area cuts a unit volume of the space, the expected length of the intersection with a surface element of normal (θ, ϕ) in it equals the area of the image projected onto a plane perpendicular to the probe plane and parallel to the intersection